

# 理論と実験の比較

田中東樹

2022年12月5日

Fig. 1.

## 弾性散乱の典型的なエネルギースペクトル

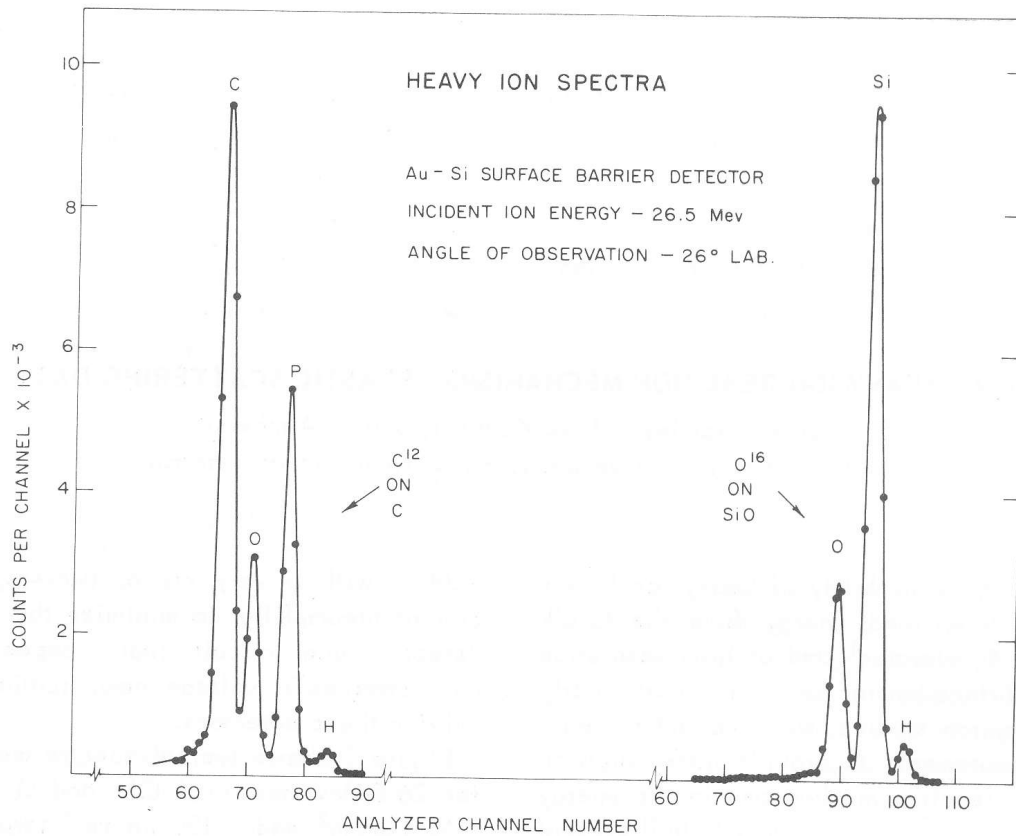


Fig. 1. 弾性散乱の典型的なエネルギースペクトル

Fig. 1. の横軸はエネルギーに対応する量、縦軸は検出された粒子の数を表している。それぞれのピークに対応する粒子を決定する方法の一つとして実験ゼミの課題1で取り組んだものが考えられる。例えば Fig. 1. の左側のスペクトルに関して課題1のプログラムを実行すると図1から図4が得られた。

