

課題研究 P3 理論ゼミ

第 5 章 原子核の幾何的な形

加須屋春樹

2016 年 5 月 10 日

原子核はどのくらいの大きさか、どのような形をしているのか。

このようなことを知るには例えば陽子や α 粒子を原子核にぶつけて散乱を測定すればいい。しかしそのような実験から詳細な情報を得るのは難しい。その理由は第 1 に陽子や α 粒子はそれ自身拡がりを持っているため散乱断面積は標的だけでなく入射粒子の構造をも反映してしまう、第 2 に標的との間には電磁的な相互作用だけでなく核力が働くためその相互作用は複雑であるから。

小さな物体を研究するには電子散乱が適している。なぜなら電子は内部構造を持たない点状の粒子と考えられており、原子核と電子の間の相互作用はよくわかっている電磁相互作用によって起こるものであるから。また電磁相互作用の結合定数 α は 1 よりずっと小さいので高次の補正はわずかししか効かない。

5.1 電子散乱の運動学

電子の静止質量は小さい ($m_e c^2 \simeq 0.511[\text{MeV}]$) ので、散乱実験における運動は相対論的に扱う必要がある。古典力学では標的が入射粒子に比べてずっと重い場合、散乱の前後で入射粒子のエネルギーは変化しないとしてよい。相対論でもこのようなことは言えるだろうか。

4 元運動量 p の電子が 4 元運動量 P の原子核によって弾性散乱される場合を考える。我々が知っているのは 4 元運動量の保存:

$$p + P = p' + P' \quad (1)$$

とローレンツ不変の式:

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad (2)$$

$$P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad (3)$$

である。

さて、目標は散乱前後の電子のエネルギーの間の関係をみつけることである。まず (1) を自乗して

$$p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2 \quad (4)$$

(2),(3) を用いれば

$$p \cdot P = p' \cdot P' \quad (5)$$

となる。たいていの場合、反跳を受けた粒子は測定されず、散乱された電子のみが測定される。そこで (1) より P' を消去して

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (6)$$

を得る。実験室系で標的は衝突前には静止しているとして、4 元運動量はそれぞれ次のようになる。

$$p = (E/c, \mathbf{p}), \quad p' = (E'/c, \mathbf{p}'), \quad P = (Mc, \mathbf{0}), \quad P' = (E'_P/c, \mathbf{P}'). \quad (7)$$

これらを用いて (6) から

$$EMc^2 = E'E - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta c^2 + E'Mc^2 - m_e^2 c^4 \quad (8)$$

が得られる。ここで \mathbf{p} と \mathbf{p}' の成す角 (散乱角) を θ とした。ここまでは厳密な計算。ここで $m_e^2 c^4$ を無視し、 $E \approx |\mathbf{p}|c$, $E' \approx |\mathbf{p}'|c$ として計算してもよいが、折角なのでこのまま厳密に計算を進める。 $e \equiv E/Mc^2$, $e' \equiv E'/Mc^2$, $s \equiv m_e/M$ と無次元化して

$$e = e'e - \sqrt{e^2 - s^2} \sqrt{e'^2 - s^2} \cos \theta + e' - s^2$$

$$\therefore \{(e+1)^2 - (e^2 - s^2) \cos^2 \theta\} e'^2 - 2(e+1)(e+s^2)e' + (e+s^2)^2 + (e^2 - s^2)s^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (9)$$

よって

$$e' = \frac{(e+1)(e+s^2) \pm \sqrt{(e+1)^2(e+s^2)^2 - \{(e+1)^2 - (e^2 - s^2) \cos^2 \theta\} \{(e+s^2)^2 + (e^2 - s^2)s^2 \cos^2 \theta\}}}{(e+1)^2 - (e^2 - s^2) \cos^2 \theta} \quad (10)$$

となる。ただし複合は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ のとき $+$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ のとき $-$ をとる。 $s = 0$ とすると簡単になって

$$e' = \frac{e}{1 + e(1 - \cos \theta)} \quad (11)$$

$$\therefore E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2 \cdot (1 - \cos \theta)} \quad (12)$$

このように弾性散乱では散乱された電子の散乱角 θ とエネルギー E' の間には 1 対 1 の関係が成り立つ。なお、電子と原子核の散乱では標的が陽子 1 個であっても $s \approx 1/1800$ であるから (10) と (11) はほぼ等しい結果を与える。

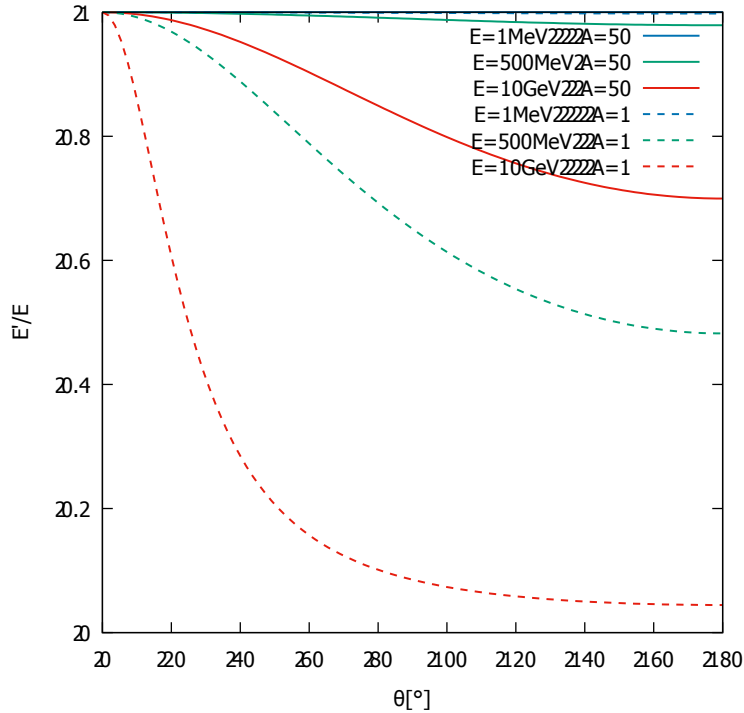


図 1: E'/E の角度依存性

図から分かるように、古典論の場合と異なり、 $m_e \ll M$ であっても E' と E が大きく異なることがありうる。すなわち相対論では、入射粒子の静止質量を含む全エネルギーと比べて標的粒子の全エネルギーがずっと大きい場合に $E \approx E'$ となる。相対論ではエネルギーと質量は等価であり、この結果はもっともである。

5.2 ラザフォードの散乱断面積

電子と原子核の散乱における断面積は相対論的量子力学によって正確に記述される。しかしまずは非相対論的に、スピンの効果は無視し、散乱中心の空間的な拡がりも無視して考えよう。この場合に電荷 Ze の標的による電荷 ze 運動エネルギー E_{kin} の粒子の散乱の微分断面積を与える式はラザフォードの散乱公式として知られる。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 (4E_{\text{kin}})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (13)$$

