

第3章 原子核の安定性

疋田純也

2021年5月5日

1 原子核の崩壊

原子核は同位体や同重体などを含めると無数に存在する。しかし図1のように安定な原子核は限られた数しか存在せず、不安定な原子核は特定のプロセスを経て安定な原子核に変化していく。不安定な原子核が安定な原子核へと変化していくプロセスには以下のようなものがある：

陽子が多くて不安定な場合： β^+ 崩壊、電子捕獲

中性子が多くて不安定な場合： β^- 崩壊

元の原子核が重すぎる場合： α 崩壊、核分裂

原子核が励起状態にある場合： γ 崩壊、粒子放出

安定な原子核とはそれ以上崩壊^{*1}しないという意味で安定であり、物理的には原子核の質量(エネルギー)が極小点を取っていることを意味する。それ故に、原子核の崩壊前後で原子の質量(エネルギー)の総和が小さくなっていることが原子核の崩壊が起きる条件となっている。



図1: 核図表^{*2}

^{*1} ある原子核がより安定な原子核に変わることを崩壊と呼んでいる。

^{*2} Wikipedia:核図表より抜粋

崩壊定数

放射性原子核が単位時間あたりに崩壊する確率を崩壊定数 (壊変定数) と呼び、これは原子核がどのくらい崩壊しているかの指標になる。式で定義すると、

$$\lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

この定義式を放射性原子核の数 N の微分方程式と見なして解くと

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

これより半減期は $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ 、寿命*3は $\tau = 1 / \lambda$ と表せることが分かる。

崩壊定数は放射能の測定により求めることができる。放射能は

$$A \equiv -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

で定義され、単位は Bq(崩壊/秒) である。寿命の短い原子核については放射能を時間の関数として測定し、式 (1) でフィッティングすることにより崩壊定数を定めることができるが、寿命が長い原子核については原子核の数も測定する必要がある。

2 β 崩壊

質量数を保存して原子番号が変わるような崩壊を β 崩壊と呼ぶ。質量数が同じ原子核 (同重体) について β 安定となる条件を考える。ヴァイツゼッカーの質量公式を考えると原子の質量は原子番号の 2 次式で表せる：

$$\begin{aligned} M(A, Z) &= \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 + \frac{\delta}{A^{1/2}} \quad (2) \\ \alpha &\equiv M_n - a_v + a_s A^{-1/3} + \frac{a_a}{4} \\ \beta &\equiv a_a + (M_n - M_p - m_e) \\ \gamma &\equiv \frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}} \end{aligned}$$

式 (2) を平方完成すると

$$M(A, Z) = \gamma \left(Z - \frac{\beta}{2\gamma} \right)^2 + \alpha A - \frac{\beta^2}{4\gamma} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

となる。ここで γ が正であることから $Z_{\min} = \beta / 2\gamma$ のときに原子質量は最小値をとることが分かる。実際の Z は自然数なので、基本的には原子番号が Z_{\min} に最も近いとき原子核は安定になると言える。ただし、後で見ると質量数が偶数の場合は δ の効果があるため単純にならない場合がある。

*3 原子核数が $1/e$ 倍になる時間を寿命と定義している。

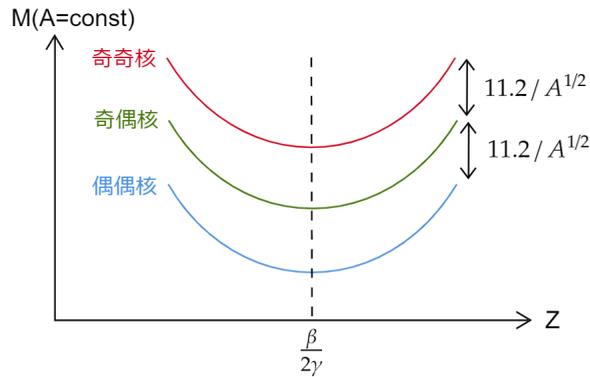
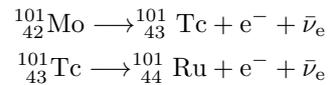


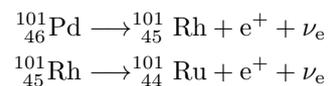
図 2: 質量数が一定の場合の原子質量の原子番号依存性

2.1 奇核の β 崩壊

質量数が 101 の同重体について具体的に見ていく。この場合、 $Z_{\min} \simeq 43.7$ より安定な原子核はルテニウム： ${}^{101}_{44}\text{Ru}$ になる。ルテニウムより多くの中性子を持つ同重体 (モリブデン Mo、テクネチウム Tc) では β^- 崩壊して中性子が陽子に変わる。その際に電子と電子反ニュートリノを放出する：



一方でルテニウムより多くの陽子を持つ同重体 (パラジウム Pd、ロジウム Rh) では β^+ 崩壊して陽子が中性子に変わる。その際に陽電子と電子ニュートリノを放出する：



β 崩壊する条件については図 4、5 をみれば明らかなように、

$$\beta^- \text{ 崩壊: } M(A, Z) > M(A, Z + 1)^{*4} \quad (3)$$

$$\beta^+ \text{ 崩壊: } M(A, Z) > M(A, Z - 1) + 2m_e \quad (4)$$

となっている。

補足：自由な陽子、中性子の β 崩壊について

自由な陽子、中性子の β 崩壊を考えると、式の上では以下のようにかける：

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (5)$$

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (6)$$

しかし、第 2 章でみた陽子と中性子の質量を思い出すと陽子の β^+ 崩壊は起こりえないことが分かる。つまり、 β^+ 崩壊は原子核内部でのみ起こりうるということが分かる。

