自由 spinor 場に対する Dirac 方程式

(1) Dirac 方程式と Klein-Gordon 方程式

自由 spinor 場に対する Dirac 方程式

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi = E\psi$$

の解 $\psi(x)$ が、Klein-Gordon 方程式

$$(\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2)\psi = E^2\psi$$

を満たすことを示せ。但し、$\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ であり、$\boldsymbol{\alpha}$=$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β は、

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \{\beta, \beta\} = 2$$

という反交換関係を満たす。

(2) 共変な形式での Dirac 方程式

時間に依存する 自由 spinor 場に対する Dirac 方程式

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

が、Dirac の γ 行列

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma^0 \equiv \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \beta\boldsymbol{\alpha}$$

を用いると、

$$(\gamma_\mu \hat{p}^\mu - m)\psi = 0$$

という共変な形式で書けることを示せ。
但し、$\hat{p}^\mu \equiv i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$、即ち、$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}})$ である。

(3) Dirac の γ 行列

$\boldsymbol{\alpha}$, β に関する反交換関係から、Dirac 行列 γ^μ に対する反交換関係を導出せよ。
また、γ^0, $\gamma^i (i = 1, 2, 3)$ の hermite 性について論じよ。