この式は古典的な計算によって得られたものであるが、非相対論的量子力学での計算によってもまったく同じ式を得る。そのためラザフォードの散乱公式 (13) は実に様々な導出が可能であり、今回は古典力学から 2 種類、非相対論的量子力学から 2 種類の導出を紹介する。

古典力学による導出その 1 ～ オイラー・ラグランジュ方程式を解く ～

ポテンシャル $U(r) = a/r$ の中を質量 m の粒子が運動する。この系のラグランジアンは極座標で

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (14)$$

と書ける。従ってオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (16)$$

第 2 式から $mr^2\dot{\theta} = \text{const.} = L$ 。第 1 式から

$$\begin{aligned} E = \text{const.} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \end{aligned} \quad (17)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))} \quad W(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\ \therefore \frac{d\theta}{dr} &= \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \end{aligned} \quad (18)$$

散乱角を ϕ として図より

$$\pi - \phi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \quad (19)$$

ただし r_{\min} は $E - W(r) = 0$ の根。 $W(r)$ の具体形を代入し $b = L/\sqrt{2mE}$, $s = b/r$, $c = a/Eb$ とすると

$$\begin{aligned} \phi &= \pi - 2 \int_0^{b/r_{\min}} \frac{ds}{\sqrt{1 - cs - s^2}} \\ &= \pi - 2 \left[\cos^{-1} \frac{s + \frac{c}{2}}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}} \right]_0^{b/r_{\min}} \\ &= \pi - 2 \cos^{-1} \frac{c/2}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) = \sin \frac{\phi}{2} = \frac{c/2}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}}$$

$$\therefore \tan \frac{\phi}{2} = \frac{c}{2} = \frac{a}{2Eb}$$

$$\therefore b = \frac{a}{2E \tan \phi/2} \quad (20)$$

b は衝突パラメータであり、 b を用いて断面積を表せば

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b |db| = 2\pi b \left| \frac{db}{d\phi} \right| \frac{d\phi}{d\Omega} d\Omega \\ \therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{\sin \phi} \left| \frac{db}{d\phi} \right| \\ &= \left(\frac{a}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \phi/2} \end{aligned} \quad (21)$$

古典力学による導出その2 ～ 運動量移行を用いて～

入射粒子の運動量を \mathbf{p} 、散乱粒子の運動量を \mathbf{p}' とする。
標的が十分重く $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ が成り立つとして

$$\begin{aligned} \text{運動量移行 } \mathbf{q} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}' \\ |\mathbf{q}| &= 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\phi}{2} \quad \phi: \text{散乱角} \quad (22) \end{aligned}$$

運動量の変化は力積に等しく

$$|\mathbf{q}| = \int_{-\infty}^{\infty} F_z dt = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{a}{r^2} \cos \theta \frac{dt}{d\theta} d\theta$$

角運動量 $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = |\mathbf{p}|b$ より

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}| &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{a}{r^2} \cos \theta \frac{mr^2}{|\mathbf{p}|b} d\theta \\ &= 2 \frac{ma}{|\mathbf{p}|b} \sin \theta_0 = 2 \frac{ma}{|\mathbf{p}|b} \cos \frac{\phi}{2} \quad (\phi = \pi - 2\theta_0) \quad (23) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\phi}{2} &= 2 \frac{ma}{|\mathbf{p}|b} \cos \frac{\phi}{2} \\ \therefore b &= \frac{a}{2E \tan \phi/2} \quad (24) \end{aligned}$$

あとはその1と同様。

非相対論的量子力学による導出その1 ～ シュレディンガー方程式を解く～

略(猪木・川合等参照)

広がった電荷分布による散乱

(非相対論的量子力学による導出その2 ～ フェルミの黄金律を用いて～)

ここではフェルミの黄金律を用いて非相対論量子力学によって計算する。この方法が他より優れているところは中心の電荷が空間的に広がっている場合も同じ取り扱いができる点にある。そこでそのような場合も同時に扱うことにする。

入射粒子の(静止質量含む)エネルギーと比べて標的の静止質量が大きく、反跳が無視できる場合について考える。その場合には3元運動量によって計算できる。 $Z\alpha$ が小さければ、すなわち

$$Z\alpha \ll 1 \quad (25)$$

ならば、すなわち電磁相互作用が小さければ、ボルン近似を使い、入射電子および散乱後の電子の波動関数 ψ_i と ψ_f を平面波で記述することができる:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}, \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}/\hbar} \quad (26)$$

規格化

$$\int_V |\psi_i|^2 dV = n_a V \quad \text{ここで } V = \frac{N_a}{n_a} \quad (27)$$

第4章より黄金律を用いて、微分断面積は(4.19)より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V}{v_a} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \frac{d^2 n}{dE' \Omega} \quad (28)$$

状態密度は (4.16) より

$$d^2n = \frac{V|\mathbf{p}'|^2 d\mathbf{p}' d\Omega}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(\frac{E'}{c}\right)^2 \frac{dE'}{c} d\Omega \quad (29)$$

ここで $|\mathbf{p}'| \approx E'/c$ を用いた。 $v_a \approx c$ となるので、以上より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \quad (30)$$

を得る。

次に遷移行列要素 $\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle$ を求める。電氣的ポテンシャル ϕ 中での電荷 e の相互作用演算子は $\mathcal{H}_{\text{int}} = e\phi$ だから

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} / \hbar} \phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (31)$$

運動量移行 $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ として

$$= \frac{e}{V} \int \phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (32)$$

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} = -\hbar^2 / |\mathbf{q}|^2 \Delta e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar}$$

$$= -\frac{e\hbar^2}{V|\mathbf{q}|^2} \int \phi(\mathbf{x}) \Delta e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (33)$$

グリーンの定理: $\int (u \Delta u - v \Delta u) d^3x = 0$ for $\forall u, v$ s.t. $\int (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} dS = 0$

$$= -\frac{e\hbar^2}{V|\mathbf{q}|^2} \int \Delta \phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (34)$$

Poisson 方程式: $\Delta \phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) / \varepsilon_0$ (電荷密度: $\rho(\mathbf{x})$)

$$= \frac{e\hbar^2}{\varepsilon_0 V |\mathbf{q}|^2} \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (35)$$

電荷分布関数 $f(\mathbf{x})$: $\rho(\mathbf{x}) = Ze f(\mathbf{x})$ 規格化条件: $\int f(\mathbf{x}) d^3x = 1$

$$= \frac{Z \cdot 4\pi\alpha\hbar^3 c}{|\mathbf{q}|^2 V} \int f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x \quad (36)$$

$F(\mathbf{q}) = \int f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar} d^3x$ を形状因子 (form factor) と呼ぶ。 $F(\mathbf{q})$ は $f(\mathbf{x})$ をフーリエ変換した形になっている (詳しくは後述)。

以上より散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\mathbf{q}c|^2} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (37)$$

となる。

ラザフォード散乱では標的の空間的な拡がりは無視するため $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ i.e. $F(\mathbf{q}) = 1$ として

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\mathbf{q}c|^2} \quad (38)$$

