

## 課題研究 P3 理論ゼミ ポップ第 9 章

藤丸大輔

2024 年 6 月 4 日

### 9. $e^+e^-$ 衝突による粒子生成

#### 9.0. はじめに

十分なエネルギーを持った  $e^+e^-$  衝突における対消滅によって、電磁相互作用または弱い相互作用をするすべての粒子が生成されうる。その反応を示したダイアグラムを図 1 に示す。

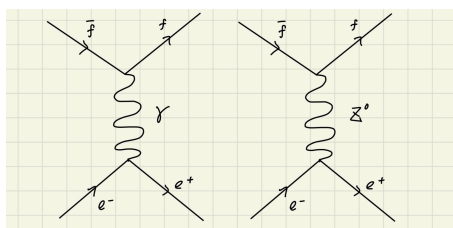


図 1  $e^+e^-$  衝突による粒子対の生成のダイアグラム,  $f$  は基本的なフェルミオン

電磁相互作用においては交換される仮想的なボソンは光子であり、弱い相互作用におけるそれは電荷を持たないベクトルボソン  $Z^0$  である。ニュートリノは電氣的に中性で電磁相互作用を受けないので  $Z^0$  の交換によってのみ生成される。

次に粒子の衝突におけるエネルギーを考える。上のようにして作られる粒子反粒子対の種類は  $e^+e^-$  衝突におけるエネルギーに依存するため、このエネルギーを考えることは重要である。ここで同じエネルギー  $E$  を持った電子と陽電子が加速器中を反対方向に周回して正面衝突することを考える。ここでローレンツ不変なエネルギー変数として  $s$  を以下のように定義する。

$$s = (p_1c + p_2c)^2 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2c^2 \quad (1)$$

これは重心系のエネルギーの自乗である。今回の場合、粒子は十分に相対論的であることから静止質量項は無視でき、 $\mathbf{p}_1$  と  $\mathbf{p}_2$  はそれぞれが反平行であることから  $|\mathbf{p}| \approx E/c$  を用いると  $s = 4E^2$  とわかる。この結果より  $2m \leq \sqrt{s}/c^2$  が成り立つ質量  $m$  を持つ粒子は生成可能になる。質量の大きな新粒子を発見するためには衝突のエネルギーを大きくするか、または断面積の共鳴を探すといった方法がある。今回のような衝突ビーム型の実験では重心系で考えることができる。一方で標的が静止した系では  $mc^2 \ll E$  であれば

$$s = (p_1c + p_2c)^2 \approx 2mc^2E \quad (2)$$

となり、重心系のエネルギーはビームエネルギーの平方根に比例する。よって効率よく重心系のエネルギー  $\sqrt{s}$  を大きくするためには衝突ビーム型の方が優れている。

$e^+e^-$  衝突によって生じる粒子の検出については、可能な限り全立体角を覆うこと、粒子の飛跡を  $e^+e^-$  衝突点まで遡れること、粒子の種類を識別できることなどが必要である。

## 9.1. レプトン対の生成

この節ではレプトン、およびその生成について学ぶ。レプトンはスピン 1/2 を持つ素粒子で、弱い相互作用をし、電荷を持つものは電磁相互作用もするが強い相互作用はしない。

ミューオンは  $e^+e^-$  衝突で生成される粒子の中で最も質量が小さいものである。反応式は

$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (3)$$

のように与えられる。ミューオンは  $\mu^-$  であり、 $\mu^+$  はこれの反粒子である。質量は  $105.7\text{MeV}/c$  であり、 $e^+e^-$  衝突で生成される他の粒子に比べて小さい値である。ミューオンは他の粒子に比べると物質を透過しやすい。質量以外ほとんど同じ性質を持つ電子はその質量の小ささにより相互作用をより大きく受けるため飛程が短く、ハドロンは強い相互作用を受けるため飛程が短い。また、ミューオンは不安定な粒子ではあるものの、他の粒子に比べて比較的長い寿命 ( $2\mu\text{s}$ ) を持っていることもあり、識別が容易である。これらの性質によりミューオンは  $e^+e^-$  衝突実験における反応の基準として用いられる。

