自然単位系 (natural unit)

★ 物理量の次元

- 全ての物理量は 固有の次元 (dimension) を有し、
  それは [M], [L], [T] の組み合わせで表される。

  [M]：質量 (mass) の次元
  [L]：長さ (length) の次元
  [T]：時間 (time) の次元

- 任意の物理量 P の次元を [P] で表すことにすると、
  [P]=$[\mathrm{M}]^m[\mathrm{L}]^l[\mathrm{T}]^t$ (通常は $m, l, t \in \mathbf{Z}$) と表される。

  例：$[c] = [\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-1}$, $[\hbar] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-1}$,
  $[\mathrm{energy}] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2}$, $[\mathrm{momentum}] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-1}$, $[\mathrm{force}] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$

- 国際単位系 (英：International System of Units, SI 単位系) では、
  質量の単位：kg（キログラム）
  長さの単位：m（メートル）
  時間の単位：sec. (second, 秒)

- 同じ次元の物理量しか和をとることはできない
  → 次元解析 (dimension analysis)

  例：$E = mc^2$ は、次元的には成立し得る関係式である。

★ 自然単位系 (natural unit)：$\hbar = c = 1$ とする単位系。

全ての物理量の次元が明確に分かっていることを前提とすると便利な単位系。

- **Dirac 定数** $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ ：素粒子原子核物理では、ミクロな系が研究対象なので、多くの場合、系を量子論的に取り扱う必要がある。従って、Dirac 定数 $\hbar$ は、余りに頻繁に現れる。それゆえ、$\hbar = 1$ とする単位系を用いると、理論的記述が簡単になる。$\hbar$ の展開での次数が問題になる場合など、必要なときのみ $\hbar$ を明記する。

（実験値）$\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\mathrm{J\cdot sec} = 6.582119514(40) \times 10^{-22}\mathrm{MeV\cdot sec}$

- **光速度** c ：素粒子原子核物理では、高エネルギーの現象を扱うことが多く、かつ、理論においても、質量がゼロの粒子や質量が小さい粒子を扱うことも多いので、（特殊）相対論的に共変な形式を用いて記述を行なう方が便利である。この場合、光速度 c は 頻繁に現れ、時には 理論の共変性が不明確になる。そこで、$c = 1$ とする単位系を用いると、理論的記述が簡単になる上に、理論のローレンツ共変性がより明確になる。

（実験値）c=299,792,458 m/sec

- 自然単位系では、以下で例示するように、理論的な記述が簡単になる上に、理論のローレンツ共変性がより明確になる。

(1) Einstein の関係：$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$　即ち　$p_\mu p^\mu = m^2$
　4 元運動量 $p^\mu \equiv (E, \mathbf{p})$　　$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\mathbf{p})$

(2) 交換関係：$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[t, E] = i\hbar \rightarrow [x^\mu, p^\nu] = ig^{\mu\nu}$
　4 元座標 $x^\mu \equiv (t, \mathbf{x})$

(3) 対応原理：$\mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow p^\mu = i\partial^\mu$
　4 元微分 $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}})$　　$\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}})$

(4) 共変微分 (covariant derivative)：$D_i = \partial_i - \frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}_i \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$
　4 元ベクトル場 $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$　　$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$

(5) 質量 m の粒子のコンプトン波長 (Compton wave-length)：$\frac{\hbar}{mc} \rightarrow \frac{1}{m}$
　質量 m の粒子を交換することによって もたらされる力の到達距離。

- 自然単位系では、[L], [M], [T] のうち、１つの次元だけが独立な次元として残り、[L]=[T], [M]=[L]$^{-1}$ となる。

- 自然単位系では、光速が基準であり $c = 1$ とするため、「長さ」と「時間」が同じ単位で表される。(宇宙での長さを記述する単位である「光年」と類似。)

- 自然単位系では、質量とエネルギーや運動量が同じ単位で表される。

- 自然単位系では、「長さ」の次元が、「エネルギー」の次元の逆数で表される。これは、ミクロな世界が、高エネルギーの世界に対応することを示唆している。

関係式：$\hbar c$=197.3269788 MeV fm $\simeq$ 200 MeV fm を用いると、自然単位系では、200 MeV fm $\simeq \hbar c = 1$ より 1fm^{-1} $\simeq$ 200 MeV が成り立つ。

- なお、自然単位系での 残りの次元の単位としては、素粒子原子核物理学では、GeV や fm を基準にすることが多い。これは近似的には 陽子の質量や大きさに相当する。

（実験値）陽子の質量: 938.2720813(58) MeV (約 1GeV)
　　　　　陽子の半径（荷電平均２乗半径 $\langle r^2 \rangle$）: 0.8751(61)fm (約 1fm)

特殊相対論 (special relativity)

- 特殊相対性原理：物理法則は、全ての慣性系に対して同一である。
  物理量は、4 次元の scalar、vector、tensor などの Lorentz 群の既約表現 (irreducible representation) で記述され、作用 (action) や 場の方程式 (field equation) や L-form での経路積分 (path integral) といった 理論を記述する形式は、Lorentz 変換に対して 共変 (covariant) な形式になっている。