仮定により反跳を無視し、電子のエネルギーと運動量の絶対値は相互作用の前後で変化しないとすると図より

$$|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\theta}{2} \quad (39)$$

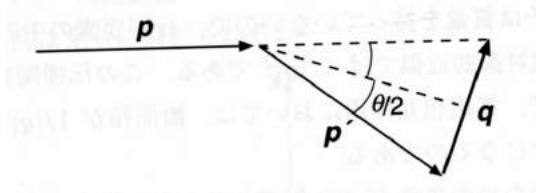
であり、 $E = \gamma mc^2$, $|\mathbf{p}| = \beta \gamma mc$ を用いて

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4(\beta^2\gamma mc^2)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (40)$$

を得る。

$$\beta \rightarrow 1 \quad \beta^2\gamma mc^2 \simeq \gamma mc^2 = E \quad (41)$$

$$\beta \rightarrow 0 \quad \beta^2\gamma mc^2 \simeq \beta^2 mc^2 = mv^2 = 2E_{\text{kin}} \quad (42)$$



であるから、相対論的には

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (43)$$

非相対論的には

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{(4E_{\text{kin}})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (44)$$

となり、(44) は (入射粒子の電荷 $e \rightarrow ze$ として) 古典的な計算によって得られた (13) に一致する。

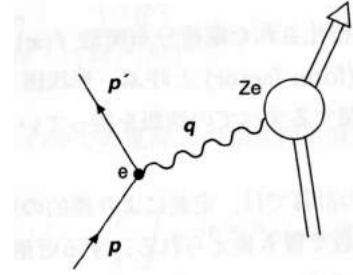
場の理論による考察

いままでの議論を場の理論から眺めてみる。場の理論の言葉では電磁相互作用は光子の交換によって起こる。光子は、それ自身は電荷を持っておらず、相互作用をしている双方の電荷に結合する。その結果、遷移行列要素に $Ze \cdot e$ 、断面積に $(Ze^2)^2$ の寄与をする。3元運動量移行 \mathbf{q} は交換された光子が持ち運ぶ運動量であるから、光子の換算ド・ブロイ波長は

$$\lambda = \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} = \frac{\hbar}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad (45)$$

となる。もし λ が標的の空間的な拡がりよりもずっと大きければ内部構造は分解されず、標的粒子は点状なもののみなされる。 λ が大きくなるのは運動量 $|\mathbf{p}|$ が小さい場合と散乱角 θ が小さい場合であり、したがって**標的の内部構造を知るには高エネルギーで $|\mathbf{p}|$ を大きくすればよいこと、小さい角度の散乱には内部構造の影響が少ないことがわかる**。しかし後述するように非常に小さな $|\mathbf{q}|$ からわかる情報もある。

光子は質量を持っていないので、行列要素のなかの伝播関数は $1/Q^2$ 、非相対論的近似では $1/|\mathbf{q}|^2$ である。この伝播関数は断面積の中に自乗で入ってくるので、電磁相互作用においては、断面積は $1/|\mathbf{q}|^4$ で特徴的に急激に減少する。



5.3 モットの散乱断面積

ここまでスピンを無視してきたが、相対論的なエネルギーではラザフォードの散乱断面積はスピンの効果のため変更を受ける。モットの散乱断面積は電子散乱を電子スピンによる効果を考慮に入れて記述するもので、相対論的量子力学から

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (46)$$

と導出される。 $*$ は標的粒子の反跳が無視されていることを示す (反跳が無視できない場合は第6章で)。(40)を用いて

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4(\beta^2\gamma mc^2)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (47)$$

と書ける。**相対論的なエネルギーでのモットの散乱断面積は、散乱角が大きくなるにつれラザフォードの散乱断面積よりもずっと速く減少することがわかる。** $\beta \rightarrow 1$ の極限では

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (48)$$

と書ける。**これは $\theta = 180^\circ$ で 0 になる。**

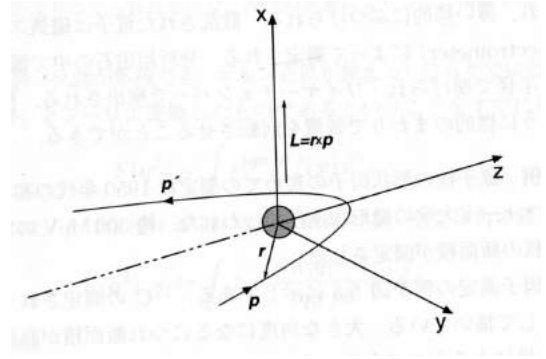
この意味を考えよう。 $\beta \rightarrow 1$ の極限では、スピン \mathbf{s} の運動方向 $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ への射影は保存量である。この量をヘリシティ (helicity) と呼び

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}||\mathbf{p}|} \quad (49)$$

と定義される。スピンの進行方向を向いている粒子はヘリシティ +1 を持っており、スピンの反対方向を向いている粒子はヘリシティ -1 を持っている。

180° 方向への散乱の場合、運動量は散乱の前後で 180° 向きを変えるため、ヘリシティの保存のためにはスピンもその射影の向きを変えなければならない(スピンフリップ)。しかし、全角運動量は保存されるため、標的のスピンがゼロの場合、これは不可能である。散乱の際の軌道角運動量は運動の方向に垂直なので、角運動量の運動の方向の成分を変えないから。したがって $\beta \rightarrow 1$ の極限では 180° 散乱は完全に抑制される。

標的がスピンを持つ場合は、標的のスピンが変化することで角運動量が保たれうるため、180° 散乱は可能となる。



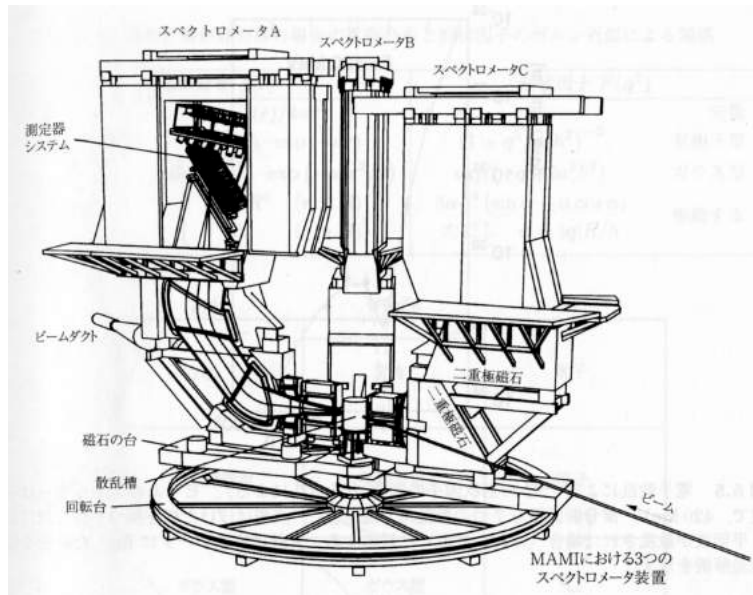
5.4 原子核の形状因子

運動量移行 $|\mathbf{q}|$ が大きくなると仮想光子の換算波長が小さくなり空間分解能が上がる。すなわち原子核のカタチが見える。

原子核の空間的な拡がりや形状因子 $F(\mathbf{q})$ により記述される。以下では球対称な系の形状因子に話を限り、 $F(\mathbf{q}^2)$ と書く。