$\tau$  レプトンは  $e^+e^-$  衝突のエネルギーが十分にある場合に生成されうる、寿命の短い ( $3 \times 10^{-13}\text{s}$ ) レプトンである。この寿命の短さによって  $\tau$  を直接観測することはできず、その崩壊物を検出することになる。また、 $\tau$  は弱い相互作用によって電子やミューオンに崩壊する。 $\tau$  は  $e^+e^-$  衝突実験によって初めて発見されたが、その検出は  $e^+e^-$  対の重心系のエネルギーに比べてかなり小さいエネルギーを持ち、互いに逆符号の電荷を持つ電子-ミューオン対を観測することによるものだった。この事象は以下の反応、および崩壊によるものと解釈された。

$$e^+ + e^- \longrightarrow \tau^+ + \tau^- \quad (4)$$

$$\tau^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau \text{ または } \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau \quad (5)$$

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \text{ または } e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad (6)$$

この崩壊によって生じたニュートリノは検出されないため、重心系のエネルギーのずれについても説明ができる。

$\tau^+\tau^-$  対生成のしきい値は、その生成断面積が  $e^+e^-$  対の重心系のエネルギーとの関係がわかれば得られ、それによって  $\tau$  レプトンの質量が得られる。そのためには次式のような多くのレプトン崩壊やハドロン崩壊のチャンネルが必要である。

$$e^+ + e^- \longrightarrow e^\pm + X^\mp + Y \quad (7)$$

なお  $X$  は荷電レプトンおよび中間子、 $Y$  はニュートリノといった検出されない中性の粒子である。その実験結果を図 2 に示した。

このデータによると  $\sqrt{s} \approx 3.55\text{GeV}$  で生成断面積の比が急激に増加しているため、このエネルギーがしきい値と考えられる。この値に対応する  $\tau$  の質量は  $\sqrt{s} = 2mc^2$  より  $1.777\text{GeV}/c^2$  である。またこの実験におい

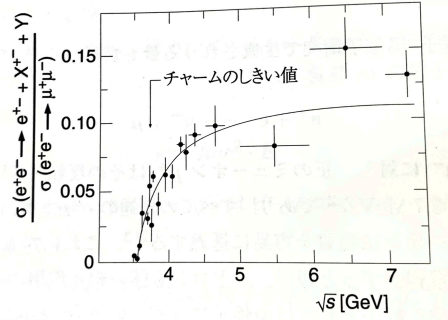


図2 縦軸: 式 (7) の生成断面積と  $\mu^+\mu^-$  対の生成断面積の比 横軸: 重心系のエネルギー  $\sqrt{s}$  のデータ

てチャームクォークを含む中間子の生成のしきい値が  $\tau$  のそれより僅かに高いところにあること, どちらも似た崩壊モードを持つことから  $\tau$  の検出は困難である.

次にこれらの断面積について学ぶ. 荷電レプトン対の生成について, プロパゲーターは 4 章より  $\frac{1}{Q^2 + M^2 c^2}$  で与えられるため衝突のエネルギーが  $Z^0$  の質量に比べて十分に小さい時は, 近似的に電磁相互作用の過程のみによって起こると見做せる. この近似を用いることで断面積の決定が容易になる. 以下ではこの近似を用いて幾つかの過程の断面積を考える.

まず以下のような弾性散乱を考える. この過程はバーバー散乱という.



この過程では電子と陽電子が対消滅して仮想光子になったのちに電子用電子対が生成される場合と, 電子と陽電子の散乱という異なる二つの過程を考慮して断面積を計算しなければならないため, 複雑な過程となっている. 反応のダイアグラムを図 3 に示す.

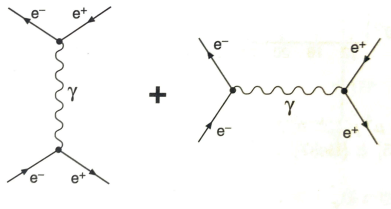


図3 バーバー散乱のダイアグラム

一方で比較的計算が簡単な断面積としてミュオン対の生成がある. このため多くの場合でミュオン対生成の断面積との比として  $e^+e^-$  反応の絶対値を決定する.  $\mu^+\mu^-$  の微分断面積, 全断面積は次のように与えられる.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (\hbar c)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} (\hbar c)^2 = \frac{21.7}{E^2/\text{GeV}^2} \text{nbarn} \quad (10)$$

