

A5 理論ゼミ 第一回

大泉幹

2023年4月24日

1 重心系と実験系

2粒子間のポテンシャルが、2粒子間の相対距離のみによる場合、運動を相対運動と重心運動とに分離して考えることができる。このような系では、以下の座標系を取って考える。

- 重心系 … 全系の運動量が0になるように取った座標系。cという添字をつける。
- 実験系 … 1つの粒子を固定した系。Lという添字をつける。

散乱問題を解く場合重心系で考えるのが便利である。一方実際の実験は実験系の座標系で行われる。そこで2つの座標系の変換則を求める必要がある。変換則を求めるにあたり重要なことは、重心系が実験系に対して、入射粒子の進行方向に等速直線運動している点である。

まず重心系での諸量を求める。重心系では図1のように、入射粒子1と標的粒子2が衝突し、散乱粒子3と反跳粒子4が生じる。

非弾性散乱の場合、始状態の内部エネルギーの一部が、終状態の運動エネルギーに転化する。そのエネルギー Q は

$$Q = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 \quad (1)$$

で与えられる。

始状態において、重心系での入射粒子の速度を v_{1c} 、標的粒子の速度を v_{2c} とする。重心系では全運動量が0になるので

$$m_1 v_{1c} = m_2 v_{2c} \quad (2)$$

が成り立つ。全系の運動エネルギー E は以下である。

$$E = \frac{m_1}{2} v_{1c}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2c}^2 \quad (3)$$

式(2)と式(3)を連立して、 v_{1c} と v_{2c} を求めると以下である。

$$v_{1c} = \sqrt{\frac{2m_2 E}{m_1(m_1 + m_2)}}, \quad v_{2c} = \sqrt{\frac{2m_1 E}{m_2(m_1 + m_2)}} \quad (4)$$

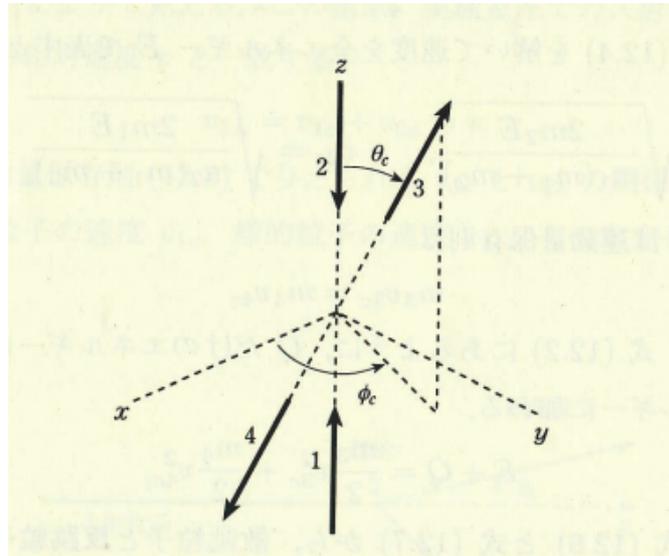


図1 重心系での散乱. 入射粒子1が z 軸正方向へ入射し, z 軸負方向へ進む標的粒子2と衝突する. 散乱粒子3の進む方向を, 天頂角 θ_c , 方位角 ϕ_c とする. 反跳粒子4は天頂角 $\pi - \theta_c$, 方位角 $\phi_c + \pi$ 方向に生じる.

終状態において, 全系の運動量保存則は以下.

$$m_3 v_{3c} = m_4 v_{4c} \quad (5)$$

Q だけのエネルギーが質量から転化するとして, 運動エネルギーは以下.

$$E + Q = \frac{m_3}{2} v_{3c}^2 + \frac{m_4}{2} v_{4c}^2 \quad (6)$$

式(5)と式(6)を連立して, v_{3c} と v_{4c} を求めると以下である.

$$v_{3c} = \sqrt{\frac{2m_4(E + Q)}{m_3(m_3 + m_4)}} \quad (7)$$

$$v_{4c} = \sqrt{\frac{2m_3(E + Q)}{m_4(m_3 + m_4)}} \quad (8)$$

入射粒子と標的粒子の相対速度 v は以下.

$$v \equiv v_{1c} + v_{2c} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} E} \quad (9)$$

逆に運動エネルギー E を相対速度のみで表すと以下.

$$E = \frac{m}{2} v^2 \quad (10)$$

ここで m は以下の換算質量である.