実験では、形状因子の絶対値はモットの散乱断面積と実験で得られた断面積の比として決定される:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{実験}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot |F(\mathbf{q}^2)|^2 \quad (50)$$



図は形状因子を測る典型的な装置。電子ビームは線形加速器により供給され、薄い標的にぶつけられる。散乱された粒子は磁気スペクトロメータによって測定される。様々な角度 θ で測定できるように標的のまわりで装置を回転させることができる。

前述の通り、反跳が無視でき、ボルン近似が使えるという条件の下では、形状因子 $F(\mathbf{q})$ は電荷分布 $f(\mathbf{x})$ をフーリエ変換した形になっている:

$$F(\mathbf{q}) = \int f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} d^3x \quad (51)$$

球対称な場合は $f(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) = f(r)$ であり

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \int f(r) e^{i|\mathbf{q}|r \cos \theta/\hbar} r^2 d\phi d(\cos \theta) dr \\ &= 2\pi \int f(r) r^2 \frac{\hbar}{i|\mathbf{q}|r} \left[e^{i|\mathbf{q}|r \cos \theta/\hbar} \right]_{-1}^1 dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{\sin |q|r/\hbar}{|q|r/\hbar} dr \end{aligned} \quad (52)$$

規格化

$$1 = \int f(\mathbf{x})d^3x = \int f(r)r^2d\phi d(\cos\theta)dr = 4\pi \int_0^\infty f(r)r^2dr \quad (53)$$

原理的には、実験によって決定された形状因子の q^2 依存性から逆フーリエ変換により動径方向の電荷分布 $f(r)$ が得られる:

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{q}^2)e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}d^3q \quad (54)$$

しかし実際には、 $f(r)$ としていくつかのパラメータをもつモデルを考え、それを用いて $F(\mathbf{q}^2)$ を計算し、測定データとよく一致するようにパラメータを動かすということを行う。

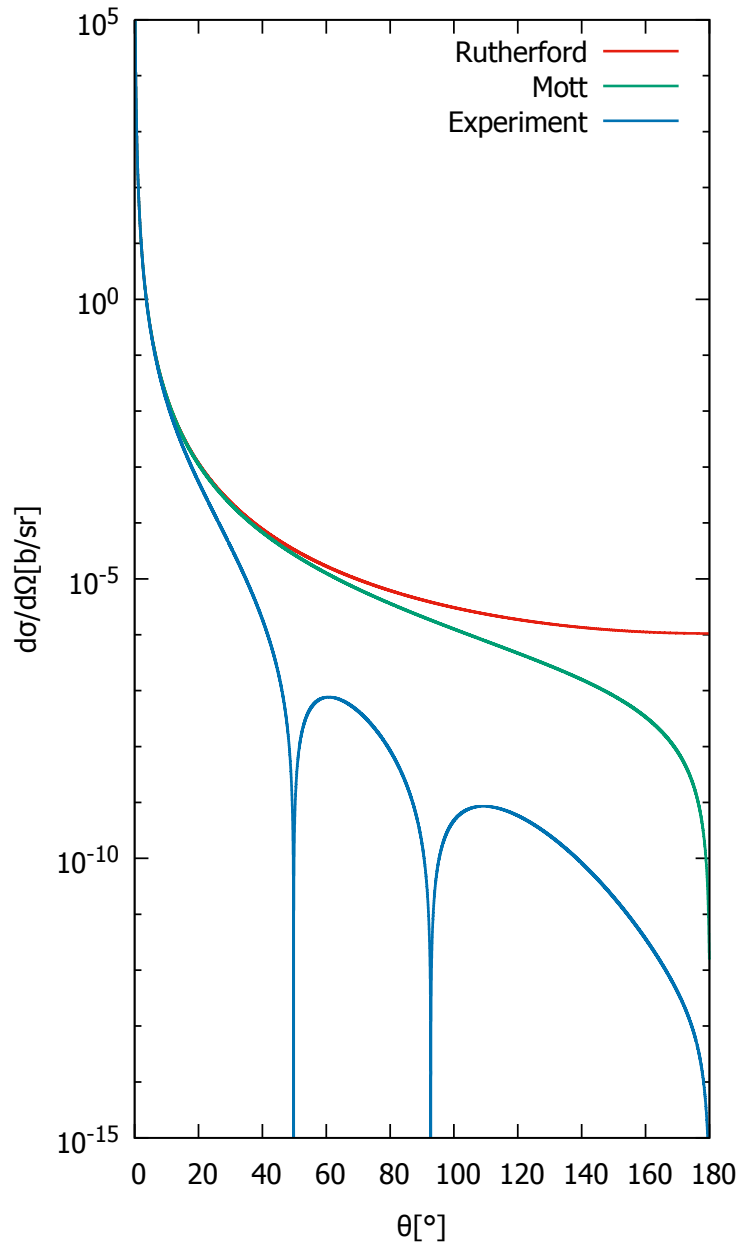


図 2: 電子散乱による微分断面積 (^{12}C に $E = 420 \text{ MeV}$ で電子を入射した場合のシミュレーション。電荷分布は一様球を仮定。)

電荷分布から形状因子の計算

- 点状 $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \delta(\mathbf{x})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}d^3x = 1 \quad \text{定数} \quad (55)$$

例) 電子

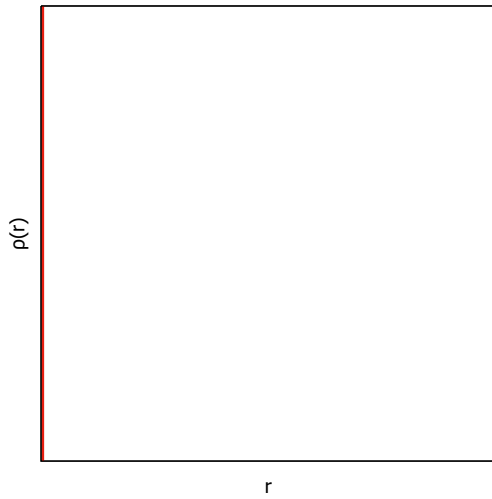


図 3: $\rho(r)$

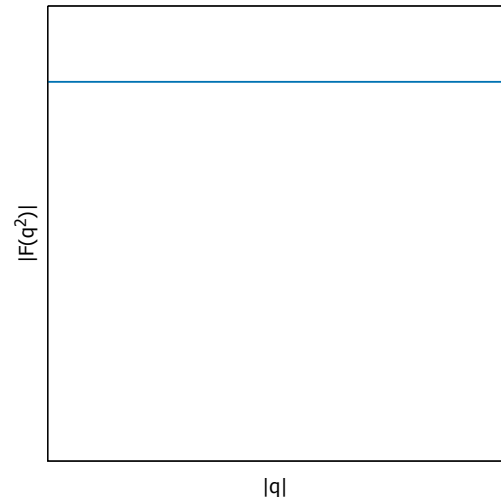


図 4: $|F(\mathbf{q}^2)|$

- 指数関数型 $f(r) = \frac{a^3}{8\pi} \exp(-ar)$ ($a > 0$)

