強い相互作用におけるアイソスピン対称性

アイソスピン概念の発見

我々は、通常 無意識に、電子のスピンの上向き・下向きという 2 つの状態を、同一の粒子である電子の異なった状態として捉えているが、ハイゼンベルグは、これと同じ発想から、質量が極めて近い陽子と中性子は、実は「核子」という同一粒子の 2 つの異なった状態であると考えた。この電子スピンとのアナロジーは 合理的であり、実際、中性子と陽子の類似性の議論に用いられる代数構造は、スピンの場合と同様、SU(2) である。このスピンと類似の内部自由度（内部空間）は、アイソスピンと呼ばれている。

アイソスピン変換と SU(2) 代数

アイソスピン空間に関する仮想的な回転を、アイソスピン変換という。これは、陽子と中性子とを混合する仮想的な変換である。そして、アイソスピン変換の生成子 (generator) I^a $(a = 1, 2, 3)$ は、SU(2) 代数 $[I^a, I^b] = i\varepsilon^{abc} I^c$ を満たす。尚、基本表現（この場合は 2×2 の行列表現）では、パウリ行列 τ^a を用いて $I^a = \frac{\tau^a}{2}$ と書き表せて、$e^{i2\theta^a I^a} = e^{i\tau^a\theta^a} = \cos\theta + i\tau^a\hat{\theta}^a \sin\theta$ $(\theta \equiv \sqrt{\theta^a\theta^a},\ \hat{\theta}^a \equiv \theta^a/\theta)$ 等の関係式が成り立つ。

強い相互作用全般におけるアイソスピン不変性

実は、陽子と中性子の質量に限らず、他のバリオンや中間子（メソン）、核力も含めて、強い相互作用一般に関して、アイソスピン SU(2) の対称性は かなり良い近似で成り立つ。

核子の質量　　　：m(p)=938.28 MeV, m(n)=939.57 MeV
パイ中間子の質量：$m(\pi^{\pm})$=139.57 MeV, $m(\pi^0)$=134.96 MeV

即ち、わずかな差を除いて、核子や中間子の質量はアイソスピン変換に対して不変であると言える。形式的に書くと、強い相互作用のハミルトニアン $\hat{H}_{\text{strong}}$ は、アイソスピン生成子 I^a とほぼ交換可能であり、$[\hat{H}_{\text{strong}}, I^a] \simeq 0 \quad (a = 1, 2, 3)$ を満たす。

核子：アイソスピン 2 重項 $\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$, パイ中間子：アイソスピン 3 重項 $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$

アイソスピンの既約表現として現れるハドロンの状態－２核子系の例－

この様に、強い相互作用で保存される アイソスピンは、ハドロンの状態や反応を記述する際に極めて有用な内部量子数であり、また 個々のハドロン自身がアイソスピンの適当な既約表現で表される。アイソスピン概念の有用性を 2 核子系の記述を例にとって示す。個々の核子はスピン 1/2 を持つとして、スピン状態を↑や↓のように表す。角運動量の合成則から、複合系の全スピンはスピン 3 重項 (S=1) かスピン 1 重項 (S=0) であり、それは 回転によって互いに移り変わった

りはしない。全スピン状態を $|S,S_z\rangle$ で表すと、

（３重項）：$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

（１重項）：$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

同様に、個々の核子はアイソスピン $I = 1/2$ で、陽子は $I_3 = 1/2$ の状態、中性子は $I_3 = -1/2$ の状態に対応する。核子・核子系についても、全アイソスピンの状態は、アイソスピン 3 重項 (I=1) かアイソスピン 1 重項 (I=0) のいずれかであり、それは 強い相互作用によっては、殆ど移り変わったりしない。全アイソスピン状態を $|I,I_3\rangle$ で表すと、以下のような状態が物理的に現れる。

（アイソスピン３重項）：$|1,1\rangle = |\mathrm{pp}\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{pn}\rangle + |\mathrm{np}\rangle)$, $|1,-1\rangle = |\mathrm{nn}\rangle$