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

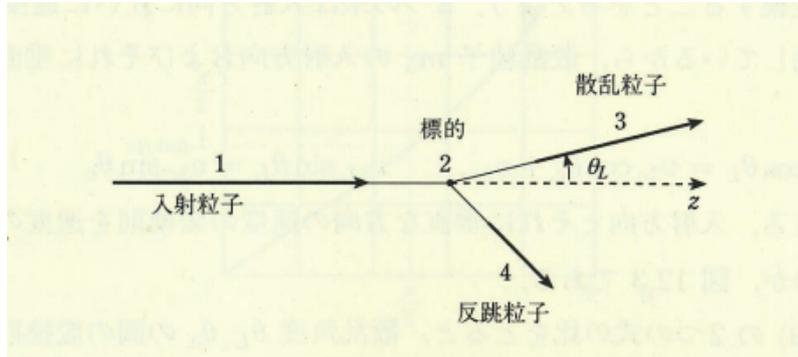


図2 実験室系での散乱. 入射粒子1が z 軸正方向に向かって入射してくる. 標的粒子2は静止している. 散乱粒子3が方位角 ϕ_L , 天頂角 θ_L の方向に出てくる.

次に, 実験室系での諸量を求める. 図2に実験室系での散乱を図示した.

実験室系は標的粒子2が静止している系であるから, 入射粒子の速度 v_{1L} は式(9)の相対速度 v と一致する.

$$v_{1L} = v_{1c} + v_{2c} = v \quad (12)$$

式(2)と式(12)を用いて, 重心系での入射粒子の速度 v_{1c} 及び標的粒子の速度 v_{2c} を, 実験室系の入射粒子の速度 v_{1L} を用いて表せる.

$$v_{1c} = \frac{m_2 v_{1L}}{m_1 + m_2}, \quad v_{2c} = \frac{m_1 v_{1L}}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

実験室系の全運動量 P 及び全エネルギー E_L は以下.

$$P \equiv m_1 v_{1L}, \quad E_L = \frac{m_1}{2} v_{1L}^2 \quad (14)$$

重心系では重心は静止しているのだから, 実験室系では速度 v_{2c} で入射粒子の運動方向に等速直線運動している. つまり全運動量 P は重心に全質量 $m_1 + m_2$ が集まって速度 v_{2c} で運動しているものとして,

$$P = (m_1 + m_2) v_{2c} \quad (15)$$

と表すことができる. 一方, 実験室系の全エネルギー E_L は重心運動のエネルギーと相対運動のエネルギー E の和になる.

$$E_L = \frac{m_1 + m_2}{2} v_{2c}^2 + E \quad (16)$$

相対運動のエネルギーは式(10)と同様であり, 入射粒子の速度を用いて

$$E = \frac{m}{2} v_{1L}^2 \quad (17)$$

と表せる.

終状態の粒子の速度を重心系から実験室系へと変換することを考える. 2つの系は互いに速度 v_{2c} で等速直線運動しているから, z 軸方向と, それに垂直な方向の速度成分は以下の関係式を満たす.

$$v_{3L} \cos \theta_L = v_{3c} \cos \theta_c + v_{2c}, \quad v_{3L} \sin \theta_L = v_{3c} \sin \theta_c \quad (18)$$

式 (18) の関係式は図 3 のように図示することができる.

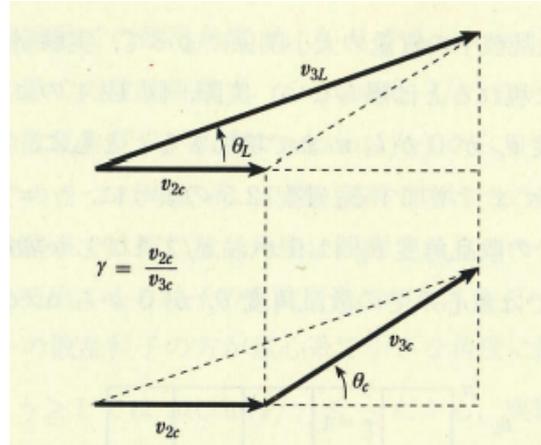


図 3 重心系と実験室系の速度の変換則.