*4 電子 (反) ニュートリノの質量は電子の質量と比べても十分小さい ($\sim 15\text{eV}/c^2$) ので無視している。

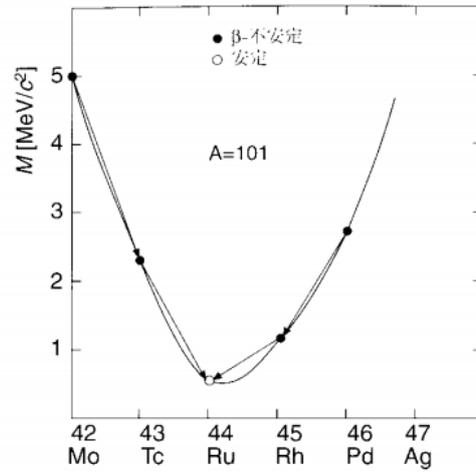


図 3: 質量数 101 の同重体の質量の放物線 *5

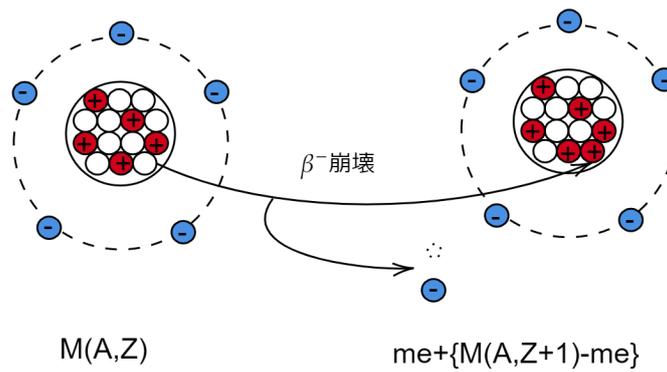


図 4: β^- 崩壊の模式図

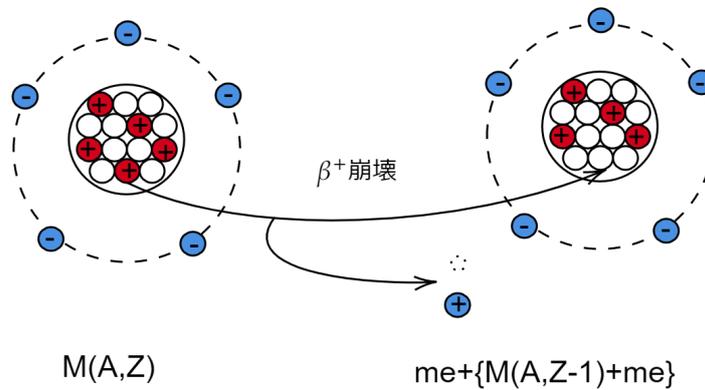


図 5: β^+ 崩壊の模式図

*5 素粒子・原子核物理入門 p28 より抜粋

2.2 偶核の β 崩壊

偶核の場合、図 2 のように奇奇核と偶偶核で放物線が異なるため、奇核の場合のように質量の極小点の一つしかないとは限らない。例えば質量数 106 の同重体 ($Z_{\min} \simeq 45.6$) の質量は図 6 のようになっており、一番安定したパラジウム Pd の他にもカドミウム Cd でも極小点となっていることが分かる。カドミウムからパラジウムへの変換は 2 重 β 崩壊によってのみ可能である：



しかし、この過程の起こる確率は非常に小さいのでカドミウムを安定な原子核と見なすことができる。

偶核においては基本的に奇奇核よりも偶偶核の方が安定であるが、軽い核の場合では安定な奇奇核も存在する。この理由について、物理的には β 崩壊により減少する対エネルギーよりも増加する非対称エネルギーの方が大きくなるためであり、幾何学的には式 (2) の γ が大きいとき Z_{\min} に近い整数が奇数の場合、そこが極小点となることがあるからである。

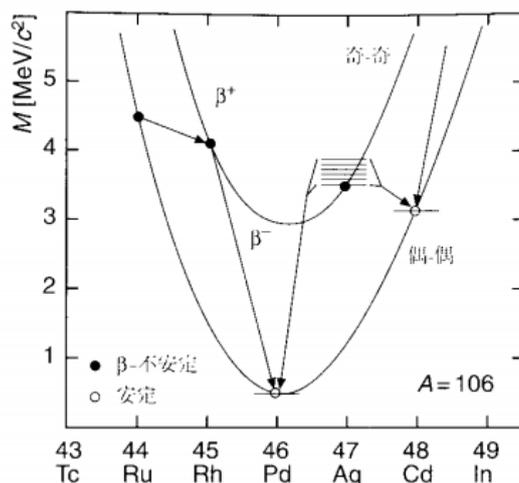


図 6: 質量数 106 の同重体の質量の放物線 *6

2.3 電子捕獲

電子の運動について、古典的には原子核の周りを惑星の衛星のように回っているが、量子力学的には電子の位置は確率的に決まる電子雲として存在するため原子核の位置にもゼロでない存在確率を持つ。そのため、電子雲中の電子が原子核中の陽子と反応することがある：



このような反応を電子捕獲という。特に重い原子核では原子核の半径が大きく電子軌道の半径は小さいので電子捕獲が起こりやすくなっている。電子は普通原子核に最も近い K 殻から捕獲され、電子捕獲が起こった後は外側の電子がより低いエネルギー準位へ落ち特性 X 線を放出する。

*6 素粒子・原子核物理入門 p29 より抜粋

電子捕獲が起きる条件は図 7 より

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + \epsilon \quad (7)$$

である。ここで ϵ は娘殻の電子雲の励起エネルギー (特性 X 線のエネルギー) である。これと β^+ 崩壊の条件式 (4) を比べると、電子捕獲では $2m_e - \epsilon$ だけ余分に運動エネルギーを使えることがわかる。これは K 電子捕獲は起こりうるが β^+ 崩壊は起こらない場合があることを意味する。