（アイソスピン１重項）：$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{pn}\rangle - |\mathrm{np}\rangle)$

核力 及び 原子核におけるアイソスピン不変性

既述の様に、核力も アイソスピン変換に対して不変であり、$I = 1$ の多重項に対しては I_3 の値には依存しない。（但し、$I = 1$ と $I = 0$ とでは核力の様相は異なる。）その証拠の１つとしては、^{6}He, ^{6}Li, ^{6}Be の $I = 1$ のエネルギー準位の縮退が挙げられる。これらの原子核は、安定な α 粒子 即ち ^{4}He 核の芯と、２つの核子から構成されており、

$$^6\mathrm{He} \simeq \alpha + \mathrm{n} + \mathrm{n}\ ,\ ^6\mathrm{Li} \simeq \alpha + \mathrm{p} + \mathrm{n}\ ,\ ^6\mathrm{Be} \simeq \alpha + \mathrm{p} + \mathrm{p}$$

と表すことができる。ここで、α は $I = 0$ なので、全系のアイソスピンを担うのは、残りの２つの核子であり、その組み合わせ等は、上記の２核子系と全く同じである。もし、核力のアイソスピン不変性が大きく破れていれば、その効果により、一般に これらの準位は異なるだろうが、実際には、核レベルでもアイソスピン不変性が成り立っており、電磁効果の補正を施すと、これら３核種の $I = 1$ の準位は ほぼ完全に縮退している。これは、核力のアイソスピン不変性を示唆している。

反粒子のアイソスピン

反粒子の量子数やチャージは、粒子の場合とは反対になるので、反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$ は、$I_3 = -1/2$ の状態、反中性子 $\bar{\mathrm{n}}$ は、$I_3 = 1/2$ の状態に対応する。そして、核子 $\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$ と同様、反核子も $\begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$ というアイソスピン２重項を構成する。ここで、反核子の上・下成分の間に 相対的な負号を導入したのは 以下のような理由による。実際に、SU(2) 行列 $U \equiv \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ によるアイソスピン変換

$$\begin{pmatrix} \mathrm{p}' \\ \mathrm{n}' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$$

を考えると、$\bar{p} \equiv p^\dagger\gamma^0$, $\bar{n} \equiv n^\dagger\gamma^0$ という定義により、

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathrm{p}}' \\ \bar{\mathrm{n}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathrm{p}} \\ \bar{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$
が成立する。多少 技巧的ではあるが、この関係式は 以下のように変形できる。

$$\begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}}' \\ \bar{\mathrm{p}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{22}^* & -U_{21}^* \\ -U_{12}^* & U_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{22} & -U_{12} \\ -U_{21} & U_{11} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = (U^{-1})^\dagger \begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$$
ここで、ユニタリー行列の定義的な性質 $U^{-1} = U^\dagger$ を用いると、

$$\begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}}' \\ \bar{\mathrm{p}}' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$$
これは、$\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$ と全く同じ SU(2) の変換である。

以上の様に、$\begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$ という列ベクトルが、$\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$ と同じ SU(2) の変換性を示す。

核子・反核子対のアイソスピン状態

核子のアイソスピン２重項 $\begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}$ と反核子のアイソスピン２重項 $\begin{pmatrix} -\bar{\mathrm{n}} \\ \bar{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$ から、作られる核子・反核子対は、以下のような全アイソスピン状態 $|I, I_3\rangle$ を持つ

（アイソスピン３重項）$|1,1\rangle = -|\bar{\mathrm{n}}\mathrm{p}\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}\rangle - |\bar{\mathrm{n}}\mathrm{n}\rangle)$, $|1,-1\rangle = |\bar{\mathrm{p}}\mathrm{n}\rangle$

（アイソスピン１重項）$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}\rangle + |\bar{\mathrm{n}}\mathrm{n}\rangle)$

尚、クォーク・反クォークの束縛状態である中間子（メソン）のアイソスピンについても同様な議論が成り立つ。