重心系での標的粒子の速度 v_{2c} と散乱粒子の速度 v_{3c} の比を γ と定義する.

$$\gamma = \frac{v_{2c}}{v_{3c}} = \sqrt{\frac{m_1 m_3 (m_3 + m_4) E}{m_2 m_4 (m_1 + m_2) E + Q}} \quad (19)$$

この γ を用いて, 式 (18) の 2 つの式の比を取ると, 散乱角度 θ_L, θ_c の間の変換則が得られる.

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{\gamma + \cos \theta_c}, \quad \phi_L = \phi_c \quad (20)$$

この変換則から, γ が 1 より大きい小さいかによって, 散乱角度 θ_L, θ_c の関係が異なることがわかる.

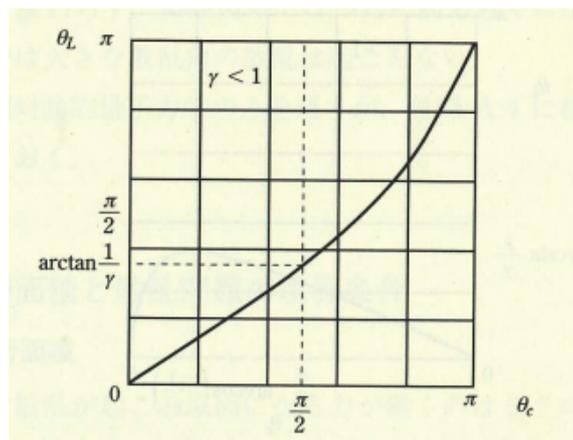


図 4 $\gamma < 1$ の場合 (弾性衝突では標的粒子が入射粒子より重い場合) の θ_L と θ_c の関係

図 4 のように, $\gamma > 1$ の場合, θ_c が $0 \leq \theta_c \leq \pi$ の値を取るのに対して, θ_L も $0 \leq \theta_L \leq \pi$ の値を取る.