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= 4\pi \int_0^\infty \frac{a^3}{8\pi} \exp(-ar) r^2 \frac{\sin |\mathbf{q}|r/\hbar}{|\mathbf{q}|r/\hbar} dr \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty r \exp[(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)r] dr \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r \exp[(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)r] dr &= \left[r \frac{1}{i|\mathbf{q}|/\hbar - a} \exp[(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)r] \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{i|\mathbf{q}|/\hbar - a} \exp[(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)r] dr \\ &= -\frac{1}{(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)^2} [\exp[(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)r]]_0^\infty \\ &= \frac{1}{(i|\mathbf{q}|/\hbar - a)^2} \\ &= \frac{1}{(a^2 + (|\mathbf{q}|/\hbar)^2)^2} \{a^2 - (|\mathbf{q}|/\hbar)^2 + 2ia|\mathbf{q}|/\hbar\} \end{aligned}$$

$$\therefore F(\mathbf{q}^2) = \frac{a^2}{2} \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \frac{2a|\mathbf{q}|/\hbar}{(a^2 + (|\mathbf{q}|/\hbar)^2)^2} = \frac{1}{(1 + |\mathbf{q}|^2/a^2\hbar^2)^2} \quad \text{双極子型} \quad (56)$$

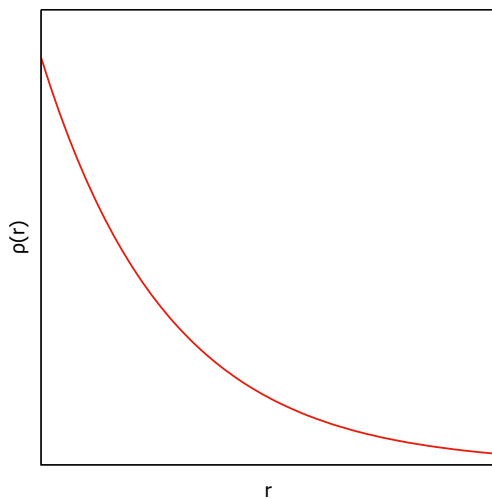


図 5: $\rho(r)$

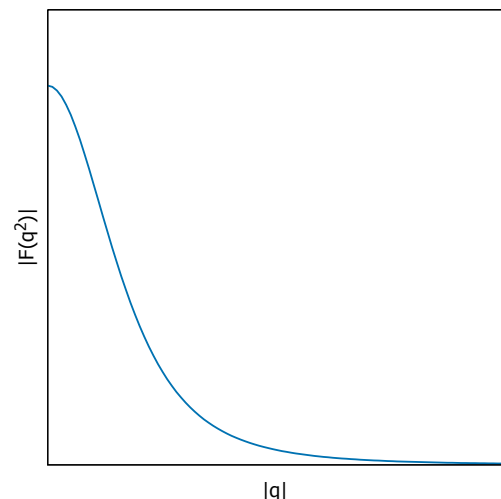


図 6: $|F(\mathbf{q}^2)|$

例) 陽子

- ガウス型 $f(r) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right)$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= 4\pi \int_0^\infty \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right) r^2 \frac{\sin|\mathbf{q}|r/\hbar}{|\mathbf{q}|r/\hbar} dr \\ &= 4\pi \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right) \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right) \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr &= \left[\frac{1}{-a^2} e^{-\frac{a^2 r^2}{2}} \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-a^2} e^{-\frac{a^2 r^2}{2}} \frac{|\mathbf{q}|}{\hbar} \cos(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{|\mathbf{q}|}{\hbar} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\exp\left(-\frac{a^2}{2} r^2 + i \frac{|\mathbf{q}|r}{\hbar}\right)}_{-\frac{a^2}{2} \left(r - i \frac{|\mathbf{q}|}{a^2 \hbar}\right)^2 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2a^2 \hbar^2}} dr \\ &= \frac{1}{2a^2} \frac{|\mathbf{q}|}{\hbar} \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \exp\left(-\frac{|\mathbf{q}|^2}{2a^2 \hbar^2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore F(\mathbf{q}^2) = 4\pi \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \frac{1}{2a^2} \frac{|\mathbf{q}|}{\hbar} \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \exp\left(-\frac{|\mathbf{q}|^2}{2a^2 \hbar^2}\right) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{q}|^2}{2a^2 \hbar^2}\right) \quad \text{ガウス型} \quad (57)$$

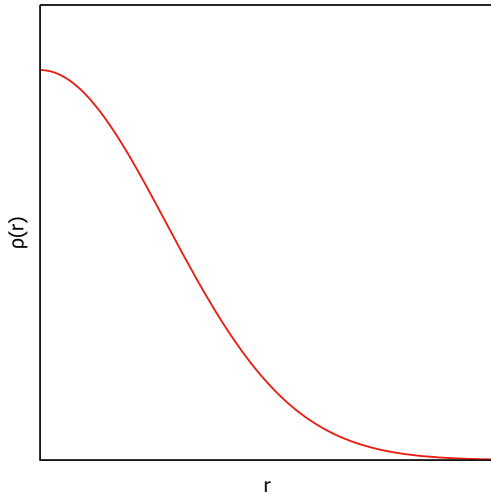


図 7: $\rho(r)$

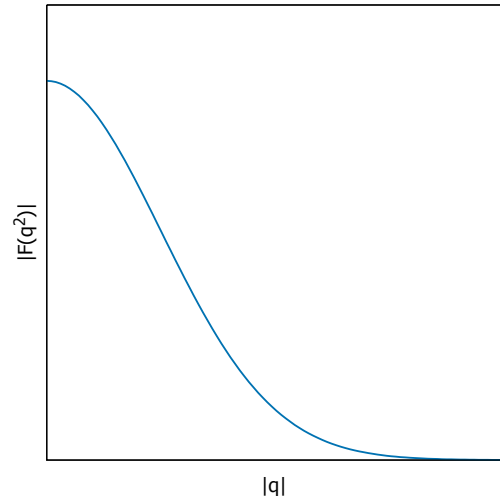


図 8: $|F(\mathbf{q}^2)|$

例)⁶Li

- 一様球 $f(r) = \begin{cases} 3/4\pi R^3 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{\sin|\mathbf{q}|r/\hbar}{|\mathbf{q}|r/\hbar} dr \\ &= \frac{3}{R^3} \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \int_0^R r \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr &= \left[r \left(-\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \cos(|\mathbf{q}|r/\hbar) \right) \right]_0^R + \int_0^R \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \cos(|\mathbf{q}|r/\hbar) dr \\ &= -R \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \cos(|\mathbf{q}|R/\hbar) + \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right)^2 [\sin(|\mathbf{q}|r/\hbar)]_0^R \\ &= -R \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \cos(|\mathbf{q}|R/\hbar) + \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right)^2 \sin(|\mathbf{q}|R/\hbar) \end{aligned}$$

$$\therefore F(q^2) = \frac{3}{R^3} \left(\frac{\hbar}{|q|} \right)^3 \left(\sin(|q|R/\hbar) - \frac{|q|R}{\hbar} \cos(|q|R/\hbar) \right) = 3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \quad \text{振動する} \quad (58)$$