  例 : 作用は、Lorentz scalar であり、従って、Lorentz 変換に対して不変な量

- 自然単位系で表した 4 元ベクトルの例

  4 次元時空座標：$x^\mu \equiv (t, \mathbf{x}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{x})$

  4 元微分：$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}), \quad \partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}})$

  4 元運動量：$p^\mu \equiv (E, \mathbf{p}), \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad [E$: エネルギー$]$

  光子 (photon) 場：$A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A}), \quad A_\mu = (\phi, -\mathbf{A}) \quad [\phi$: 電位ポテンシャル$]$

  ※ 便宜的な 4 元速度：$V^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}(1, \mathbf{v})$（$-1 < \mathbf{v}_i < 1$）も 4 元ベクトル

- 4 次元の添字には、ギリシア文字を用い、3 次元の添字には、ラテン文字（通常のアルファベット）を用いる。

- 縮約規則 : 4 次元の添字に関しては、繰り返しの上添字と下添字については、縮約（和）をとるものとする。3 次元の添字に関しては、上・下関係なく、繰り返しの添字については、縮約（和）をとる。
  例：$p_\mu p^\mu = p_0 p^0 + p_1 p^1 + p_2 p^2 + p_3 p^3 = p^0 p^0 - p^1 p^1 - p^2 p^2 - p^3 p^3 = E^2 - \vec{p}^2$
  $p_i p_i = p_1 p_1 + p_2 p_2 + p_3 p_3 = \vec{p}^2$

★ 計量テンソル (metric tensor) : $g^{\mu\nu}$

- 4 元の反変計量テンソルの定義：$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$,
  他の非対角成分は $g^{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq \nu)$

- 共変計量テンソルへの要請：$g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu$
  $\rightarrow g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

反変ベクトル J^μ に対して、共変ベクトル J_μ は、$J_\mu \equiv g_{\mu\nu} J^\nu$ と定義される。
すなわち、反変・共変ベクトルの時間成分は 同じ値：$J_0 = J^0$
反変・共変ベクトルの空間成分については、符号だけ異なる：$J_i = -J^i \ (i = 1, 2, 3)$

共変な形式での電磁気学

◎ 光子 (photon) 場：$A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$

ϕ：電位ポテンシャル
$\mathbf{A}$：ベクトル・ポテンシャル

◎ 電磁場テンソル：$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

電場：$F^{i0} = \mathbf{E}_i$（3 元ベクトルとしては 極性ベクトル）
磁場：$F^{ij} = \epsilon_{ijk}\mathbf{H}_k$,　即ち　$\mathbf{H}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$
(3 元ベクトルとしては 軸性ベクトル)

$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$: 電磁場テンソルの双対テンソル (dual tensor)

◎ 4 元電磁カレント：$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j})$

ρ：電荷密度
$\mathbf{j}$：電流密度

◎ 共変な形式での Maxwell 方程式：

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 : \text{ビアンキ恒等式 (Bianchi identity)} \end{aligned}$$

cf. 通常の Maxwell 方程式はこのようなローレンツ共変な形にまとめられる。

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E} &= \rho \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \\ \mathrm{div}\mathbf{H} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

◎ 共変な形式での光子場 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ と電磁場 $F^{\mu\nu}$ との関係：

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

cf. これは通常のポテンシャル (ϕ, $\mathbf{A}$) と電磁場 ($\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$) との関係と等価。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathrm{rot}\mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi \end{aligned}$$

ギリシャ文字

α A alpha アルファ
β B beta ベータ
γ Γ gamma ガンマ
δ Δ delta デルタ
ϵ E epsilon エプシロン
ζ Z zeta ゼータ（ツェータ）
η H eta エータ
θ Θ theta テータ
ι I iota イオタ
κ K kappa カッパ
λ Λ lambda ラムダ
μ M mu ミュー
ν N nu ニュー
ξ Ξ xi グザイ（クシー）
o O omicron オミクロン
π Π pi パイ
ρ P rho ロー
σ Σ sigma シグマ
τ T tau タウ
υ Υ upsilon ウプシロン
ϕ Φ phi ファイ
χ X chi カイ
ψ Ψ psi プサイ
ω Ω omega オメガ

桁数を表す接頭語

E (exa) $=10^{18}$
P (peta) $=10^{15}$
T (tera) $=10^{12}$
G (giga) $=10^{9}$
M (mega)$=10^{6}$
k (kilo) $= 10^{3}$
h (hecto)$=10^{2}$

---

d (deci) $= 10^{-1}$
c (centi) $= 10^{-2}$
m (milli) $=10^{-3}$
μ (micro)$=10^{-6}$
n (nano) $=10^{-9}$
p (pico) $=10^{-12}$
f (femto)$=10^{-15}$
a (atto) $=10^{-18}$