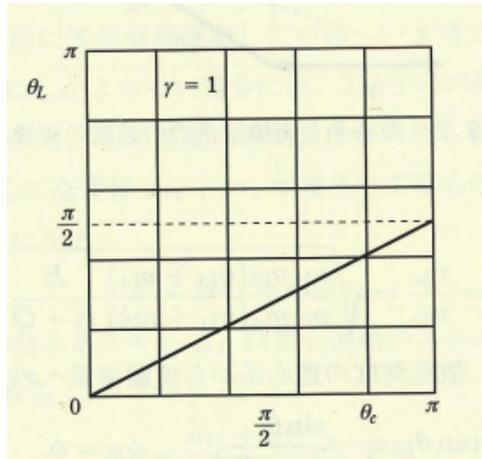


図5 $\gamma = 1$ の場合 (弾性衝突では標的粒子と入射粒子の質量が同じ場合) の θ_L と θ_c の関係

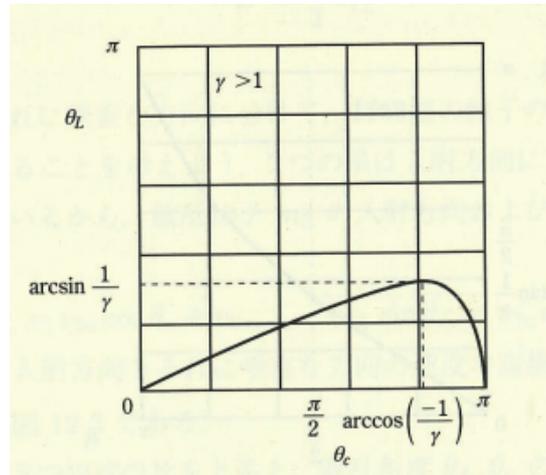


図6 $\gamma > 1$ の場合 (弾性衝突では標的粒子が入射粒子より軽い場合) の θ_L と θ_c の関係

しかし、同様の θ_c の変域に対して、図5、図6のとおり、 $\gamma = 1$ の場合は $0 \leq \theta_L \leq \pi$ 、 $\gamma < 1$ の場合は $0 \leq \theta_L \leq \arcsin \frac{1}{\gamma}$ の値しかとらない。この散乱角の変換則の性質が示すのは、 $v_{2c} < v_{3c}$ の場合、標的粒子より後方側でしか散乱粒子は観測されないということである。この例として、同種粒子の弾性衝突の場合を考える。 $m_1 = m_3$ 、 $m_2 = m_4$ 、 $Q = 0$ なので、 $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ となる。標的粒子の質量が入射粒子の質量より大きいとき、散乱角はすべての値をとり、散乱粒子はあらゆる角度で観測される。逆に入射粒子の質量が標的粒子に比べ十分に大きい場合、 γ は1より十分に大きい値をとる。結果として大きな角度での散乱は起こらず、 z 軸付近でしか散乱粒子は観測されない。

2 付録 A.4 散乱の相対論的運動学

粒子 i のエネルギー, 運動量, 質量をそれぞれ E_i, \mathbf{p}_i, m_i とする. 4 元運動量 p_i^μ の 2 乗は

$$\sum_{\mu} p_i^\mu p_{i\mu} \equiv \left(\frac{E_i}{c}\right)^2 - p_i^2 = m_i^2 c^2 \quad (21)$$

光速を c とする. 重心系の定義は $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ なので, 重心系でのこれらの粒子の運動量の大きさは共通である. この大きさを p_{2c} とする. 4 元運動量の和の 2 乗を s とすると, 重心系では

$$s \equiv \sum_{\mu=0}^3 (p_1^\mu + p_2^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = \left(\frac{E_{1c} + E_{2c}}{c}\right)^2 \quad (22)$$

式 (21) と式 (22) を解くと, 粒子 m_2 の重心系でのエネルギー E_{2c} , 運動量 p_{2c} , 速さ v_{2c} が得られる.

$$E_{2c} = \frac{(s + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2)c}{2\sqrt{s}} \quad (23)$$

$$p_{2c} = \frac{[s - (m_1 c + m_2 c)^2]^{\frac{1}{2}} [s - (m_1 c - m_2 c)^2]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s}} \quad (24)$$

$$v_{2c} \equiv \frac{p_{2c} c^2}{E_{2c}} \quad (25)$$

入射方向と逆方向に速度 v_{2c} でローレンツ変換すると, 実験質系に移る. 散乱粒子の運動量は

$$p_{3L} \cos \theta_L = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{2c}}{c}\right)^2}} \left(p_{3c} \cos \theta_c + \frac{E_{3c} v_{2c}}{c^2} \right) \quad (26)$$

$$p_{3L} \sin \theta_L = p_{3c} \sin \theta_c \quad (27)$$

したがって, 散乱角度の変換は

$$\tan \theta_L = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{2c}}{c}\right)^2} \frac{\sin \theta_c}{\gamma + \cos \theta_c}, \quad \gamma = \frac{v_{2c}}{v_{3c}} \quad (28)$$

ここで, 式 (25) から

$$v_{3c} = \frac{p_{3c} c^2}{E_{3c}} \quad (29)$$

を用いた.

この変換則は, 非相対論的極限をとれば, 非相対論の場合の式 (20) に帰着する. 相対論的なエネルギーから静止質量を引いて, 非相対論的なエネルギー E_{nonrel} が定義される. 換算質量 $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ と重心系での運動量 $p_{1c} = p_{2c}$ を用いて

$$E_{nonrel} = \sqrt{s}c - m_1 c^2 - m_2 c^2 \ll m_1 c^2 + m_2 c^2 \quad (30)$$

$$E_{nonrel} \approx \frac{p_{2c}^2}{2m} \quad (31)$$

これは式 (10) の相対運動の運動エネルギーに対応している.