ただし $\alpha = |q|R/\hbar$

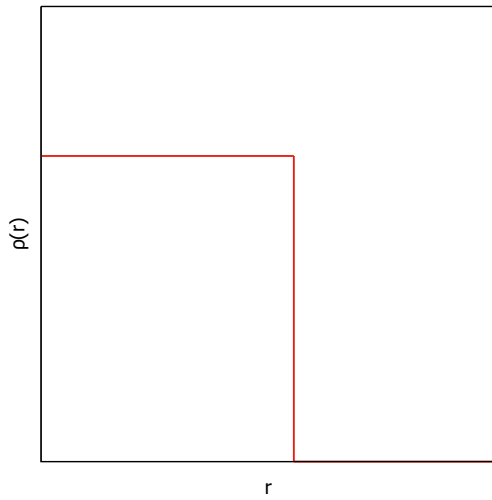


図 9: $\rho(r)$

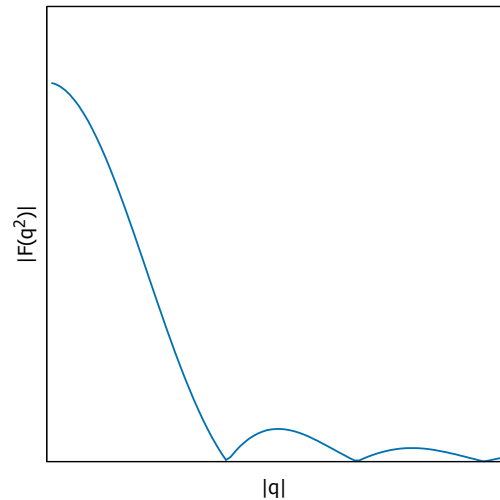


図 10: $|F(q^2)|$

$\sin x - x \cos x$ のゼロ点をニュートン法を用いて計算すると

$$x_0 = 4.49, 7.75, 10.9, \dots \quad (59)$$

となった。一様球のモデルを図の測定データに適用すると、

$$\begin{aligned} R &= 4.49 \times \frac{\hbar}{|q|} \\ &\simeq 4.49 \times \frac{\hbar c}{2E \sin \frac{\theta}{2}} \\ &\simeq 4.49 \times \frac{200 [\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{2 \times 420 [\text{MeV}] \times \sin \frac{51^\circ}{2}} \\ &\simeq 2.5 \text{ fm} \end{aligned} \quad (60)$$

となる。

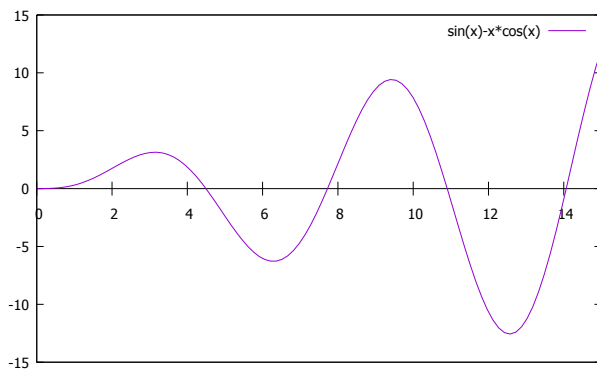
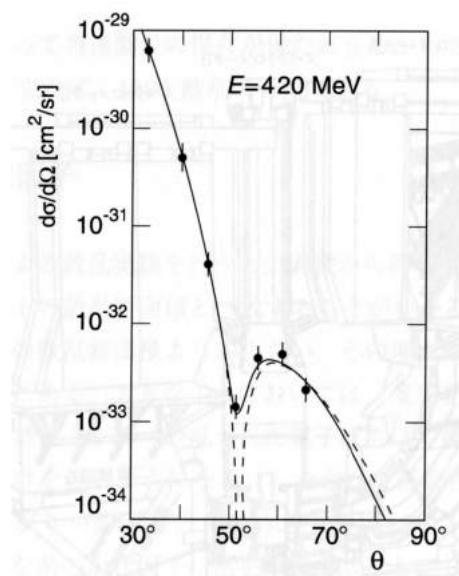


図 11: $\sin x - x \cos x$ のグラフ



- フェルミ関数 $\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}}$ (規格化 $4\pi \int \rho(r)r^2 dr = Z$)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} d^3x &= 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}} r^2 \frac{\sin|\mathbf{q}|r/\hbar}{|\mathbf{q}|r/\hbar} dr \\ &= 4\pi \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \int_0^\infty f(r)g(r)dr \end{aligned} \quad (61)$$

ここで $f(r) = 1/(1 + e^{(r-c)/a})$, $g(r) = r \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar)$ とした。 a が小さいときゾンマーフェルト展開が使える。

ゾンマーフェルト展開^[1]

滑らかな任意の関数 $g(\epsilon)$ とフェルミ分布関数 $f(\epsilon) = 1/(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})$ の積の積分を考える。このとき、温度 T が十分低温であれば積分は次のように展開される。

$$I = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)f(\epsilon) \simeq G(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 G''(\mu) \quad (62)$$

ただし $G(\epsilon) = \int_0^\epsilon dt g(t)$ は $g(\epsilon)$ の不定積分であり、 $G(\epsilon)f(\epsilon) \rightarrow 0 (\epsilon \rightarrow \infty)$ であるとする。

今 $\mu \rightarrow c$, $k_B T \rightarrow a$ であり、

$$\begin{aligned} G(r) &= \int_0^r dr' g(r') = \int_0^r dr' r' \sin(|\mathbf{q}|r'/\hbar) \\ &= \left[r' \left(-\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right) \cos(|\mathbf{q}|r'/\hbar) \right]_0^r + \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \int_0^r dr' \cos(|\mathbf{q}|r'/\hbar) \\ &= -\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} r \cos(|\mathbf{q}|r/\hbar) + \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right)^2 \sin(|\mathbf{q}|r/\hbar) \end{aligned} \quad (63)$$

より

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} d^3x &\simeq 4\pi \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \left(G(c) + \frac{\pi^2}{6} a^2 G''(c) \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right)^3 \left(\sin(|\mathbf{q}|c/\hbar) - \frac{|\mathbf{q}|c}{\hbar} \cos(|\mathbf{q}|c/\hbar) \right) \\ &\quad + 4\pi \frac{\pi^2}{6} a^2 \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \left(\sin(|\mathbf{q}|c/\hbar) + \frac{|\mathbf{q}|c}{\hbar} \cos(|\mathbf{q}|c/\hbar) \right) \\ &= 4\pi c^3 \alpha^{-3} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \frac{2\pi^3}{3} a^2 c \alpha^{-1} (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \quad \text{振動する} \quad (64) \\ &\quad \text{ただし } \alpha = |\mathbf{q}|c/\hbar \end{aligned}$$