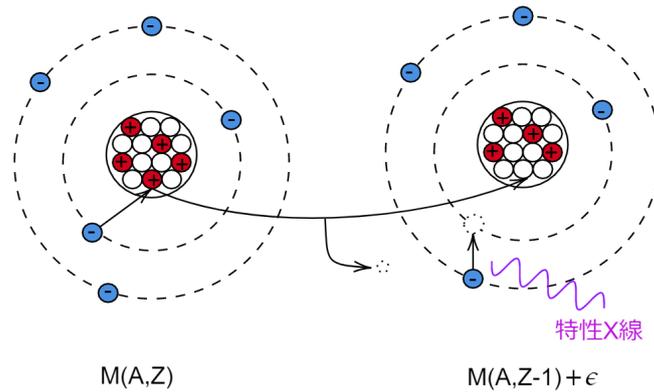


図 7: K 電子捕獲の模式図

2.4 β 崩壊の寿命

β 崩壊に対して不安定な原子核の寿命は解放されるエネルギーや親核、娘核の性質に依存し、数ミリ秒から 10^{16} 年までの値を取り得る。具体例として自由な中性子の崩壊を考える。式 (6) より解放されるエネルギーは

$$\Delta E = M_n - M_p - m_e = 939.566 - 938.272 - 0.511 \simeq 0.78 \text{ [MeV]}$$

となり、寿命は $\tau = 886.7 \pm 1.9 \text{ [sec]}$ である。

別の例として ^{40}K を考える。 ^{40}K は図 8 のように 2 種類の安定核に β 崩壊できる。約 9 割の ^{40}K はカルシウム Ca に β^- 崩壊し、残りの 1 割は電子捕獲によりアルゴン Ar の励起状態に崩壊し、 γ 崩壊して基底状態に遷移する。ごく小さい確率で β^+ 崩壊するが、これは K と Ar のエネルギー差が $2m_e$ に近く余分な運動エネルギーを持ちにくいいため、 β^+ 崩壊が起こりにくくなっていると考えられる。

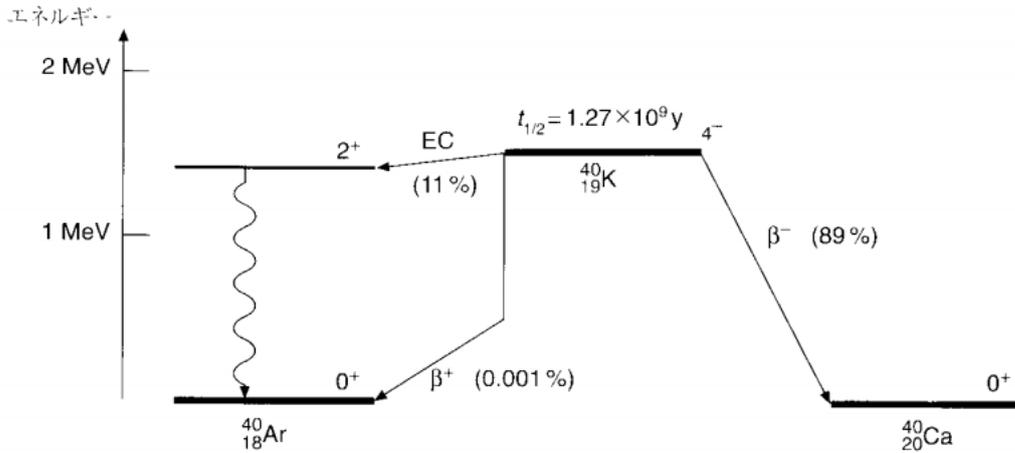


図 8: ^{40}K の β 崩壊 *7

3 α 崩壊

図 9 のように重い原子核でも核子 1 個あたり約 8MeV の結合エネルギーで束縛されているため、原子核から核子が 1 個だけ出てくることは一般にできない。しかし数個の核子が束縛された系 (原子核) が出て来る場合、系の質量欠損の分だけ系は運動エネルギーを持てるため、この崩壊はエネルギー的に可能になる。 ^4He (α 粒子) を放出する崩壊は特によく起こり α 崩壊と呼ぶ。

α 崩壊の起きる仕組みについて考える。まず多数の核子が存在する原子核内で α 粒子が形成される。そしてその α 粒子は図 10 のようなポテンシャル障壁にぶつかり、トンネル効果によって一部すり抜け α 崩壊となる。以上のことを踏まえて、 α 崩壊の崩壊定数の表式を求めると

$$\lambda = w(\alpha) \frac{v_0}{2R} T$$

となる。ここに、 $w(\alpha)$ は α 粒子が原子核の中に存在する確率、 $v_0/2R$ は α 粒子が単位時間あたりに原子核の壁にぶつかる回数、 T は α 粒子が原子核の壁を透過する確率 (透過率) である。透過率は

$$T \simeq e^{-2G}$$

と書くことができ、ガモフ因子 G は

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m|E - V(r)|} dr \simeq \frac{2\pi(Z-2)\alpha}{\beta}$$

と表すことができる (補足 A 参照)。このことから α 崩壊の寿命は e^{2G} に比例することがわかり、 $G \propto Z/\sqrt{E}$ より α 崩壊の寿命は放出される α 粒子のエネルギーに大きく影響されることがわかる。具体的には鉛より重い原子核では α 崩壊によって解放されるエネルギーが大きいため短い寿命で崩壊する一方で、 $A = 140$ ぐらいまでの軽い原子核ではエネルギー的に α 崩壊は可能であるが解放されるエネルギーが小さいため寿命が長く通常は観測されない。

*7 素粒子・原子核物理入門 p30 より抜粋

質量が大きい原子核の中には α 崩壊と β 崩壊を繰り返して安定な原子核に移行する原子核も存在する。そのような原子核の例として ^{238}U がある (図 11)。この崩壊系列中のラドン Rn の α 崩壊は人の平均的な自然放射線被曝の約 40 % に相当する。