この導出は QED の計算によって導出される. ここではこの式の考察および整合性の確認にとどめる. 断面積は行列要素の自乗に比例するが, 行列要素には電荷  $e$  の 2 粒子が結合するため  $e^2$  の因子が入るため断面積は

$e^4$ , つまり  $\alpha^2$  に比例する. 次に断面積は長さの二乗の次元を持つため,  $\frac{(\hbar c)^2}{[\text{エネルギー}]^2}$  の因子がかかる. この [エネルギー] の部分に入りうるエネルギーの量は  $\sqrt{s}$  である. 電子やミューオンの質量エネルギーも入り得るが  $s$  に比べて極めて小さいためここには入り得ない. このことから断面積はエネルギーの-2 乗に比例することがわかる. 角度依存性  $1 + \cos^2 \theta$  はスピン 1/2 の粒子を 2 つ生成するときに現れる典型的な因子である. また  $Q^2 c^2 = s = 4E^2 = 4E'^2$  を式 (9) に適応すると 5 章におけるモットの散乱断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|qc|^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (11)$$

と角度分布以外で一致している. この断面積については実験値と QED による計算結果がよく一致している. また, 同様にして  $e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-$  の断面積も計算できる. この二つの生成断面積は  $\sqrt{s}$  が十分大きいとき一致する. これをレプトン普遍性とよぶ. つまり, 質量による寄与を除けば荷電レプトン  $e, \mu, \tau$  はすべて同じように振る舞う. 式 (10) が実験結果をよく説明できるので, ミューオンや  $\tau$  レプトンの形状因子は 1, つまり点状粒子であることが言える. 電子の大きさの上限は  $10^{-18}\text{m}$  とされており, レプトンの励起状態もまだ見つかっていないことからレプトンは内部構造を持たない素粒子であると考えられている.

## 9.2. 共鳴

式 (10) より生成断面積は  $1/s$  という依存性を持つが, 終状態がハドロン対のチャンネルにおいては幾つかの大きなピークが存在し,  $1/s$  則を破っていることが図 4 によってわかる.

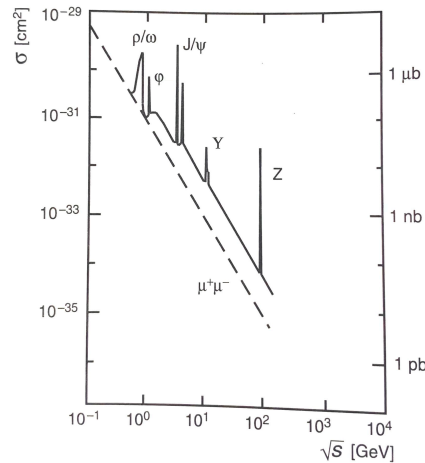


図 4  $e^+ + e^- \rightarrow$  ハドロン対の断面積と  $\sqrt{s}$  の関係

このピークは共鳴と呼ばれる短寿命の状態であり, 質量や角運動量といった量子数がよく定義された状態である. つまり共鳴を粒子と見做せる.

ブライト-ウィグナーの公式は共鳴エネルギー  $E_0$  の近傍での 2 つの粒子  $a, b$  の反応断面積のエネルギー依存性を記述し、次のように書ける。

$$\sigma(E) = \frac{\pi\lambda^2(2J+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (12)$$

なお  $\lambda$  は重心系での換算波長,  $s_i$  は粒子  $i$  のスピン,  $\Gamma$  は共鳴の幅,  $J$  は軌道角運動量とスピン角運動量の和である。このような共鳴の寿命  $\tau$  と幅  $\Gamma$  は  $\Gamma\tau = \hbar$  という関係がある。式 (12) の後半部分について、力学における強い減衰を伴う強制振動の共鳴に対応している。ここでは  $E$  が外力の振動数  $\omega$ ,  $E_0$  が共鳴振動数  $\omega_0$ ,  $\Gamma$  は減衰に対応している。

反応が非弾性的の場合、断面積は始状態のチャンネル<sup>\*1</sup>の部分幅  $\Gamma_i$ , 終状態のチャンネルの部分幅  $\Gamma_f$  および全幅  $\Gamma_{tot}$  に依存し,  $s_i$  に電子のスピン  $1/2$ ,  $J$  に光子のスピン  $1$  を代入して次のように表される。

$$\sigma_f(E) = \frac{3\pi\lambda^2}{4} \frac{\Gamma_i\Gamma_f}{(E-E_0)^2 + \Gamma_{tot}^2/4} \quad (13)$$