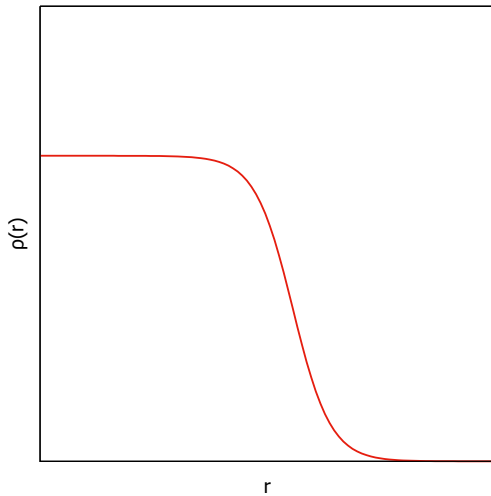


図 12: $\rho(r)$

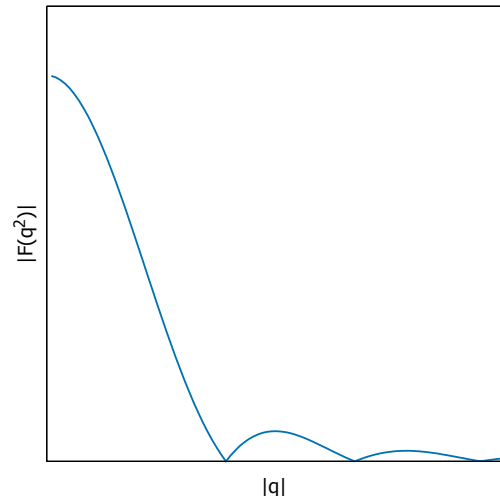


図 13: $|F(\mathbf{q}^2)|$

例) ^{40}Ca

たいへん軽い核を別にすれば、すべての原子核は振動する形状因子を持っている。すなわちある程度明確な縁がある。

図はカルシウム同位体 ^{40}Ca と ^{48}Ca による電子散乱の微分断面積。以下の点でおもしろい。

- 断面積が $|\mathbf{q}|$ の広い範囲で測られており、 10^7 ものオーダーで変化している。
- 極小値が3つ観測されており、精密な情報を得ることができる。
- 極小値の位置から ^{48}Ca の半径が ^{40}Ca の半径より大きいことがわかる

小さな $|\mathbf{q}|$ からわかること

原子核の半径に関する情報は形状因子の極小値の位置によってばかりでなく、 $\mathbf{q}^2 \rightarrow 0$ での形状因子の振舞いによってもわかる。仮想光子の波長が原子核の拡がり R よりもずっと大きいとき

$$\frac{|\mathbf{q}|R}{\hbar} \ll 1 \quad (65)$$

であり、 $F(\mathbf{q}^2)$ は $|\mathbf{q}|$ のべきに展開できる:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \int f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} d^3x \\ &= \int f(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \cos \theta}{\hbar} \right)^n d^3x \quad \text{ここで } \theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i|\mathbf{q}|r \cos \theta}{\hbar} \right)^n r^2 d\phi d \cos \theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} f(r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} \left(\frac{|\mathbf{q}|r}{\hbar} \right)^{2n} \cos^{2n} \theta r^2 d \cos \theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} \left(\frac{|\mathbf{q}|r}{\hbar} \right)^{2n} \frac{\cos^{2n} \theta}{2n+1} \right]_{-1}^{+1} r^2 dr \\ &= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{|\mathbf{q}|}{\hbar} \right)^{2n} \int_0^{\infty} f(r) r^{2(n+1)} dr \end{aligned} \quad (66)$$

電荷の平均自乗半径 (mean square radius) を

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 f(\mathbf{x}) d^3x = 4\pi \int_0^{\infty} r^4 f(r) dr \quad (67)$$

で定義すると、

$$F(\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \quad (68)$$

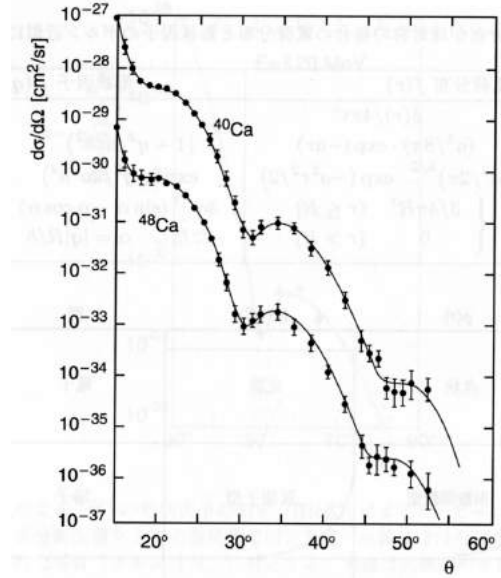
と書ける。したがって $\langle r^2 \rangle$ を決めるには形状因子 $F(\mathbf{q}^2)$ を \mathbf{q}^2 のたいへん小さな値まで測ることが必要である。

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(\mathbf{q}^2)}{d\mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0} \quad (69)$$

が成り立つ。

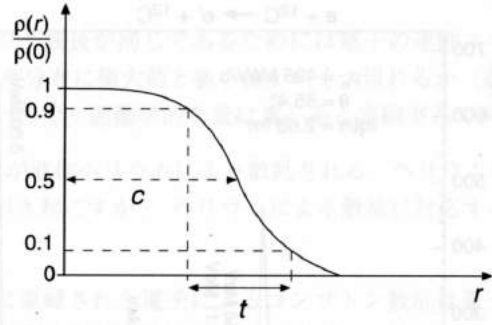
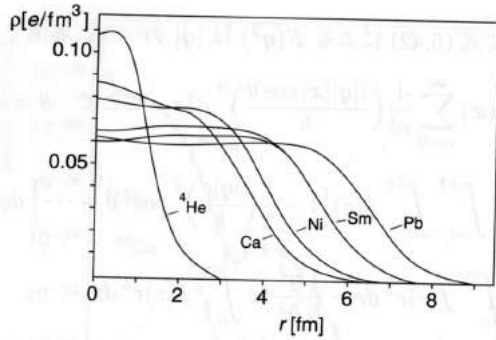
原子核の電荷分布

多くの精密測定の結果以下のようなことがわかった



- 原子核の動径方向の電荷分布はよい近似で2つのパラメータをもつフェルミ関数で記述される:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (70)$$



- 定数 c は $\rho(r)$ が半分まで減少した点の半径、 a はぼやけの大きさを表すパラメータであり、大きな原子核では経験的に

$$c = 1.07 \cdot A^{1/3} \text{ fm}, a = 0.54 \text{ fm} \quad (71)$$

である。

- 中ぐらないし重い原子核では近似的に

$$\langle r^2 \rangle = r_0 \cdot A^{1/3} \quad \text{ここで } r_0 = 0.94 \text{ fm} \quad (72)$$

が成り立つ。原子核を一様球 ($f(r) = 3/4\pi R^3$ ($r \leq R$), 0 ($r > R$)) と近似すると

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^4 f(r) dr = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} R^2 \quad (73)$$