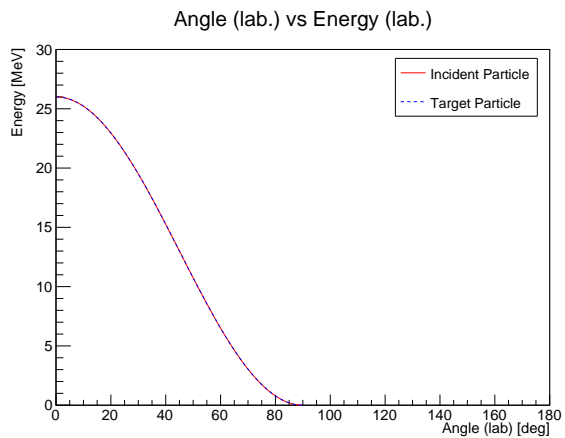


図 1:  $^{12}\text{C}$  と C

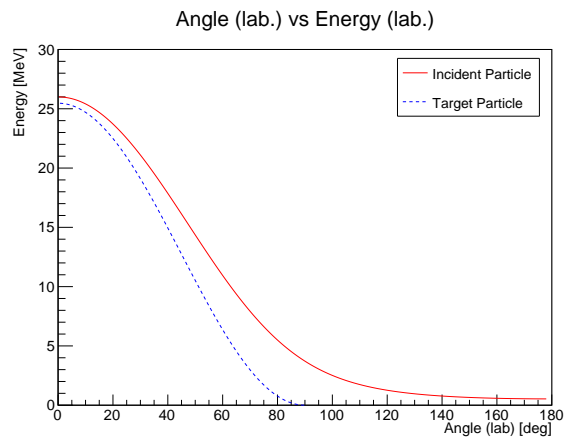


図 2:  $^{12}\text{C}$  と O

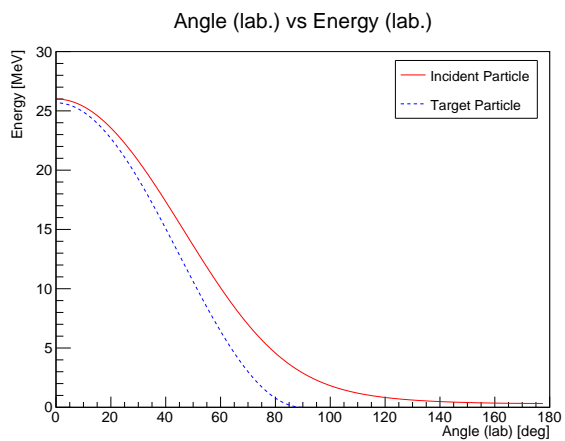


図 3:  $^{12}\text{C}$  と P

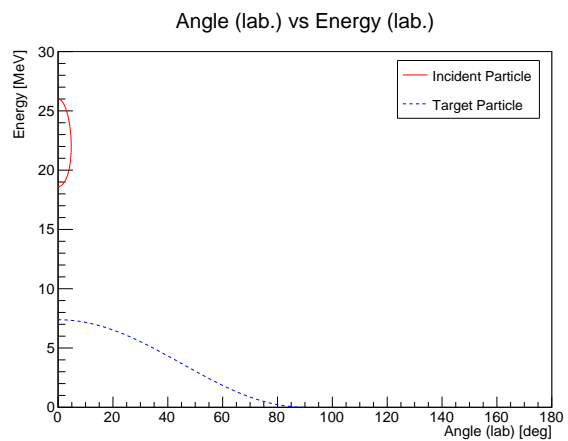


図 4:  $^{12}\text{C}$  と H

図 1 から図 4 の角度が 26 度の点がそれぞれの粒子が持つエネルギーである。しかし図を見れば分かるように、Fig. 1. とはいくつか矛盾がある。一つ目は H と散乱した  $^{12}\text{C}$  が 26 度で検出されていること、二つ目は散乱粒子の持つエネルギーの大小が O の場合と P の場合で違っていることである。一つ目の矛盾点は図 4 を見れば明らか。二つ目の矛盾点は詳細な値をとると分かる。26 度で検出される散乱粒子のエネルギーは O と散乱したとき約 22.7 MeV、P と散乱したとき約 22.3 MeV となって、大小関係が Fig. 1. と異なっている。

Fig. 2.