なお全幅とは終状態の可能なすべてのチャンネルの部分幅の和である。

次に、低エネルギーの共鳴の例として  $\rho, \omega, \phi$  の共鳴を考える。このような共鳴の特徴として、幅が  $4 \sim 150\text{MeV}$  程度であるがこれは強い相互作用の典型的な時間スケール  $10^{-23}$  秒に対応していることから、これはクォーク-反クォーク対の束縛状態と考えられ、その質量は反応前の重心系での全エネルギーに対応する。反応過程よりこのクォーク-反クォーク対は光子と同じ量子数を持つ必要がある。具体的には負のパリティと角運動量  $J=1$  を持つ必要があるが、このようなクォーク-反クォーク対の状態をベクトル中間子という。  $\rho^0$  といったベクトル中間子は以下のダイアグラムのように生成したのち、より軽い中間子へと崩壊する。

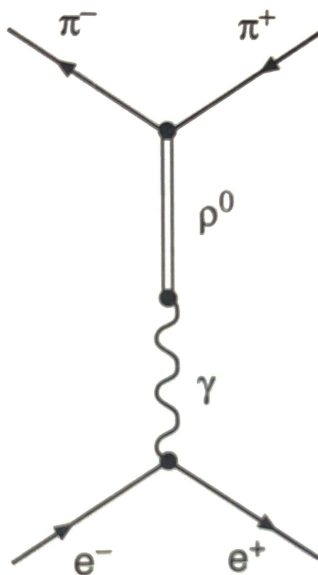


図5 ベクトル中間子の共鳴の生成と崩壊

実験によって  $770\text{MeV}$  付近に 2 つの共鳴が見つかったがこれはそれぞれ  $770\text{MeV}$  の  $\rho^0$  中間子,  $782\text{MeV}$  の  $\omega$  中間子の干渉によるものであるとわかった。この共鳴は  $u\bar{u}$  と  $d\bar{d}$  というクォーク-反クォーク対によるも

\*1 始状態および終状態における量子状態

のであるが,  $u, d$  はほとんど同じ質量であるためこの二つのクォーク-反クォーク対は近似的に縮退しているため  $\rho^0, \omega$  はこの二つのクォーク-反クォーク対の混合状態と見做せる. これら中間子は崩壊過程が異なるため実験的に区別できる.

$$\rho^0 \longrightarrow \pi^+ \pi^- \quad (14)$$

$$\omega \longrightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^- \quad (15)$$

1019MeV の近傍における共鳴があるが, これを  $\phi$  共鳴という. この共鳴の幅は 4.4MeV 程度でありこれはハドロンとしては極めて狭く, このことから長い寿命を持っていることが予測される. ( $\rho$  や  $\omega$  が  $10^{-23}$  秒程度である一方で  $1.5 \times 10^{-22}$  秒)  $\phi$  はおよそ 85% で二つの K 中間子に崩壊する. K 中間子の質量はおよそ 500MeV である. K 中間子は**ストレンジ粒子**の一つであり, 強い相互作用によって生成されるが, 弱い相互作用によって崩壊するため”即座に生成し”, ”ゆっくり崩壊”する. (寿命は  $10^{-9}$  秒程度) この奇妙な振る舞いは K 中間子が s クォークを含むことを仮定すると説明できる. s クォークは構成子クォーク質量が 450MeV であり,  $u, d$  の 300MeV より大きい. このことから K 中間子が崩壊するにはより軽いクォークに変化する必要があるが, これは弱い相互作用のみで可能である. 一方で s クォークの生成については  $s$  と  $\bar{s}$  が同じだけ同時に生成されることは強い相互作用によって可能である. 以上のことから新しい量子数である**ストレンジネス**を定義できる. ストレンジネスは  $\bar{s}$  の数から  $s$  の数を引いたものである. ストレンジネスは強い相互作用では保存するが, 弱い相互作用では保存しない.

以上のことを振り返って  $\phi$  中間子の崩壊を考える.  $\phi$  中間子は  $s\bar{s}$  状態であり, 強い相互作用によって  $u\bar{u}$  対または  $d\bar{d}$  対が生成されることで二つの K 中間子が発生する. 以下に崩壊のダイアグラムを示す.