であるから、定量的には

$$R = 1.21 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \quad (74)$$

が成り立つ。半径のこの定義は質量公式 (2.8) でも使われた。

- 表面の厚さ t は電荷密度が最大値の 90% から 10% まで減少する領域の厚さとして定義される:

$$t = r_{(\rho/\rho_0=0.1)} - r_{(\rho/\rho_0=0.9)} \quad (75)$$

ここで $\rho/\rho_0 = X$ のときの原子核の中心からの距離を $r_{(\rho/\rho_0=X)}$ とした。

$$\frac{1}{1 + e^{(r_{(\rho/\rho_0=X)} - c)/a}} = X$$

$$\therefore r_{(\rho/\rho_0=X)} = a \ln \frac{1-X}{X} + c \quad (76)$$

より、すべての重い原子核で t はほぼ同じで

$$t = a \left(\ln \frac{0.9}{0.1} - \ln \frac{0.1}{0.9} \right) = 2a \ln 9 \approx 2.40 \text{ fm} \quad (77)$$

である。

- 原子核の中心における電荷密度 $\rho(0)$ は、質量数が大きくなるとわずかに減少するが、 $A/Z \cdot \rho(0)$, すなわち中心における核子密度はほとんど全ての原子核で同じになる (飽和):

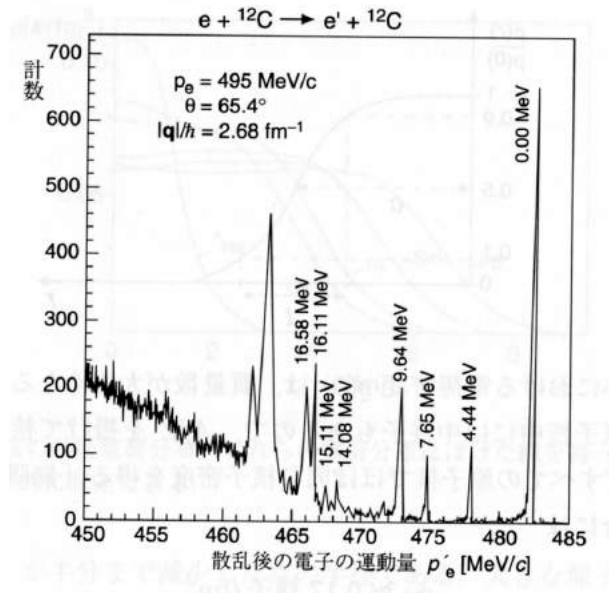
$$\rho_N \approx 0.17 \text{ 核子/fm}^3 \quad (78)$$

- いくつかの原子核は球状からずれて回転楕円体に変形している。その正確な形は電子の弾性散乱では決定できない。縁がぼやけているように見えるだけ。
- ${}^6,7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, 特に ${}^4\text{He}$ といった軽い核では、原子核の内部で核子密度が一定にならず、電荷分布はむしろぼがウス型をしている。

5.5 非弾性散乱による原子核の励起

弾性散乱の場合は粒子は始状態と終状態で同一であり、標的は反跳を受けるだけで励起されない。入射エネルギーと散乱後のエネルギーは1対1に対応する。

しかし実際の実験では標的が励起されることでより大きなエネルギー移行を伴った非弾性散乱も起こる。そのため散乱された電子のスペクトルは、弾性散乱の大きなピークの横に、個々のエネルギーレベルへの励起を示すピークがいくつか立つ。



参考文献

- [1] 2015 年度後期 統計力学 C 講義資料
- [2] ランダウ=リフシツ 『力学』
- [3] 倉澤治樹 原子核物理学講義ノート mitizane.ll.chiba-u.jp/metadb/up/C0000051459/nucleus.pdf
- [4] 猪木・川合 『量子力学 II』

12.7 Coulomb 散乱

いままでの議論は、すべて、相互作用が短距離力であるという仮定に基づいていた。ところで、2つの粒子が Coulomb 力で相互作用する場合、おたがいがいくら離れても相互作用が残るために、2粒子の波は自由な平面波には近づけない。しかし一方では、厳密に解ける数少ない例でもある。したがって、Coulomb 力による散乱は、散乱理論のなかで特徴的なものの1つである。

Coulomb 相互作用をしている電荷 Ze , $Z'e$ をもつ2粒子の Schrödinger 方程式は、重心を分離して相対座標になおしてしまえば、換算質量 μ を使って、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{ZZ'e^2}{r}\right)\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}) \quad (12.75)$$

となる。ここで、

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (12.76)$$

$$\gamma = \frac{ZZ'e^2}{\hbar v} \quad (12.77)$$

とおくと、(12.75)は、

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2\gamma k}{r}\right)\varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (12.78)$$

と書ける。この方程式は、

$$\varphi_{\text{Coul}}(\mathbf{r}) = e^{ikz} f(r-z) \quad (12.79)$$

という形の正則解をもつ。

実際、この式を(12.78)に代入し、 $\xi = r-z$ とおけば、(12.78)は、

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - ik\xi) \frac{df}{d\xi} - \gamma k f = 0 \quad (12.80)$$

となる。合流型の超幾何関数 $F(a; b; z)$ を解にもつ微分方程式

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (b-z) \frac{dF}{dz} - aF = 0 \quad (12.81)$$

は、 c を定数として

$$f(\xi) = cF(-i\gamma; 1; ik\xi) \quad (12.82)$$

とおけば、方程式(12.80)と同じになる。

付録Aを参照して、Coulomb 波動関数の漸近形を r^{-1} のオーダーの項までとると、

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Coul}}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp[i(kz + \gamma \ln k(r-z))] \left[1 - \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \\ + f_c(\theta) \frac{1}{r} \exp[i(kr - \gamma \ln 2kr)] \end{aligned} \quad (12.83)$$

となる。ここに、

$$f_c(\theta) = \frac{\exp[-i\gamma \ln(\sin^2 \frac{\theta}{2})]}{2ik \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \quad (12.84)$$

である。このように、入射波は原点から限りなく遠いところでも対数的な歪みを受けるから、平面波と同じものとはみなされない。それにもかかわらず、負のきわめて大きい z の値に対しては、確率の流れの密度 $j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \text{Re} \left[\varphi^*(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \nabla \varphi \right]$ を計算すると、 $j_{\text{inc}} = v = \frac{\hbar k}{\mu}$ になる。このことにより(12.83)の第1項が入射波であるという解釈が正当化される。

同様に、散乱波に対しても、出ていく波に特徴的な $\frac{e^{ikr}}{r}$ という形をとらず、対数的な歪みを受ける。それにもかかわらず、散乱波に対する確率の流れの密度 j_{sc} を計算すると、たしかに動径方向に r の増す方向を向いており、 $j_{\text{sc}} = \frac{v |f_c(\theta)|^2}{r^2}$ となり散乱波の形をとる。したがって、Coulomb 散乱の微分断面積は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_c}{d\Omega} &= |f_c(\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right|^2 \\ &= \frac{(ZZ'e^2)^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \quad (12.85)$$

これはちょうど、Rutherford が古典力学を使って求めた公式と一致している。それゆえ、量子論においても Rutherford の古典的な公式は成り立つ。