# $^{16}\text{O}$ と Au の散乱

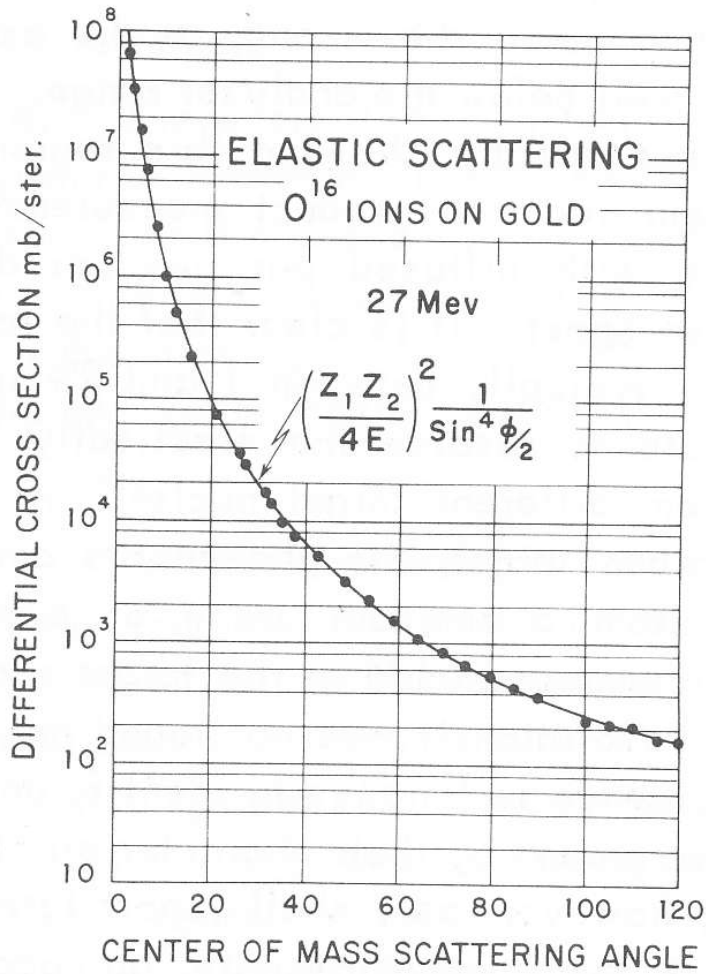


Fig. 2.  $^{16}\text{O}$  と Au の散乱

Fig. 2. の横軸は重心系における散乱角，縦軸は微分散乱断面積を表している．クーロン散乱における微分散乱断面積はよく調べられていて，それは

$$\frac{d\sigma_c(\phi)}{d\Omega} = \left(\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} = \left(\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} \quad (1)$$

と表される． Fig. 2. を見ると理論と実験が整合していることが分かる．

Fig. 3.