3 散乱断面積と散乱問題の境界条件

3.1 散乱断面積

散乱問題を扱うに当たり、この問題を評価するために意味のある物理量を定義する。図7のように、入射する粒子は z 軸の正方向に向かって、入射面に垂直な単位断面積当たり、単位時間に j_z^{in} 個入射してくるとする。このような粒子の流れを表す量 $j_z^{in}(\mathbf{x}, t)$ 個/sはフラックスと呼ばれる。

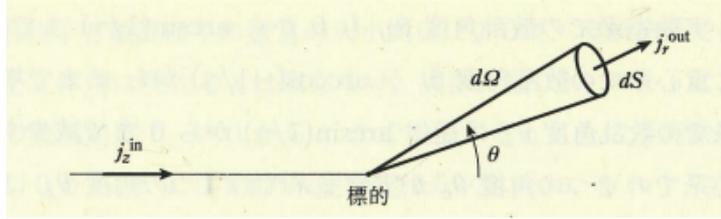


図7 原点に置かれた標的による散乱。入射粒子は z 軸にそって入射し、天頂角 θ 、方位角 ϕ の方向に粒子が散乱される。散乱粒子は立体角 Ω が見込む面積 dS をカバーする検出器で観測される。

天頂角 θ 、方位角 ϕ の方向に散乱された粒子を十分遠方にある粒子検出器で検出する場合を考えよう。単位時間当たり、単位断面積当たりの動径方向外向きのフラックスを $j_r^{out}(\mathbf{x}, t)$ とする。原点を中心とする半径 r の球面上の微小面積要素に対して垂直な方向に、これを通して単位時間あたりに出てくる粒子の数を ΔN とすると、

$$\Delta N = j_r^{out}(\mathbf{x}, t)dS \quad (32)$$

で与えられる。検出器の動径方向の距離を r 、検出器の検出する領域は微小立体角 $d\Omega$ であるとすると、微小面積要素は $dS = r^2 d\Omega$ で与えられるから、単位時間あたりに検出される粒子の数は

$$\Delta N = j_r^{out}(\mathbf{x}, t)r^2 d\Omega \quad (33)$$

となる。

単位時間に単位の断面積を通して入射してくる粒子に対して検出される粒子の数を考える。検出される粒子の数 ΔN を入射粒子のフラックス j_z^{in} で割った量を、 $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega$ とする。物理量 O の次元を $[O]$ で表すと、 $[\Delta N] = s^{-1}$ であり、 $[j_z^{in}] = cm^{-2} \cdot s^{-1}$ である。したがって $[\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega] = cm^2$ となり、面積の次元を持つ。

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega = \frac{\Delta N}{j_z^{in}(\mathbf{x}, t)} = \frac{j_r^{out}(\mathbf{x}, t)r^2 d\Omega}{j_z^{in}(\mathbf{x}, t)} \quad (34)$$

そこでこの量を、微分散乱断面積と呼び、全立体角について積分した量を全断面積 σ と呼ぶ。

$$\sigma = \int_V d\Omega \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \int_V d\theta d\phi \sin\theta \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \quad (35)$$

全断面積は単位時間当たり、1個の粒子が入射したとき、散乱される全粒子の数を表している。古典力学で考えると、標的として完全に反射する円盤をおいたとき、全散乱断面積は円盤の面積に他ならない。

実際の実験は標的が静止している系、すなわち実験室系で行われる。一方散乱断面積を求めるのは重心系を用いた方が容易である。そこで散乱断面積の変換則を求める。非相対論では、フラックスは入射粒子と標的粒子の相対速度のみに依るので、重心系と実験室系では同じである。実験室系での微小立体角要素を $d\Omega_L = \sin\theta_L d\theta_L d\phi_L$ 、重心系での微小立体角要素を $d\Omega_c = \sin\theta_c d\theta_c d\phi_c$ とする。重心系から実験室系への角度の変換公式 (20) を用いると