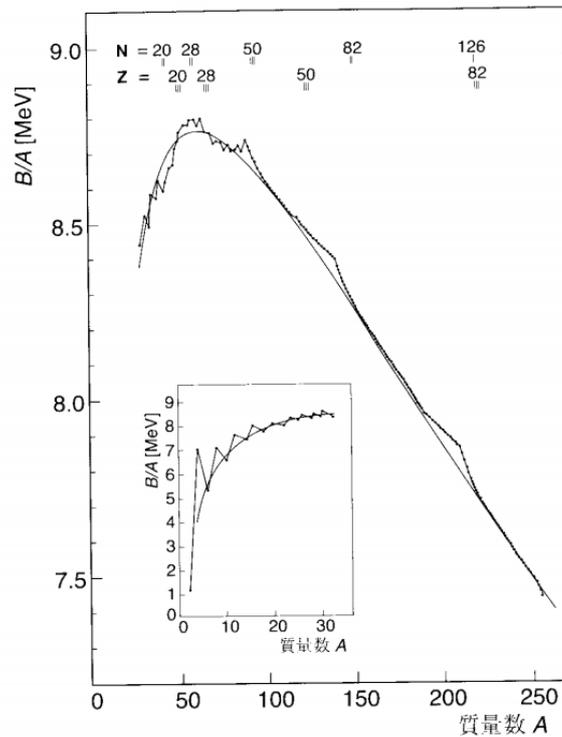


図 9: 質量数が偶数の原子核についての核子あたりの結合エネルギー *8

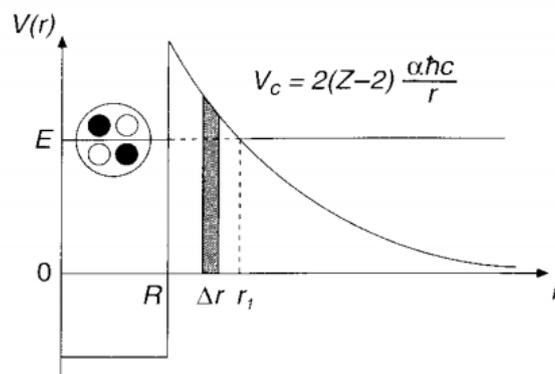


図 10: α 粒子のうけるポテンシャル *9

*8 素粒子・原子核物理入門 p18 より抜粋

*9 素粒子・原子核物理入門 p32 より抜粋

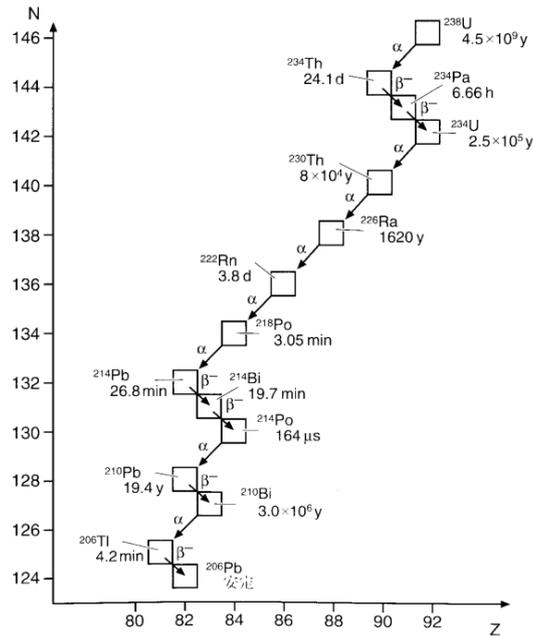


図 11: ^{238}U の崩壊系列 *10

4 核分裂

原子核の結合エネルギーは ^{56}Fe 近辺で最大となる。質量数がそれよりも大きくなるにつれて核子あたりの結合エネルギーは小さくなり、2つの原子核に分裂する自発核分裂がエネルギー的に可能になる。しかしその際に透過しなければならないポテンシャル障壁(核分裂障壁)がたいへん大きいため、一般に自発核分裂の起こる確率はたいへん小さい。

自発核分裂が起きるための条件について考える。自発核分裂が起きる際に原子核は図 13 のように球形から回転楕円体へと体積を保って変形する。このとき表面エネルギーは

$$E_s = a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right)$$

に増加し、クーロンエネルギーは

$$E_c = a_c Z^2 A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right)$$

に減少する(補足 B 参照)。従って、変形によるエネルギー変化は変形度 ϵ の(2次までの)関数として

$$\Delta E = \frac{\epsilon^2}{5} \left(2a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} \right)$$

となる。エネルギー変化が負ならばエネルギー的に安定なので自発核分裂が起きる条件は

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{2a_s}{a_c} \simeq 48 \quad (8)$$

*10 素粒子・原子核物理入門 p33 より抜粋

となる。これは核分裂障壁が消失する条件として理解される (図 12 点線部)。この条件を満たすものとしては $Z > 114, A > 270$ の原子核があるがこのような原子核は人工的に合成することでしか作れないので自然界では普通起こらない。

核分裂障壁が存在していてもウラン領域の重い原子核では障壁の大きさは 6MeV 程度であり、中性子捕獲によって原子核をより高い励起状態に遷移させることで核分裂することができる。このような過程を誘導核分裂と呼ぶ。誘導核分裂の具体例として質量数の異なるウランを比較してみる。 ^{238}U の中性子捕獲では結合エネルギーが 4.9MeV 解放されるのに対して ^{239}U の核分裂しきい値が 5.5MeV なので 0.6MeV 程度の運動エネルギーをもつ速中性子でないと誘導核分裂は起こらない。一方、 ^{235}U の中性子捕獲では結合エネルギーが 6.4MeV 解放されるのに対して ^{236}U の核分裂しきい値が 5.5MeV なのでエネルギーが低い熱中性子でも誘導核分裂を起こす。このような誘導核分裂の起こりやすさの違いは原子核に中性子が増えたときの対エネルギーの効果が大きく影響している。