## 異なるエネルギーでの $^{16}\text{O}$ と $\text{C}$ の散乱

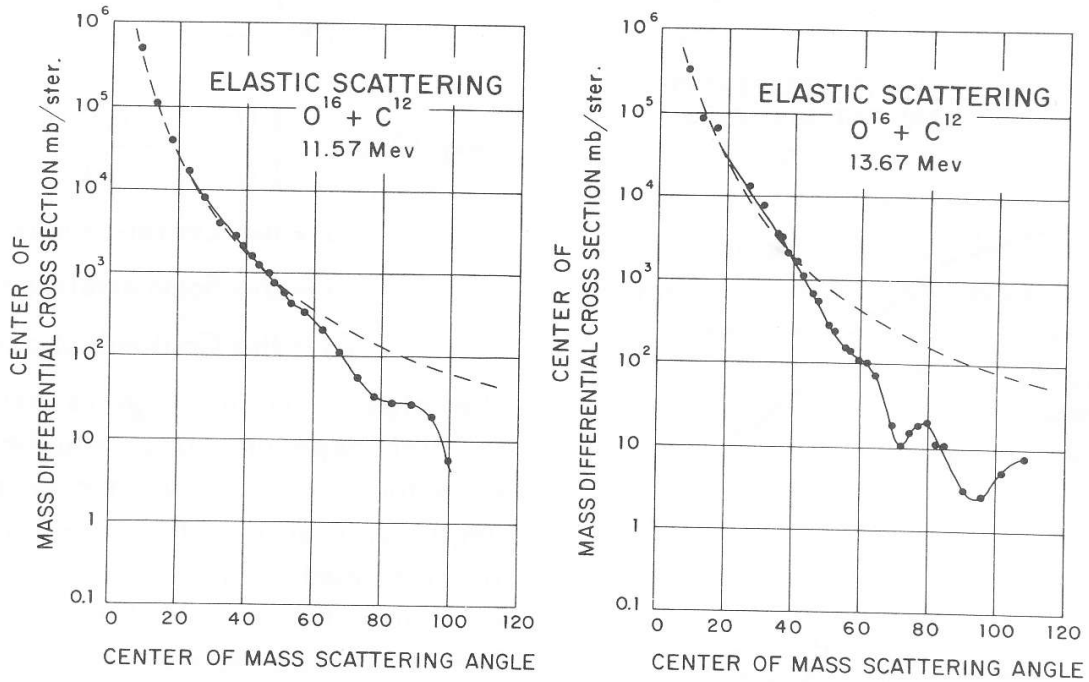


Fig. 3. 異なるエネルギーでの  $^{16}\text{O}$  と  $\text{C}$  の散乱

Fig. 3. の横軸は重心系における散乱角，縦軸は微分散乱断面積を表している．どちらの図でも 40 度より小さい角度では理論と実験が整合しているが，それ以降は理論値と比べて実験値が小さくなっていることが分かる．またグラフは単調減少する関数に周期性を持った関数が重なったように見える．この周期性はブレイ模型から予測されるものと整合するが，剛体球ポテンシャルに対して第 0 次ボルン近似を行っても現れる．

## 剛体球ポテンシャルに対する第0次ボルン近似

まずはシュレディンガー方程式を積分方程式に書き直す。シュレディンガー方程式は  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,  $U(\mathbf{r}) = 2mV(\mathbf{r})/\hbar$  とおくと

$$(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \quad (2)$$

と書ける。式 (2) の形の微分方程式は良く調べられていて、その一般解は式 (2) の特解と

$$(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = 0 \quad (3)$$

の一般解の和で表されることが分かっている。式 (3) は自由粒子のシュレディンガー方程式であるから、その一般解は既知である。よって式 (2) の微分方程式の特解を求めれば良い。それにはグリーン関数  $G(\mathbf{r})$  を利用すると楽である。 $G(\mathbf{r})$  を用いると特解は

$$\chi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}')$$

と表せる。 $G(\mathbf{r})$  は

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

によって定まる。実際に計算して  $G(\mathbf{r})$  を求めると

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

であることが分かる。ここで十分遠方における波動関数の境界条件は

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\phi)$$

と書けることであつた。よって式 (3) の一般解から  $e^{ikz}$  を選ぶと波動関数は

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \quad (kr' = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' \text{である。})$$

と書ける。つまり散乱振幅は

$$f(\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \quad (4)$$

と表せる。ここで第0次ボルン近似とは式 (4) において

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikz} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

とすることである。これにより球対称ポテンシャルならば

$$\begin{aligned} f(\phi) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr \quad \left( q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \sin \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける ( $\phi$  は重心系における散乱角)。剛体球ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

を考えると

$$f(\phi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{V_0 a^3}{(qa)^2} \left( \frac{\sin(qa)}{qa} - \cos(qa) \right)$$

となる。これから得られる微分散乱断面積が  $\phi$  によって振動する関数となっている。

Fig. 4.

