

QCD・グルーオンの自己相互作用・ゲージ自由度の問題

量子色気学 (QCD) の Lagrangian 密度は、クォーク場を  $q(x)$ 、グルーオン場を  $A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)T^a \in \text{su}(3)_c$  ( $A_\mu^a(x) \in \mathbf{R}$ ) として、

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - m_q)q - \frac{1}{2}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$$

と表せる。 $m_q$  はクォークのカレント質量。(フレーバー毎に値が異なるので、フレーバー空間での対角行列で表される。)

ここで、 $D^\mu \equiv \partial^\mu + igA^\mu$  は SU(3) 共変微分 (covariant derivative) であり、

$$G^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig}[\hat{D}^\mu, \hat{D}^\nu] = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu]$$

は、場の強さ (field strength) である。(  $g$  は QCD 結合定数。  $\hat{\partial}^\mu$  は微分演算子。)

なお、 $T^a$  ( $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) は カラー SU(3)<sub>c</sub> の生成子 (generator) であり、Gell-Mann 行列  $\lambda^a$  を用いて、 $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$  で表され、

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

を満たす。ここで、 $f^{abc}$  は 添字に関して完全反対称な SU(3) の構造定数である。

(1) この定義では  $T^a$  ( $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) は エルミートである。 $T^a$  がエルミートである場合には、構造定数  $f^{abc}$  が全て実数になることを示せ。

(2)  $G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^a T^a$  として、 $G_{\mu\nu}^a$  を グルーオン場の成分  $A_\mu^a$  (や  $f^{abc}$ ) などを用いて表せ。また、 $G_{\mu\nu}^a$  は実数か？

(3)  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中の、グルーオンの“運動量項”  $-\frac{1}{2}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$  をグルーオン場の成分  $A_\mu^a$  (や  $f^{abc}$ ) などを用いて表せ。

(4) QED と異なり、QCD においては、ゲージ場であるグルーオン場の 3 点相互作用や 4 点相互作用が現れる。(3) の結果を下に、グルーオン場の 3 点相互作用項  $\mathcal{L}_{3g}$  及びグルーオン場の 4 点相互作用項  $\mathcal{L}_{4g}$  を、それぞれ書き下せ。

(5) QED との比較から、これらグルーオン場 同士の 3 点相互作用  $\mathcal{L}_{3g}$  や 4 点相互作用  $\mathcal{L}_{4g}$  が現れる理由を簡潔に説明せよ。

(6) あるスカラー関数  $\Omega(x) \in \text{SU}(3)_c$  を用いて、グルーオン場が、 $A_\mu(x) = \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x)$  の様に表される場合、場の強さ (= カラー電磁場)  $G_{\mu\nu}(x)$  を計算せよ。導出過程も明記せよ。

[ ヒント :  $\Omega(x) \in \text{SU}(3)_c$  より、 $\Omega(x)\Omega^\dagger(x) = 1$ 。従って、両辺を微分すると、 $(\partial_\mu\Omega)\Omega^\dagger + \Omega\partial_\mu\Omega^\dagger = 0$ 。即ち、 $(\partial_\mu\Omega)\Omega^\dagger = -\Omega\partial_\mu\Omega^\dagger$  ]