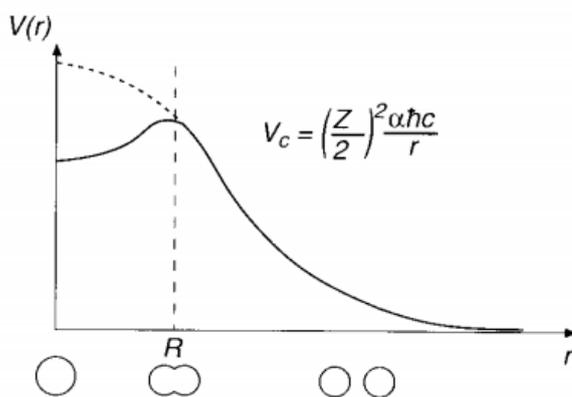


図 12: 核分裂障壁 *11

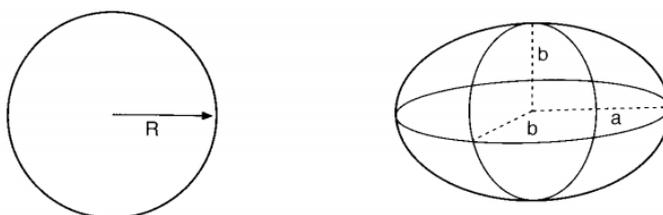


図 13: 重い原子核の変形、 $a = R(1 + \epsilon)$ 、 $b = R/\sqrt{1 + \epsilon}$ にとる *12

5 原子核の励起状態の崩壊

殻模型を用いた原子核の励起状態の理論的な記述については第 17 章、第 18 章で行うので、ここではより具体的に原子核の励起状態の遷移について見ていく。原子核の励起状態には励起エネルギーが結合エネルギーよ

*11 素粒子・原子核物理入門 p34 より抜粋

*12 素粒子・原子核物理入門 p35 より抜粋

りも低い離散状態と励起エネルギーが結合エネルギーよりも高い連続状態がある (図 14)。

離散状態では原子核は電磁波 (γ 線) を放出することでエネルギーを失いより低いエネルギー状態に遷移する。この過程を γ 崩壊と呼ぶ。このときに放出される電磁波は原子核中の陽子の分布の変動に伴う多重極放射として理解される。角運動量が l の放射における (遅延) ポテンシャルはそれぞれ

$$\phi_l(\mathbf{r}, t) = \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (-r)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left(\frac{1}{r} \int_V r'^l P_l(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}', t - r/c) d^3 \mathbf{r}' \right)$$

$$\mathbf{A}_l(\mathbf{r}, t) = \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (-r)^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left(\frac{1}{r} \int_V r'^l P_l(\cos \theta') \mathbf{i}(\mathbf{r}', t - r/c) d^3 \mathbf{r}' \right)$$

とかける。この表式より角運動量 l の電磁波について電氣的遷移 E_l ではパリティ $(-1)^l$ を持ち、磁氣的遷移 M_l ではパリティ $(-1)^{l+1}$ を持つことが分かる。このような遷移が起こるときには角運動量とパリティは保存するので、始状態と終状態が決まっているときどの多重極放射が可能か決定できる (選択則)。例として $3^+ \rightarrow 1^+$ 遷移を考える。系のパリティは変化せず、角運動量については角運動量の合成規則より $2 \leq l \leq 4$ が成り立つので許される遷移は E_2, M_3, E_4 の 3 種類である。しかし一般に高次の放射ほど遷移確率が低いため^{*13}、実際に起こる遷移のほとんどが E_2 である。また別の例として $0^+ \rightarrow 0^+$ 遷移を考えると角運動量が 0 の放射しか許されないが、そのような多重極放射は存在しないためこの遷移は γ 崩壊では起こりえない。この遷移は内部転換^{*14}や 2 光子放出、あるいは電子陽電子対生成によってのみ起こりうる。

連続状態では結合エネルギーを超えて励起しているため、核子が一つ放出されるような過程が可能になる。この過程を粒子放出という。粒子放出ではクーロン障壁の影響を受けない中性子の方が放出されやすい。このような励起は中性子捕獲や中性子散乱、または γ 線をあてることにより実現することができる。中性子に対する反応の断面積は励起エネルギーが大きくなるにつれ大きくなり、 γ 線に対する反応の断面積はあるエネルギーで大きなピーク (巨大双極子共鳴) をとることがある。

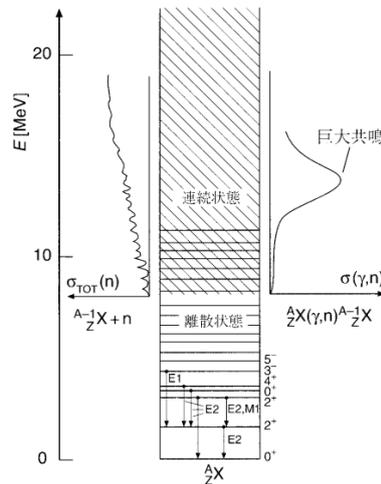


図 14: 原子核の典型的なエネルギー準位：図中の数字は角運動量、符号はパリティを表す ^{*15}

^{*13} 多重極度の高い放射でしか遷移できない状態の寿命は長くアイソマーと呼ばれる。

^{*14} 原子核の励起エネルギーを電子に受け渡し遷移する過程。多重極度が高く γ 崩壊が起こりにくい場合や原子核が重い (すなわち原子核の位置における電子の存在確率が大きい) 場合によく起こる。

^{*15} 素粒子・原子核物理入門 p36 より抜粋

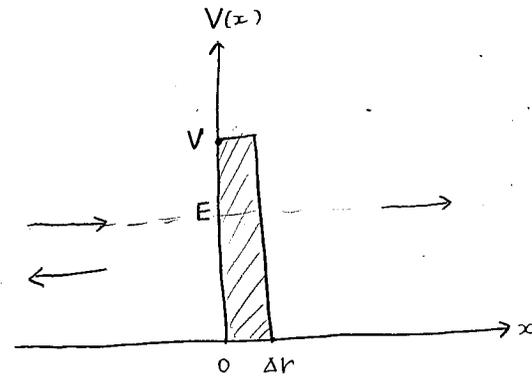
補足

A. α 粒子透過率の計算

• step 1: 薄い壁の透過率

Schrödinger Eq.:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi$$



$$\therefore \psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (x < 0) \\ C e^{kx} + D e^{-kx} & (0 < x < \Delta r) \\ F e^{ikx} & (x > \Delta r) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ k \equiv \sqrt{\frac{2m|E-V|}{\hbar^2}} \end{array} \right.$$