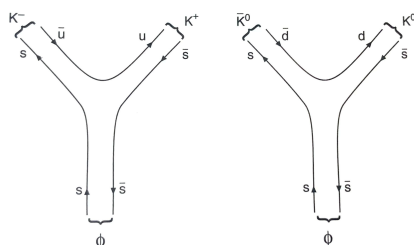


図 6  $\phi$  中間子の崩壊のダイアグラム

この崩壊において崩壊前と崩壊後の質量差が小さいことから、崩壊前と崩壊後での運動状態の変化が小さい(崩壊の位相空間が小さい)ので寿命が長く共鳴の幅は小さい。

$\phi$  中間子はほとんどの場合で K 中間子に崩壊するが、 $\pi$  中間子といったより軽い中間子に優先的に崩壊しないことについて議論する。実際に  $\pi$  中間子に崩壊する場合、 $s, \bar{s}$  が消滅したのちに 2,3 個のクォーク-反クォーク対が生成される必要がある。QCD によるとこの過程は以下のように少なくとも 3 つのグルーオンによる仮想中間状態を経て起きるが、これは 1 つのグルーオンの交換のみで起きる K 中間子の崩壊に比べ起きにくいことが経験則的に知られている。

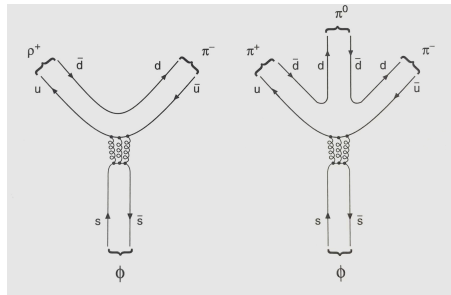


図 7  $\phi$  中間子から  $\pi$  中間子へ崩壊するダイアグラム

このようにクォーク線が途切れないような崩壊が優先的に起きることが **OZI 則**として知られている。

次に  $u, d, s$  以外のクォークが関わる共鳴について考える。  $J/\psi$  共鳴と名付けられた共鳴は 3097MeV において幅 87keV という極めて狭い共鳴であり、 $c\bar{c}$  対であると考えられる。OZI 則によると  $J/\psi$  は二つの  $c$  クォークを含む中間子 (D 中間子, 約 1800MeV) に優先的に崩壊するが、 $\phi$  と異なりこの崩壊はエネルギーの条件により禁止される。  $J/\psi$  共鳴より数 100MeV 程度高いエネルギーでも共鳴が見つかり  $\psi', \psi''$  と名付けられた。これらは  $c\bar{c}$  の励起状態であると解釈された。  $c\bar{c}$  においては  $J/\psi$  よりエネルギーの低い状態  $\eta_c$  が存在するが量子数が  $0^-$  であり  $e^-e^+$  衝突実験においては生成されない。

9.46GeV において幅 52keV の共鳴が見つかり、 $\Upsilon$  共鳴と名付けられた。これは  $b$  クォークを含む状態であり、幅の狭さから予想される通り長い寿命を持つ。

$t$  クォークについては  $e^-e^+$  衝突実験ではなく、陽子-反陽子衝突実験によって発見された。  $t$  クォークの質量は  $173.8 \pm 5.2\text{GeV}$  である一方で  $e^-e^+$  衝突のエネルギーの最高値は約 172GeV であり、 $e^-e^+$  衝突では現状  $t$  クォークを作れない。

$\sqrt{s} = 91.2\text{GeV}$  において幅が 2490MeV の共鳴が観測された。この共鳴はクォーク対やレプトン対に崩壊するが、この性質から弱い相互作用のベクトルボソンである  $Z^0$  の実粒子であると考えられる。

### 9.3. ハドロンの非共鳴生成

クォーク-反クォーク対は共鳴以外の領域でも生成される。この節ではこのような非共鳴生成について議論する。はじめに生成されたクォークや反クォーク (プライマリークォーク) にさらに別のクォーク-反クォーク対が加わることでハドロンを生成するが、これをクォークの**ハドロン化**という。なお、この時生成されるクォークは重心系のエネルギーより小さな質量のもののみである。

ハドロンの生成において、はじめにクォーク-反クォーク対が生成されるため、断面積はクォーク-反クォーク対の生成断面積の和となる。この断面積はミューオン対の生成断面積と同様に計算できるが、電荷の部分のみ