# $^{16}\text{O}$ と Mg, $^{16}\text{O}$ と Al の散乱

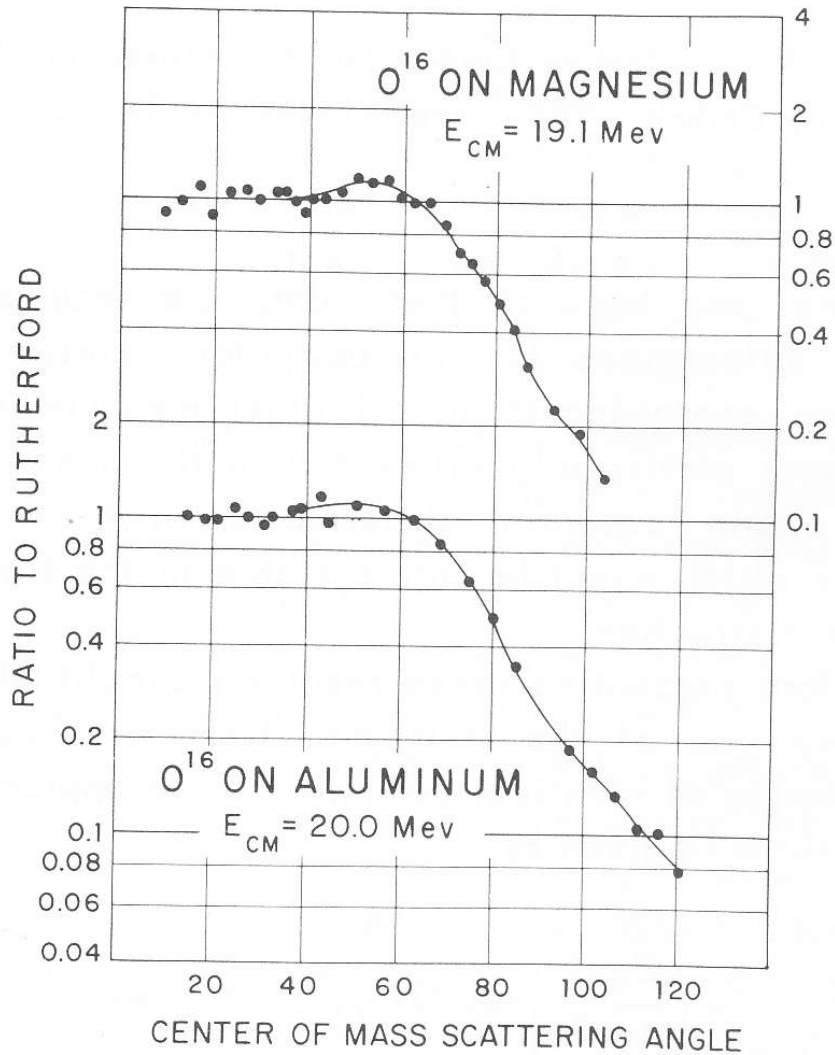


Fig. 4.  $^{16}\text{O}$  と Mg,  $^{16}\text{O}$  と Al の散乱

Fig. 4. の横軸は重心系における散乱角，縦軸は微分散乱断面積の比（実験値/理論値）を表している．この場合でも 40 度より小さい角度では理論と実験が整合しているが，それ以降は理論値と比べて実験値が指数関数的に小さくなっていることが分かる．また比が 1 を超える角度がある．これは波動性による干渉が原因である．

Fig. 5.