$x = 0, \Delta r$ での接続条件:

$$\begin{cases} A + B = C + D & \text{--- ①} \\ ik(A - B) = \kappa(C - D) & \text{--- ②} \\ C e^{k\Delta r} + D e^{-k\Delta r} = F e^{ik\Delta r} & \text{--- ③} \\ \kappa(C e^{k\Delta r} - D e^{-k\Delta r}) = ik F e^{ik\Delta r} & \text{--- ④} \end{cases}$$

$$\text{③, ④} \Rightarrow C = \frac{1 + i\frac{\kappa}{k}}{2} F e^{-k\Delta r + ik\Delta r}, \quad D = \frac{1 - i\frac{\kappa}{k}}{2} F e^{k\Delta r + ik\Delta r}$$

$$\text{①, ②} \Rightarrow A = \frac{(1 - i\frac{\kappa}{k})C + (1 + i\frac{\kappa}{k})D}{2}$$

$$\therefore T \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4E(V-E)}{4E(V-E) + V^2 \sinh^2(\kappa\Delta r)}$$

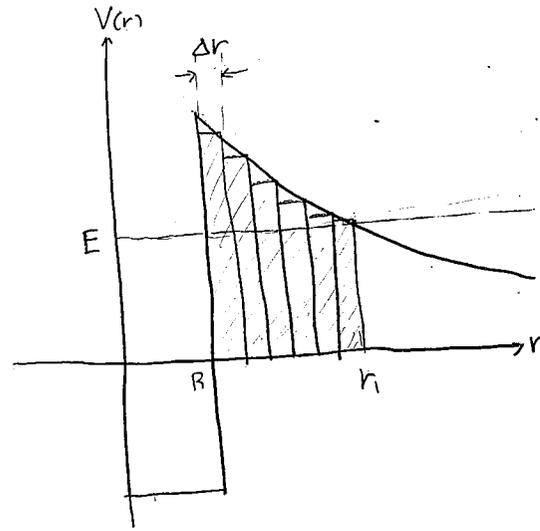
$\kappa\Delta r \gg 1$ のとき

$$T \simeq \frac{4E(V-E)}{4E(V-E) + V^2 \frac{e^{-2\kappa\Delta r}}{4}} \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2\kappa\Delta r} \sim e^{-2\kappa\Delta r}$$

step 2: ポテンシャルの壁 = 薄い壁の積み重ね

$$T = \prod_{i=1}^N T_i \quad (N: \text{壁の枚数})$$

$$\begin{aligned} &\approx \exp\left(-2 \sum_{i=1}^N \kappa \Delta h_i\right) \\ N \rightarrow \infty \downarrow &= \exp\left[-2 \int_R^{r_1} dr \sqrt{\frac{2m |E - V(r)|}{\hbar^2}}\right] \\ &\equiv e^{-2G} \end{aligned}$$



step 3: ガモフ因子の近似計算

$$V(r) = \alpha \hbar c \frac{2(Z-2)}{r}, \quad E = \alpha \hbar c \frac{2(Z-2)}{r_1}$$

$$r_1 = \alpha \hbar c \frac{2(Z-2)}{E}$$

より

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \alpha \hbar c \cdot 2(Z-2)} \cdot \int_R^{r_1} dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}$$

$$= \sqrt{\dots} \cdot 2\sqrt{r_1} \int_0^{\theta_R} d\theta \cos\theta \sin\theta \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}$$

$$= \sqrt{\dots} \cdot 2\sqrt{r_1} \int_0^{\theta_R} d\theta \cdot \sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{r_1} \int_0^{\theta_R} d\theta (1 - \cos 2\theta)$$

$$= \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{r_1} \left(\cos^{-1} \frac{R}{r_1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{r_1}} \sqrt{1 - \frac{R}{r_1}} \right) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta_R$$

$r_1 \gg R$

$$\approx \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{r_1} \cdot \cos^{-1} 0$$

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

$$\therefore G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \alpha C \cdot 2(Z-2) \cdot \sqrt{\frac{2m}{E}} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot (Z-2) \cdot \alpha}{v/c} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot (Z-2) \cdot \alpha}{\beta}$$

B 変形によるエネルギー変化

・表面エネルギー

表面積:

$$y_+(x) = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$S = \int_{-a}^a 2\pi y_+(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy_+}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \left\{ b^2 + ab \frac{\sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \right\}$$

$$= 2\pi R_0^2 \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \sqrt{1+\varepsilon} \cdot \frac{\sin^{-1} e}{e} \right)$$

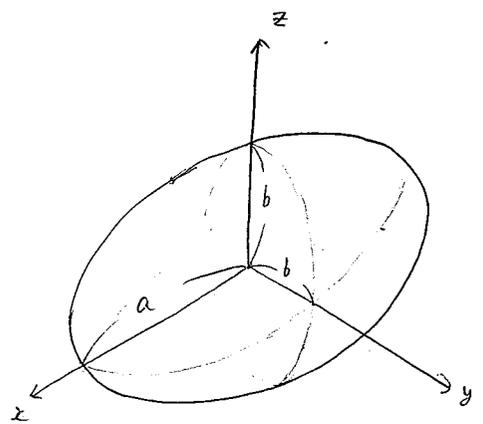
$$= 2\pi R_0^2 \left\{ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{e^2}{6} + \frac{3}{40} e^4\right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= 2\pi R_0^2 \left\{ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{13}{40} \varepsilon^2\right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= 2\pi R_0^2 \left\{ 2 + 0 \cdot \varepsilon + \left(1 - \frac{13}{40} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \varepsilon^2 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow E_s = a_s A^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)$$



$$\begin{cases} a = R_0(1+\varepsilon) \\ b = \frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \end{cases}$$

$$e \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^3}}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots$$

