ユニタリー行列とユニタリー群

ユニタリー群や特殊ユニタリー群は、素粒子物理学において頻繁に現れる代表的な連続群である。まず、ユニタリー行列などの定義と簡単な性質を以下にまとめる。

★ U(N)：$N \times N$ ユニタリー行列 (unitary matrix)
定義は、「$N \times N$ 複素行列で、ユニタリー条件 $U^\dagger U(= UU^\dagger) = 1$ を満たすもの。」
独立な生成子 $T^a(a = 1, 2, ..., N^2)$ は、N^2 個あり、U(N) の群要素は、N^2 個の実パラメーター $\theta^a \in \mathbf{R}$ $(a = 1, 2, ..., N^2)$ を用いて、$U = e^{i\theta^a T^a}$ と表せる。

★ SU(N)：$N \times N$ 特殊ユニタリー行列 (special unitary matrix)
定義は、「$N \times N$ 複素行列で、ユニタリー条件 $U^\dagger U(= UU^\dagger) = 1$ を満たし、かつ 行列式 (determinant) が 1 即ち det U=1 を満たすもの。」
独立な生成子 $T^a(a = 1, 2, ..., N^2 - 1)$ は、$N^2 - 1$ 個あり、SU(N) の群要素は、$N^2 - 1$ 個の実パラメーター $\theta^a \in \mathbf{R}$ $(a = 1, 2, ..., N^2 - 1)$ を用いて、$U = e^{i\theta^a T^a}$ と表せる。

★ O(N)：$N \times N$ 直交行列 (orthogonal matrix)
定義は、「$N \times N$ 実行列で、直交条件 ${}^tOO(= O\,{}^tO) = 1$ を満たすもの。」つまりは、U(N) の行列成分を実数に限ったもの。

★ SO(N)：$N \times N$ 特殊直交行列 (special orthogonal matrix)
定義は、「$N \times N$ 実行列で、直交条件 ${}^tOO(= O\,{}^tO) = 1$ と det O=1 を満たすもの。」つまりは、SU(N) の行列成分を実数に限ったもの。

以上のユニタリー行列などは、いずれも、行列の積 (product) に関して 群 (group) をなす。そして、そのユニタリー行列と同相の関係を有する群をユニタリー群と総称する。

SU(2) 群

ユニタリー群のうち、特に SU(2) は、回転群、アイソスピン、弱アイソスピン、Yang-Mills 理論など物理学の多岐にわたって現れるもっとも代表的な連続群である。それ故、以下では、SU(2) に焦点を絞って その特徴を簡単にまとめておく。

・SU(2) の基本表現は 角運動量 $\frac{1}{2}$ の表現に対応するスピノル表現であり、generator は、２行２列の Pauli 行列 σ^a $(a = 1, 2, 3)$ を用いて、$T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ と表される。

・SU(2) generator は、一般的に SU(2) 代数 $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c$ を満たし、これは O(3) 代数と同じである。（cf. ３次元の空間回転は O(3) で表される。）

・SU(2) の基本表現に限っては、Pauli 行列が $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}$ という反交換代数を満たすので、Dirac 行列を一般化した Clifford 代数 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ の１種になっている。

・これら交換関係・反交換関係を用いると、基本表現の SU(2) の群要素は、
$e^{i\theta^a\sigma^a} = \cos\theta + i\hat{\theta}^a\sigma^a\sin\theta$, $(\theta \equiv (\theta^a\theta^a)^{1/2}$, $\hat{\theta}^a \equiv \theta^a/\theta)$
の様に簡単化される。

・従って、基本表現の SU(2) 群要素は、
$e^{i\theta^a} = \phi^0 + i\sigma^a\phi^a$, $\phi^\alpha \in \mathbf{R}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$
と表すことができ、かつ、$(\phi^0)^2 + (\phi^a)^2 = 1$ より、$(\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3,)$ は、４次元空間の単位超球面 S^3 上のベクトルに対応する。

・この様にすれば、SU(2) $\simeq S^3$ というトポロジーの関係が導出できる。