# 微分散乱断面積のエネルギー依存性

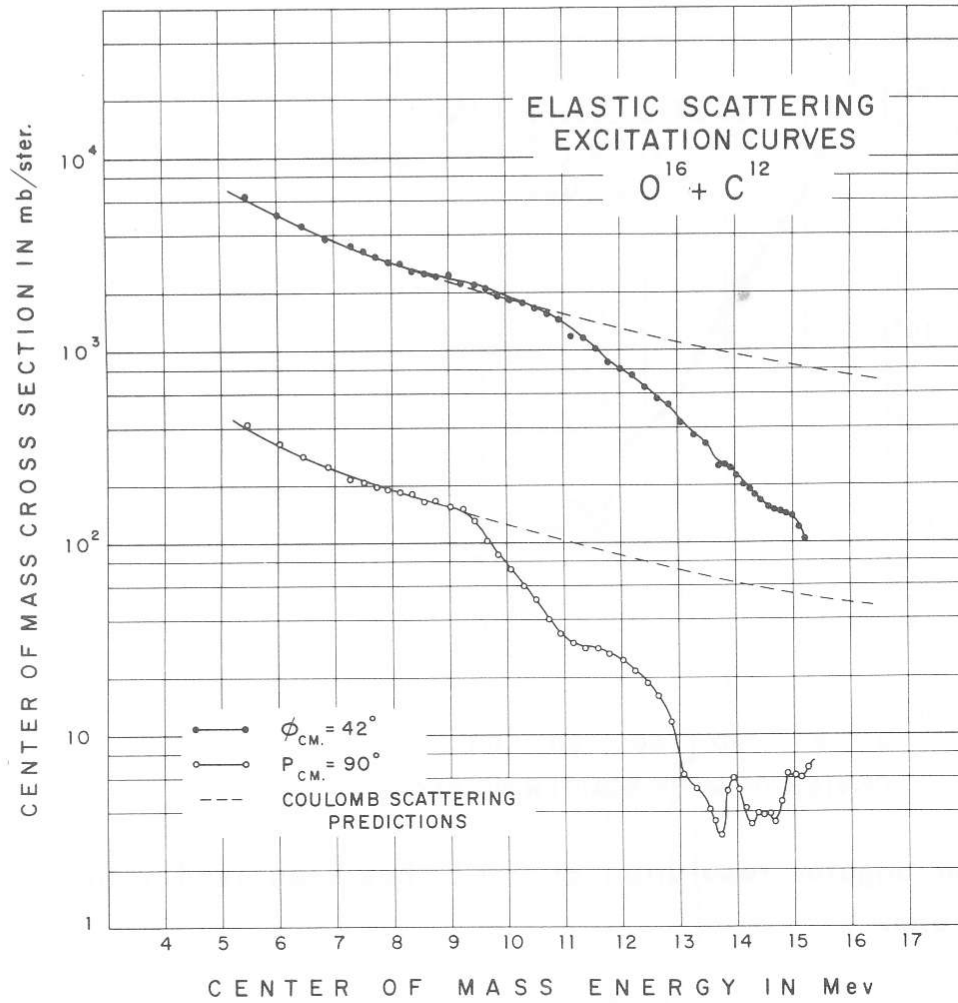


Fig. 5. 異なる散乱角での  $^{16}O$  と  $C$  の散乱



Fig. 5. の横軸は重心系におけるエネルギー，縦軸は微分散乱断面積を表している．微分散乱断面積は式 (1) で与えられ， $1/E^2$  に比例する．古典的なラザフォード散乱から導かれる最接近距離は

$$D = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} \right)$$

で与えられる．

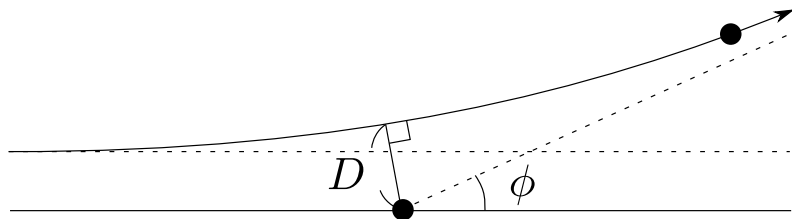


図 5: 最接近距離

Fig. 3. と Fig. 4. ではある散乱角以上から，Fig. 5. ではあるエネルギー以上から理論値と実験値の乖離がみられる．最接近距離が散乱角とエネルギーに対する減少関数であることを考慮すると，それは最接近距離が核力の影響を無視できないほど小さくなった結果，理論値とのズレが発生し始めたということだろう．Fig. 2. では乖離が見られなかったが，それは最接近距離が余り小さくならなかったからだと考えられる．

Fig. 6.