クーロンエネルギー

step 1: 一様に帯電した楕円体内部のポテンシャルの導出

一様電荷密度: ρ

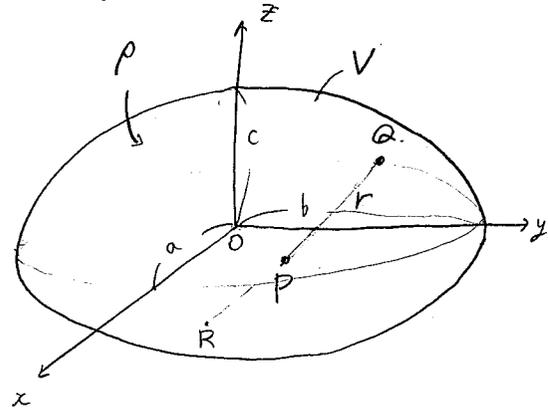
楕円体: $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$

$P: (x, y, z), Q: (x', y', z')$

点Pでのポテンシャル:

$$\phi(P) = \iiint dx' dy' dz' \cdot \frac{\rho}{r}$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$



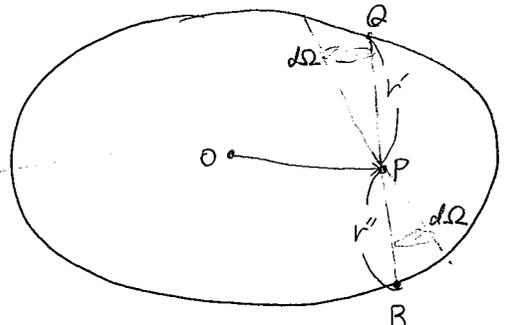
点Pを中心とした球座標に変換:

$$\phi(P) = \int d\Omega \int r^2 dr \cdot \frac{\rho}{r}$$

$$= \rho \int d\Omega \cdot \frac{1}{2} \left[\int_0^{r'} r dr + \int_0^{r''} r dr \right]$$

← 積分可能にするため、軌径積分を2通りに計算

$$= \frac{\rho}{4} \int d\Omega \left[r'^2(\theta, \phi) + r''^2(\theta, \phi) \right]$$



ここで、 r', r'' は $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$ の解となる:

$$\frac{(x + r \sin\theta \cos\phi)^2}{a^2} + \frac{(y + r \sin\theta \sin\phi)^2}{b^2} + \frac{(z + r \cos\theta)^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\phi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right) r^2 + 2 \cdot \left(\frac{x \sin\theta \cos\phi}{a^2} + \frac{y \sin\theta \sin\phi}{b^2} + \frac{z \cos\theta}{c^2} \right) r + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0$$

L

M

N

$$\Rightarrow Lr^2 + 2Mr + N = 0$$

解と係数の関係.

$$\text{よて, } r'^2 + r''^2 = (r' + r'')^2 - 2r'r'' = \left(\frac{2M}{L}\right)^2 - 2 \cdot \frac{N}{L}$$

これを代入して.

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \frac{\rho}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(\frac{4M^2}{L^2} - 2 \frac{N}{L} \right) \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left[\frac{1}{L} - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2\sin^2\theta \cos^2\phi}{La^4} \right) x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{2\sin^2\theta \sin^2\phi}{Lb^4} \right) y^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2\cos^2\theta}{c^4} \right) z^2 \right] \end{aligned}$$

$$\equiv V_0 - V_1 x^2 - V_2 y^2 - V_3 z^2$$

ここで、ポテンシャルの対称性より、クロスターム (xy, yz, zx の項) がゼロになることを用いた。

V_1, V_2, V_3 について.

$$V_1 = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{V_0}{a} \right), \quad V_2 = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{V_0}{b} \right), \quad V_3 = -\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{V_0}{c} \right)$$

であることがわかるので、 V_0 のみ計算すればよい。

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \frac{1}{\frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\phi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}} \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\underbrace{\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right)}_{A^2(\theta)} \cos^2\phi + \underbrace{\left(\frac{\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right)}_{B^2(\theta)} \sin^2\phi} \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{1}{A^2(\theta)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\tan\phi) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \tan^2\phi} \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{1}{A^2(\theta)} \left[\frac{A(\theta)}{B(\theta)} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \tan\phi \right) \right]_{\tan\phi=0}^{\tan\phi=\infty} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \cos^2\phi + \sin^2\phi \\ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta &\rightarrow 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \end{aligned} \right.$$

$$= 2\pi\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}}$$

$$= 2\pi\rho abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2 \tan^2\theta} \sqrt{b^2 + c^2 \tan^2\theta}} \cdot \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

$$c \tan\theta = \sqrt{\delta}$$

$$= 2\pi\rho abc \int_0^{\infty} \frac{d\delta}{2\sqrt{\delta}} \cdot \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{a^2 + \delta} \sqrt{b^2 + \delta} \sqrt{c^2 + \delta}}$$

$$\therefore V_0 = \pi\rho abc \int_0^{\infty} \frac{d\delta}{\sqrt{(a^2 + \delta)(b^2 + \delta)(c^2 + \delta)}}$$

また、

$$V_1 = \pi\rho abc \int_0^{\infty} \frac{d\delta}{(a^2 + \delta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(b^2 + \delta)(c^2 + \delta)}}$$

$$V_2 = \pi\rho abc \int_0^{\infty} \frac{d\delta}{(b^2 + \delta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(c^2 + \delta)(a^2 + \delta)}}$$

$$V_3 = \pi\rho abc \int_0^{\infty} \frac{d\delta}{(c^2 + \delta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(a^2 + \delta)(b^2 + \delta)}}$$

となり、求めるポテンシャルは

$$\Phi(x, y, z) = \pi\rho abc \int_0^{\infty} d\delta \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \delta} - \frac{y^2}{b^2 + \delta} - \frac{z^2}{c^2 + \delta}\right) \frac{1}{\sqrt{(a^2 + \delta)(b^2 + \delta)(c^2 + \delta)}}$$

step 2. クーロンエネルギーの導出.