異なる。クォークの電荷  $z_f$  は  $z_f = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$  であり、遷移行列要素は  $z_f^2 \alpha^2$  に比例する。クォークと反クォークはそれぞれ色と反色を持っているため、クォーク-反クォーク対が生成される時は色の種類の数の状態を取りうる。色の数を  $n_c$  とおくと断面積は以下のように表せる。

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q_f \bar{q}_f) = n_c z_f^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (16)$$

この式を変形すると断面積の比  $R$  は

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = \sum_f \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_f \bar{q}_f)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = n_c \sum_f z_f^2 \quad (17)$$

となる。f についての和は重心エネルギーの大きさによって変化し、反応に寄与するクォークのフレーバーの和のみをとる。以下に  $R$  と  $\sqrt{s}$  の関係を示す。

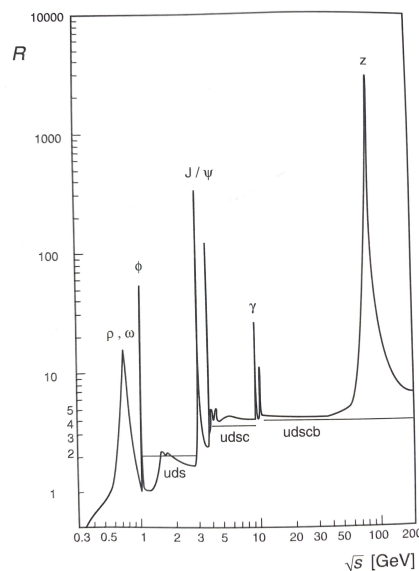


図8  $R$  と  $\sqrt{s}$  の関係

この図によると  $R$  は共鳴部分を除き  $\sqrt{s}$  が大きくなると階段状に大きくなるのがわかる。これは式 (17) の和の取り方を振り返ると、あるエネルギーのしきい値を超えると新たなフレーバーのクォークが寄与するということから理解できる。このデータからクォークの電荷および色の数がわかる。

$$\begin{aligned} R &= n_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = n_c \frac{2}{3} & (u, d, s) \\ R &= n_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = n_c \frac{10}{9} & (u, d, s, c) \\ R &= n_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = n_c \frac{11}{9} & (u, d, s, c, b) \end{aligned} \quad (18)$$

この式と図8を見比べると  $n_c = 3$  とわかる。

#### 9.4. グルーオンの放射

$e^+e^-$  散乱によってグルーオンの存在を実験的に検出し、強い相互作用の結合定数  $\alpha_s$  を測定できる。グルーオンの存在は陽子の深非弾性レプトン散乱によって示唆された。構造関数  $F_2$  の  $x$  についての積分値が実験に



比べて小さかったため、陽子内の運動量の寄与としてクォーク以外の粒子があると考えられた。その粒子は電荷を持たず、弱い相互作用もしないという性質を持ち、のちにこの粒子がグルーオンであるとわかった。8.4章において  $\alpha_s$  は  $F_2$  のスケーリングの破れから計算できた。

$\alpha_s$  は**ジェット**の解析によって直接的に測定ができる。高エネルギーにおいては生成するハドロンは互いに反対方向に放出されるジェットによって現れる。このようなジェットはプライマリークォーク、反クォークがハドロン化することによって発生する。

一方でグルーオンが寄与するような高次の過程も発生する場合がある。例えばエネルギーの大きいグルーオンが放射された場合、それが第3のハドロンジェットとして現れる。このような過程の確率は結合定数  $\alpha_s$  によって決定される。つまり2ジェットと3ジェットのイベント回数の比較によって  $\alpha_s$  が得られる。実際に  $\alpha_s$  を異なる重心エネルギーで観測することによって8章の議論から得られた式

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (19)$$

のように  $Q^2 = s/c^2$  が増加すると  $\alpha_s$  は減少することがわかった。

## 付録 A. 共鳴状態と非相対論的なブライト-ウィグナーの公式の導出<sup>\*2</sup>

散乱問題は以下のような球対称ポテンシャル  $V(r)$  の下での一体系のシュレディンガー方程式に帰着できる。

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) u_l(r) = E u_l(r) \quad (20)$$