$$\begin{aligned}\sin\theta_L &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2\theta_L}} \\ &= \sqrt{\frac{\tan^2\theta_L}{1 + \tan^2\theta_L}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2\theta_c}{(\gamma + \cos\theta_c)^2} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2\theta_c}{(\gamma + \cos\theta_c)^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2\theta_c}{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\tan\theta_L &= \frac{1}{\cos^2\theta_L} d\theta_L \\ &= \left(1 + \frac{\sin^2\theta}{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c}\right) d\theta_L \\ &= \frac{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c}{(\gamma + \cos\theta_c)^2} d\theta_L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\tan\theta_L &= \frac{|\cos\theta_c(\gamma + \cos\theta_c) + \sin^2\theta_c|}{(\gamma + \cos\theta_c)^2} d\theta_c \\ &= \frac{|\gamma\cos\theta_c|}{(\gamma + \cos\theta_c)^2} d\theta_c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\theta_L &= \frac{(\gamma + \cos\theta_c)^2}{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c} \frac{|\gamma\cos\theta_c + 1|}{(\gamma + \cos\theta_c)^2} d\theta_c \\ &= \frac{|\gamma\cos\theta_c + 1|}{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c} d\theta_c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Omega_L &= \frac{\sin\theta_c}{((\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c)^{\frac{1}{2}}} \frac{|\gamma\cos\theta_c + 1|}{(\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c} d\theta_c d\phi_c \\ &= \frac{|\gamma\cos\theta_c + 1|}{((\gamma + \cos\theta_c)^2 + \sin^2\theta_c)^{\frac{3}{2}}} d\theta_c d\phi_c\end{aligned}$$

以上により,

$$d\Omega_L = \frac{|1 + \gamma \cos \theta_c|}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{\frac{3}{2}}} d\Omega_c \quad (36)$$

となる.

したがって重心系から実験室系への微分散乱断面積の変換は

$$\frac{d\sigma(\theta_L, \phi_L)}{d\Omega_L} = \frac{d\Omega_c}{d\Omega_L} \frac{d\sigma(\theta_c, \phi_c)}{d\Omega_c} = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{\frac{3}{2}}}{|1 + \gamma \cos \theta_c|} \frac{d\sigma(\theta_c, \phi_c)}{d\Omega_c} \quad (37)$$

となる. なお, 全断面積は単位時間当たり, 1 個の粒子が入射したとき, 散乱される全粒子の数を表しているのので, 重心系と実験室系で同じ値となる.

$$\sigma = \int_V d\Omega_c \frac{d\sigma}{d\Omega_c} = \int_V d\Omega_L \frac{d\sigma}{d\Omega_L} \quad (38)$$

3.2 散乱問題の境界条件

式 (10) の相対運動の運動エネルギー E を用いると, 相対運動のエネルギー固有値方程式は以下になる.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(\mathbf{x}) + V u(\mathbf{x}) = E u(\mathbf{x}) \quad (39)$$

中心力のポテンシャルの場合, 波動関数は球面座標 r, θ, ϕ で変数分離できる.

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\chi_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (40)$$

エネルギー固有値方程式は, 動径方向の有効ポテンシャル $V_{eff}(r)$ を用いて

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + V_{eff}(r) \chi_l = E \chi_l \quad (41)$$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (42)$$

となる. 実際の実験で散乱粒子を検出するのは, 散乱の原因となるポテンシャルが存在するミクロスケールの領域に比べ十分遠方の位置である. したがって, $r \rightarrow \infty$ の極限を考えればよく, この極限においては $V(r) \rightarrow 0$ かつ $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \rightarrow 0$ としてよい. よって $r \rightarrow \infty$ で,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) \chi_l(r) = 0 \quad (43)$$

$$k = \frac{mv}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (44)$$

となる.

この方程式の独立な解は 2 つある. それらの係数を f_l^m, g_l^m とする.

$$\chi_l(r) = f_l^m e^{ikr} + g_l^m e^{-ikr} \quad (45)$$

これらの2つの解の物理的な意味を見るために、角振動数 $\omega = E/\hbar$ とおいて時間依存性まであらわに書くと、2つの独立な解は

$$\psi^{out}(r, \theta, \phi, t) \equiv u^{out}(r, \theta, \phi)e^{-i\omega t} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (46)$$

$$\psi^{in}(r, \theta, \phi, t) \equiv u^{in}(r, \theta, \phi)e^{-i\omega t} = \frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (47)$$

となる。前者の波動関数 ψ^{out} は散乱の中心から外へ出ていく球面波を表している。一方、後者の波動関数 ψ^{in} は散乱の中心に入ってくる球面波を表している。

