## ＱＥＤ，ゲージ対称性，カイラル対称性

量子電気力学（ＱＥＤ）の Lagrangian 密度は、電子場を $\psi(x)$、光子（フォトン）場を $A_\mu(x) \in \mathbf{R}$ として、

$$\mathcal{L}_{\rm QED} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と表せる。ここで、$D^\mu \equiv \partial^\mu + ieA^\mu$ は U(1) 共変微分 (covariant derivative) であり、$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ は、場の強さ (field strength) 即ち 電磁場である。また、$e$ は QED のゲージ結合定数 ($\frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$)、$m \simeq 0.5$MeV は電子の質量であり、$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ である。$\gamma^\mu$ は、$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ は $4 \times 4$ 単位行列) を満たす。

(1) U(1) ゲージ関数を $e^{i\chi(x)} \in$ U(1) ($\chi(x) \in \mathbf{R}$) として、U(1) ゲージ変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) \equiv e^{i\chi(x)}\psi(x), \qquad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi(x)$$

に対して、$\mathcal{L}_{\rm QED}$ が不変になることを示せ。

(2) 光子場 $A_\mu(x)$、電磁場 $F_{\mu\nu}(x)$、電子場 $\psi(x)$、4元カレント $j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ のそれぞれについて、U(1) ゲージ不変か否かを述べよ。

(3) $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0$, $\quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$, $\quad \theta \in \mathbf{R}$ として、
$\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\quad \gamma_5^2 = \mathbf{1}$, $\quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = \mathbf{0}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\quad e^{i\gamma_5\theta} = \cos\theta \cdot \mathbf{1} + i\gamma_5 \sin\theta$
の４つの関係式を それぞれ示せ。但し、$\mathbf{1}$ は $4 \times 4$ 単位行列、$\mathbf{0}$ は $4 \times 4$ 零行列である。尚、自明な場合には $\mathbf{1}$ を略記しても構わない。

(4) もし、仮に $m = 0$ であれば、大域的な $\mathrm{U(1)_A}$ カイラル変換

$$\psi \to \psi' \equiv e^{i\gamma_5\theta}\psi \quad (\theta \in \mathbf{R})$$

の下で、$\mathcal{L}_{\rm QED}$ が不変であることを示せ。尚、カイラル変換では、ゲージ場 $A^\mu$ は変換しない。

(5) $\mathcal{L}_{\rm QED}$ を、$\bar{\psi}$ について変分すると、電子に対する Dirac 方程式

$$(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = 0$$

が得られる。$A^\mu(x) = 0$ の（光子場が無い）場合に着目し、自由場の Dirac 方程式

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$$

を満たす電子場 $\psi(x)$ が 自由場の Klein-Gordon 方程式

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi = 0$$

を満たすことを示せ。
[ヒント：Dirac 方程式の左側から $(-i\gamma_\alpha\partial^\alpha - m)$ を乗じてみよ。]