この式について  $V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$  を有効的なポテンシャル  $V_{\text{eff}}(r)$  と見做せる。このポテンシャルは  $l \neq 0$  で以下のような形をしており、正のエネルギーの束縛状態のようなものを持つ。この状態を準束縛状態、または共鳴状態といい有限な寿命を持つ。

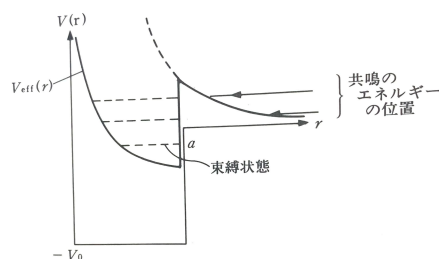


図9  $V(r)$  に井戸型ポテンシャルを適用した時の  $V_{\text{eff}}(r)$  と共鳴状態

次にこのような共鳴状態付近での断面積のエネルギー依存性を確認する。入射波  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  は以下のように展開できる。この展開を部分波展開という。

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (21)$$

<sup>\*2</sup> 参考文献: 猪木慶治 河合光, 量子力学 II, 2018, 講談社

なお  $j_l(kr), P_l(\cos \theta)$  はそれぞれ球ベッセル関数, ルジャンドル多項式である. 球ベッセル関数は  $r \rightarrow \infty$  での漸近形として  $j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) = -\frac{1}{2ikr}(e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})})$  となる. この式について第一項目は内向波 (入射波), 第二項目は外向波 (散乱波) と見做せる. ここでポテンシャルがある場合を考えると, 散乱波がポテンシャルの影響で変化すると考えられるので, 波動関数を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left(-\frac{1}{2ikr}\right) [e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}] P_l(\cos \theta) \\ &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos \theta) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \end{aligned} \quad (22)$$

$S_l$  を S 行列という (行列という名前がついているが, ここでは行列ではない). 弾性散乱を仮定するとフラックスの保存より  $|S_l| = 1$ . なお, 二つ目の等号において  $0 = -e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$  を [ ] 中に代入して計算した. 式 (22) より部分波の散乱振幅  $f_l(\theta)$  がわかる.

$$f(\theta) = \sum_l f_l(\theta) \quad (23)$$

$$f_l(\theta) = (2l+1) i^l \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos \theta) \quad (24)$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$  よりルジャンドル多項式の直交性  $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$  を用いると

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \text{Re}(S_l)) \quad (25)$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$  を代入すると

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (26)$$

式 (26) より  $\delta_l = \frac{(2n+1)\pi}{2}$  で  $\sigma$  は極大値を取る.  $\delta_l$  は  $k$  に依存するが,  $k$  が大きくなるほど  $\delta_l$  が大きくなるため  $\cot \delta_l = 0$  となる  $E$  を  $E = E_R$  とすると

$$\cot \delta_l \approx -c(E - E_R) \quad (27)$$

となる. ( $c > 0$ ) この時

$$\frac{S_l - 1}{2ik} = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} = \frac{1}{k} \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l - i \sin \delta_l} = \frac{1}{k} \frac{1}{\cot \delta_l - i} \quad (28)$$

よりこれに式 (27) を代入すると

$$\frac{S_l - 1}{2ik} = -\frac{1}{k} \frac{1}{[-c(E - E_R) - i]} = -\frac{\frac{1}{c}}{k[E - E_R + \frac{i}{c}]} \quad (29)$$

ここで幅  $\Gamma$  を  $-c = -\frac{2}{\Gamma}$  とおくと  $\sum_l \sigma_l = \sigma$  として  $\sigma_l = 4\pi(2l+1) \left| \frac{S_l - 1}{2ik} \right|^2$  より

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \quad (30)$$

と求まる。これが非相対論的な量子力学から導かれるブライト-ウィグナーの公式であり、(12)式においてスピ  
ンが0の場合に対応している。換算波長 $\lambda$ と波数 $k$ の関係は $\lambda = \frac{1}{k}$ である。式(30)および式(12)において  
 $E = E_R \pm \Gamma/2$ とすると断面積は $E = E_R$ の極大値の半分となっており、 $\Gamma$ は確かにエネルギーの幅としての  
意味を持っている。

式(30)の因子 $\frac{\Gamma}{(E - E_R)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$ について $\Gamma \rightarrow 0$ の極限を考える。この極限は次のように与えられること  
が知られている。

$$\frac{\epsilon}{(E - E_R)^2 + \epsilon^2} \rightarrow 2\pi\delta(E - E_R) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (31)$$