ここで散乱問題に特有の波動関数の境界条件を設定する。3次元の散乱問題では、入射波としてはある方向から入ってくる平面波を考える。しかし散乱波としては外に出ていく球面波を考える。そこで散乱問題に適した物理的な境界条件とは、球面上の無限遠で内向きに入ってくる球面波がないという形で定式化できる。

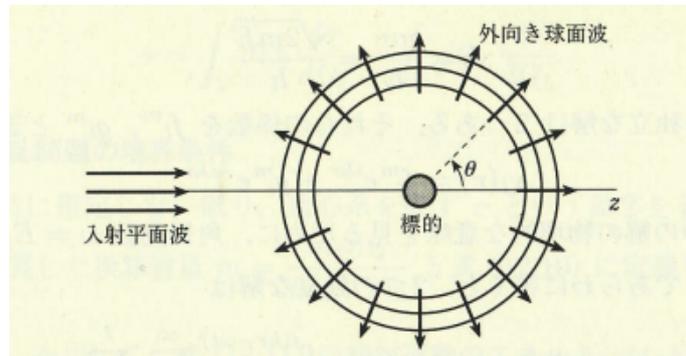


図8 散乱問題の無限遠での境界条件。z軸正方向に入射してくる平面波と、散乱中心から外向きに進む散乱球面波のみがある。

結局平面波で表せられる入射波 $Ae^{ikz-i\omega t}$ 以外に、外向きの球面波 $\psi^{out}(r, \theta, \phi, t)$ で表される散乱波だけがあるという条件で、波動関数の漸近形が与えられるのが、3次元の散乱問題の境界条件である。

弾性散乱の場合、入射波と散乱波の粒子は同一だから、それらの重ね合わせが全体としての波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ となる。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(r, \theta, \phi)e^{i\omega t} \rightarrow A \left[e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \phi) \right] e^{-i\omega t}, \quad r \rightarrow \infty \quad (48)$$

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{A} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (49)$$

散乱波の角度依存性を表すこの関数 $f(\theta, \phi)$ を散乱振幅と呼ぶ。Aは波動関数の規格化定数である。散乱問題では入射波に対する散乱波の相対的な大きさに興味があるので、通常は規格化定数Aを定める必要はない。

3.3 散乱振幅と散乱断面積

散乱振幅から物理量を取り出すために、確率の流れ $j(\mathbf{x}, t)$ を求める。 x_k 方向の確率の流れは $j_k(\mathbf{x}, t)$ は

$$j_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left((\psi(\mathbf{x}, t))^* \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial (\psi(\mathbf{x}, t))^*}{\partial x_k} \right) \quad (50)$$

で定義される。

入射波のフラックス j^{in} 及び、散乱波のフラックス j^{out} を求める。入射波の波動関数として式 (48) の右辺第 1 項 $Ae^{i(kz-\omega t)}$ を代入すると、確率の流れは z 成分だけになり、 x, y 平面の単位断面積あたりに単位時間に入射する粒子の数を表している。

$$j_z^{in} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = v|A|^2 \quad (51)$$

同様に、散乱波の波動関数として式 (48) の右辺第 2 項 $A \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} f(\theta, \phi)$ を代入し、散乱波のフラックス j^{out} を求める。散乱波のフラックスは半径 r の球面上の点 (θ, ϕ) を通って単位時間に外へ出ていく散乱粒子の数を表している。

$$j_r^{out}(r, \theta, \phi) = \frac{v|A|^2 |f(\theta, \phi)|^2}{r^2} \quad (52)$$

式 (34) で与えたように、微分散乱断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ とは単位立体角あたり、単位時間に外へ出ていく散乱粒子の数を、単位断面積あたり、単位時間に入射する粒子の数で割ったものだから、

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{r^2 j_r^{out}(r, \theta, \phi)}{j_z^{in}} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (53)$$

となる。なお、式 (53) の微分散乱断面積は重心系での値なので、式 (37) を用いて実験室系での値に変換する。

4 参考文献

- [1] 坂井典佑 「量子力学 II」 (培風館)