体積 V , 一様電荷密度 ρ のクーロンエネルギーは一般に

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V d^3x \cdot \rho \Phi(x)$$

で与えられる。今、

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \right\}$$

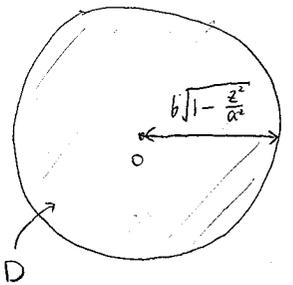
なので、step 1 のポテンシャルの表式を用いて、

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{\pi \rho^2}{2} \cdot ab^2 \left[\int_V d^3r \int_0^\infty d\sigma \cdot \frac{1}{(b^2 + \sigma) \sqrt{a^2 + \sigma}} \right. \\
&\quad - \int_V d^3r (x^2 + y^2) \cdot \int_0^\infty d\sigma \cdot \frac{1}{(b^2 + \sigma)^3 \sqrt{a^2 + \sigma}} \\
&\quad \left. - \int_V d^3r z^2 \int_0^\infty d\sigma \cdot \frac{1}{(b^2 + \sigma) (a^2 + \sigma)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&\equiv \frac{\pi \rho^2}{2} ab^2 \cdot (I_1 \cdot I_2 - I_3 I_4 - I_5 I_6)
\end{aligned}$$

各積分 I を変形度 ε の2次まで展開する。

$$\bullet I_1 \equiv \int_V d^3r = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\because \text{体積は一定})$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_2 &\equiv \int_0^\infty d\sigma \cdot \frac{1}{(b^2 + \sigma) \sqrt{a^2 + \sigma}} \\
&= \int_0^1 \frac{a^2 d\eta}{\eta^3} \cdot \frac{1}{(b^2 - a^2 + \frac{a^2}{\eta^2}) \cdot \frac{a}{\eta}} \\
&= \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{d\eta}{1 - \lambda^2 \eta^2} \quad \begin{array}{l} \ast a^2 + \sigma = \frac{a^2}{\eta^2} \rightarrow \begin{cases} d\sigma = -2a^2 \frac{d\eta}{\eta^3} \\ \sigma | 0 \rightarrow \infty \\ \eta | 1 \rightarrow 0 \end{cases} \\ \ast \lambda^2 \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} = 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{array} \\
&= \frac{2}{a} \int_0^1 d\eta \cdot \left[1 + \lambda^2 \eta^2 + \lambda^4 \eta^4 + \mathcal{O}(\lambda^6) \right] \\
&= \frac{2}{a} \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^4}{5} \right) + \mathcal{O}(\lambda^6) \\
&= \frac{2}{R} \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \left(1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{5} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \frac{2}{R} (1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \left(1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{5} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \frac{2}{R} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\bullet I_3 &\equiv \int_V d^3r (x^2 + y^2) \\
&= \int dz \cdot \iint_D dx dy \cdot (x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

$$\ast D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq b^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \right) \right\}$$

$$= \int_{-a}^a dz \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}} 2\pi r dr \cdot r^2$$

* 極座標變換:

$$= 2\pi \cdot \int_{-a}^a dz \cdot \frac{1}{4} b^4 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^2$$

$$= \pi b^4 \cdot \int_0^a dz \cdot \left(1 - \frac{2}{a^2} z^2 + \frac{z^4}{a^4}\right)$$

$$= \frac{8}{15} \pi R^5 \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$= \frac{8}{15} \pi R^5 (1 - \varepsilon + \varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\cdot I_4 \equiv \int_0^\infty d\delta \frac{1}{(b^2 + \delta)^3 \sqrt{a^2 + \delta}}$$

$$= \frac{2}{a^3} \int_0^1 d\eta \cdot \frac{\eta^2}{(1 - \lambda^2 \eta^2)^2}$$

$$= \frac{2}{R^3} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{5} \varepsilon + \frac{51}{35} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{2}{R^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon^2}{7} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\cdot I_5 \equiv \int_V d^3k \cdot z^2$$

$$= \int dz \cdot z^2 \iint_D dx dy$$

$$= 2\pi b^2 \int_0^a dz \left(z^2 - \frac{z^4}{a^2} \right)$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 \cdot (1 + \varepsilon)^2$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)$$

$$\cdot I_6 \equiv \int_0^\infty d\delta \cdot \frac{1}{(b^2 + \delta)(a^2 + \delta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{a^3} \int_0^1 d\eta \cdot \frac{\eta^2}{1 - \lambda^2 \eta^2}$$

$$= \frac{2}{R^3} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} \varepsilon + \frac{3}{35} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{2}{R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \varepsilon + \frac{2}{7} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

以上より

$$I_1 I_2 - I_3 I_4 - I_5 I_6$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{2}{R} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} \right) - \frac{8}{15} \pi R^5 (1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \frac{2}{R^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon^2}{7} \right) - \frac{4}{15} \pi R^5 (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot \frac{2}{R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \varepsilon + \frac{2}{7} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{8}{15} \pi R^2 \left\{ 5 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{105} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15} \varepsilon - \frac{19}{105} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\}$$

$$= \frac{32}{15} \pi R^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)$$

従って、クーロンエネルギーは、

$$E_c = \frac{\pi}{2} \left(\frac{ze}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right)^2 \cdot R^3 \cdot \frac{32}{15} \pi R^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{(ze)^2}{R} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)$$