つまり幅が0の時は断面積はデルタ関数になることがわかる。一方で $\Gamma\tau = \hbar$ より $\Gamma = 0$ なら寿命は無限大と  
なり崩壊しないことがわかる。このような状態は束縛状態でありエネルギーと断面積の関係を束縛状態まで含  
んでプロットすると以下の図10のような形になる。

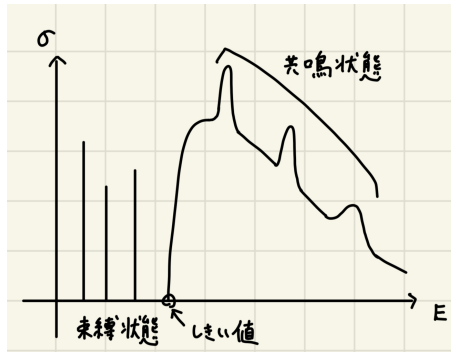


図10 エネルギーと断面積の関係

図10におけるしきい値は図9における $E = 0$ に対応している。実際は基底状態以外の束縛状態は有限時間  
で基底状態に落ち込むため真にデルタ関数となるのは基底状態のみである。

また式(30)について次のような観点で理解することもできる。エネルギーを複素平面に拡張して考えると  
この式は $E = E_R \pm i\frac{\Gamma}{2}$ に極を持っている。エネルギーが $E = E_R \pm i\frac{\Gamma}{2}$ として、時間発展演算子 $e^{\frac{Ht}{\hbar}}$ に代入  
するとそれぞれ $\exp(\frac{-iE_R t}{\hbar} \pm \frac{\Gamma t}{2\hbar})$ となるが減衰する解となる $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ が共鳴状態を表した物理的なエ  
ネルギー状態であると見做せる。またこの時間発展の因子の表式から $\Gamma t = \hbar$ となる時に絶対値が $t = 0$ と比  
べてちょうど $\frac{1}{e}$ 倍になっていることから $t = \tau = \hbar/\Gamma$ が寿命になっていることがわかる。束縛状態において  
は $\Gamma = 0$ より複素平面上の極が実軸上にある場合に対応している。

## 付録 B. 古典力学における強制振動とのアナロジー

減衰を伴う強制振動の運動方程式は以下のようにかける。

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega t \quad (32)$$

この運動方程式の解は特殊解と右辺を0として解いた一般解があるが、この振動は減衰を伴うため十分時間が  
経った時のことを考えると、特殊解のみを考えれば良いことがわかる。 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ を式(32)に代

入すると以下の 2 式が得られる.

$$-A\omega^2 + B\frac{1}{\tau}\omega + A\omega_0^2 = \frac{f}{m} \quad (33)$$

$$-B\omega^2 - A\frac{1}{\tau}\omega + B\omega_0^2 = 0 \quad (34)$$

この式を  $A, B$  について解くと次のように得られる.

$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \frac{f}{m} \quad (35)$$

$$B = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \frac{f}{m} \quad (36)$$

よって

$$x(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \frac{f}{m} \cos \omega t + \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \frac{f}{m} \sin \omega t \quad (37)$$

と求まる. これを変形すると

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \frac{f}{m} \cos(\omega t + \alpha) = x_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (38)$$

なお,  $\tan \alpha = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$  である. この振動について, 振幅  $x_0$  の自乗は断面積と同じく面積の次元を持つので, これについてブライト-ウィグナーの公式との関係を見る.  $E = \hbar\omega, E_0 = \hbar\omega_0, \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$  より

$$x_0^2 = \frac{\hbar^4}{(E^2 - E_0^2)^2 + (E\Gamma)^2} \frac{f^2}{m^2} \quad (39)$$

ここは  $E \simeq E_0$  のみを注目しているので  $E + E_0 \simeq 2E$  として変形すると

$$x_0^2 = \frac{\hbar^4/4E^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{f^2}{m^2} \quad (40)$$

$E, \Gamma$  は考える範囲においては定数と見做せるので

$$x_0^2 = \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\hbar^4}{4E^2} \frac{f^2}{m^2} \propto \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{1}{s} \quad (41)$$

これは確かにブライト-ウィグナーの公式に対応している. またこの表式は断面積の  $1/s$  則も表している.