# 異なる散乱角での $^{16}\text{O}$ と $^{16}\text{O}$ の散乱

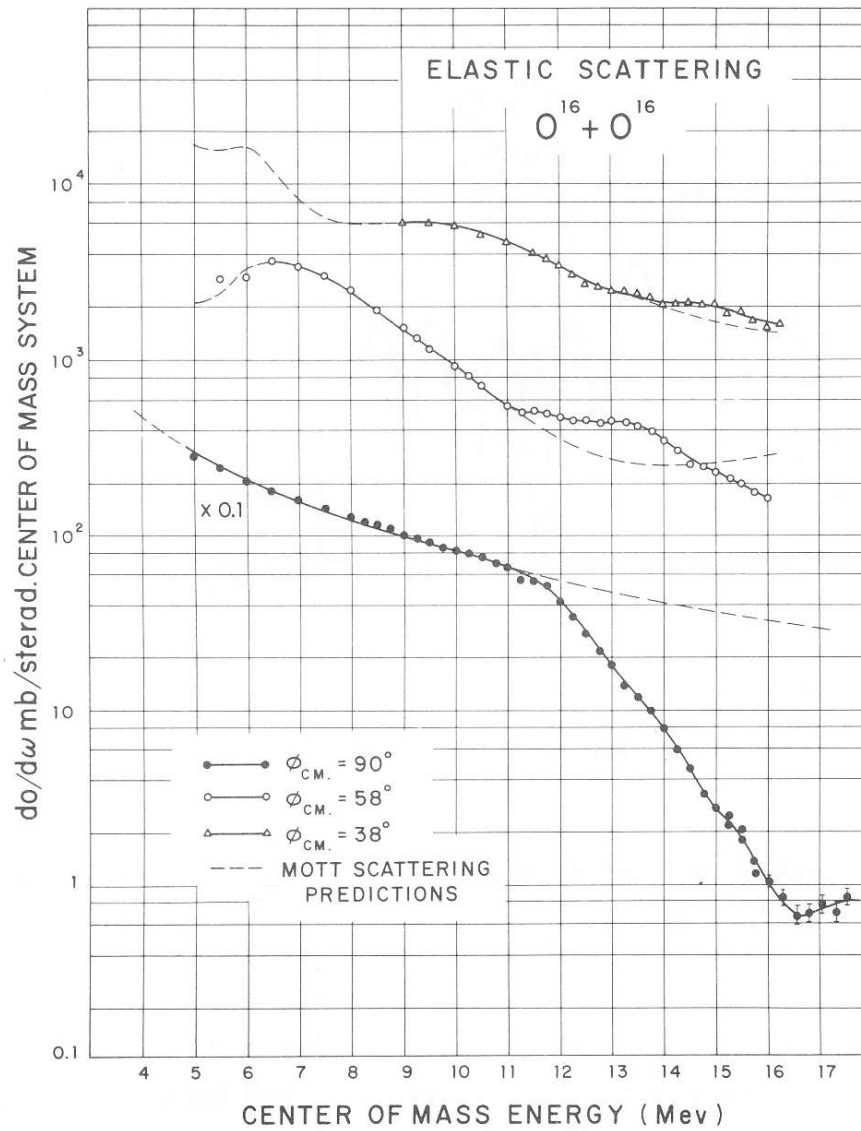


Fig. 6. Excitation Curves for  $\text{O}^{16}$  Elastically Scattered by Oxygen.

Fig. 6. 異なる散乱角での  $^{16}\text{O}$  と  $^{16}\text{O}$  の散乱

Fig. 6. の横軸は重心系におけるエネルギー，縦軸は微分散乱断面積を表している．同種粒子の微分散乱断面積はモットの公式で与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega} &= \left(\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{2mv^2}\right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} + \frac{1}{\cos^4(\phi/2)} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2S} \frac{2}{2S+1} \frac{1}{\sin^2(\phi/2)\cos^2(\phi/2)} \cos\left(\frac{mcZZ'\alpha}{\hbar k} \ln \tan^2(\phi/2)\right) \right] \\ &= \left(\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{4E}\right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} + \frac{1}{\cos^4(\phi/2)} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{2S} \frac{2}{2S+1} \frac{1}{\sin^2(\phi/2)\cos^2(\phi/2)} \cos\left(\frac{mcZZ'\alpha}{\hbar k} \ln \tan^2(\phi/2)\right) \right]\end{aligned}$$

微分散乱断面積は式 (1) と同じように  $1/E^2$  に比例する．Fig. 5. の場合と同様にあるエネルギー以上から理論値と実験値の乖離がみられるが，散乱角が小さいと最接近距離は大きくなるためズレは小さくなっている．

## 参考文献

- [1] D. A. Bromley, J. A. Kuehner, and E. Almqvist, “Heavy-ion Reaction Mechanisms. Elastic Scattering Data,” *Proc. of the Second Conference on Interactions of Complex Nuclei* (New York: John Wiley, 1960).
- [2] J. Sakurai, and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics* (3rd ed.) (Cambridge: Cambridge University Press, 2020), p.384.