坂井典佑「量子力学 II」(培風館)

クーロン場による散乱・粒子の統計性

2022 年 11 月 14 日

京都大学理学部物理科学系 3 回生

原　慧人

1　クーロン場による散乱

電荷 Ze と電荷 $Z'e$ をもつ粒子の衝突を考える．微細構造定数 $\alpha \coloneqq e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \simeq \frac{1}{137}$ を用いると，クーロン力のポテンシャルは

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{ZZ'\alpha\hbar c}{r} \tag{1}$$

となる．このようにポテンシャルが $1/r$ に比例する力を長距離力という．有効ポテンシャルは

$$V_{\rm eff}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \tag{2}$$

なので，散乱振幅を式 (12.38) のように定義したり，式 (13.19) のように部分波展開での位相のずれ δ_l を用いて与えることはできない．しかし，クーロン力に対するシュレディンガー方程式は厳密に解くことができる．

放物線座標

図 1 のような球面座標 (r, θ, ϕ) または直交座標 (x, y, z) から放物線座標 (ξ, η, ϕ) への変換は

$$\begin{aligned} \xi &= r(1-\cos\theta) = r - z = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - z \\ \eta &= r(1+\cos\theta) = r + z = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる．ここで $\rho \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}$ とすると

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi\eta} &= \sqrt{x^2+y^2} = \rho \\ \frac{-\xi+\eta}{2} &= z \end{aligned} \tag{4}$$

となるので，$\xi = \xi_0 (= constant)$ のとき，

$$z = \frac{-\xi_0+\eta}{2} = \frac{1}{2}\Big(-\xi_0 + \frac{\rho^2}{\xi_0}\Big) \tag{5}$$

となり，これは図 2 のような ρz 平面での放物線を表す．$\eta = constant$ の場合も同様である．また，

$$\begin{aligned} x = \rho\cos\phi = \sqrt{\xi\eta}\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi = \sqrt{\xi\eta}\sin\phi \\ r = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\rho}{r} = \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta} \end{aligned} \tag{6}$$

である．

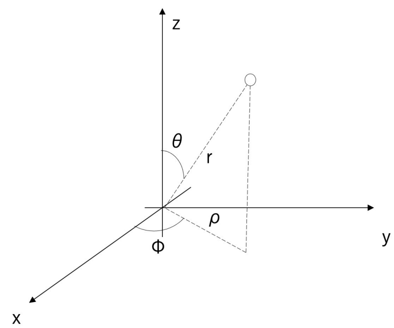

図 1: 球面座標と直交座標

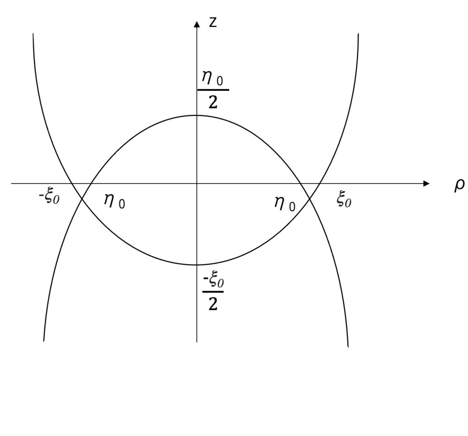

図 2: ρz 平面での放物線

式 (3) と式 (6) より，微分演算子は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\xi}{r}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{2}{\xi+\eta}\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\eta} = r\sin\theta\Big(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\Big) = \sqrt{\xi\eta}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

と表すことができる．従って，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\frac{2}{\xi+\eta}(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)\Big\{\Big(\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)^2\Big)\frac{2}{\xi+\eta}(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^3(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)\Big\{\frac{\xi+\eta}{2}(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^3\Big\{\frac{\xi+\eta}{2}(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)+\frac{\xi+\eta}{2}(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)^2\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)+(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)^2\Big\},\\
\\
&\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\frac{\xi+\eta}{2\sqrt{\xi\eta}}\Big(\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\xi\partial_\xi-\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\eta\partial_\eta\Big)\Big\{\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}\Big(\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\xi\partial_\xi-\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\eta\partial_\eta\Big)\Big\}\\
=&\frac{2}{\xi+\eta}(\partial_\xi-\partial_\eta)\Big\{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}(\partial_\xi-\partial_\eta)\Big\}\\
=&\frac{2}{\xi+\eta}\Big\{\frac{2(\eta-\xi)}{\xi+\eta}(\partial_\xi-\partial_\eta)+\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}(\partial_\xi-\partial_\eta)^2\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{(\eta-\xi)(\partial_\xi-\partial_\eta)+\xi\eta(\partial_\xi-\partial_\eta)^2\Big\},\\
\\
&\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)+(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)^2+(\eta-\xi)(\partial_\xi-\partial_\eta)+\xi\eta(\partial_\xi-\partial_\eta)^2\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{\eta\partial_\xi+\xi\partial_\eta+(\xi\partial_\xi+\eta\partial_\eta)^2+\xi\eta(\partial_\xi-\partial_\eta)^2\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{\eta\partial_\xi+\xi\partial_\eta+\xi(\partial_\xi+\xi{\partial_\xi}^2)+2\xi\eta\partial_\xi\partial_\eta+\eta(\partial_\eta+\eta{\partial_\eta}^2)+\xi\eta({\partial_\xi}^2-2\partial_\xi\partial_\eta+{\partial_\eta}^2)\Big\}\\
=&\Big(\frac{2}{\xi+\eta}\Big)^2\Big\{(\xi+\eta)(\partial_\xi+\partial_\eta)+(\xi^2+\xi\eta){\partial_\xi}^2+(\eta^2+\xi\eta){\partial_\eta}^2\Big\}\\
=&\frac{4}{\xi+\eta}\Big\{(\partial_\xi+\partial_\eta)+\xi{\partial_\xi}^2+\eta{\partial_\eta}^2\Big\}\\
=&\frac{4}{\xi+\eta}\Big\{\partial_\xi(\xi\partial_\xi)+\partial_\eta(\eta\partial_\eta)\Big\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となるので，

$$
\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\partial r\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}=\frac{4}{\xi+\eta}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\Big\}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\tag{9}
$$

となる．

放物線座標でのシュレディンガー方程式

波動関数を u とすると，クーロンポテンシャルのもとでの定常状態の相対座標についてのシュレディンガー方程式は

$$\begin{aligned} Eu &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big\}u+\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{r}u \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\frac{4}{\xi+\eta}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\Big\}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]u+\frac{2ZZ'\alpha\hbar c}{\xi+\eta}u \end{aligned} \tag{10}$$

となる．ここで m は換算質量で，r は相対座標である．波動関数は方位角 ϕ に依らないとして，

$$u = u(\xi,\eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \tag{11}$$

と仮定すると，$\dfrac{\partial}{\partial\phi}u = 0$ なので，式 (10) より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{u}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\Big\}u-\frac{mZZ'\alpha c}{\hbar}+\frac{mE}{2\hbar^2}(\xi+\eta), \\ &= \frac{1}{\Xi}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi\frac{d}{d\xi}\Big)\Xi+\frac{1}{H}\frac{d}{d\eta}\Big(\eta\frac{d}{d\eta}\Big)H-\frac{mZZ'\alpha c}{\hbar}+\frac{mE}{2\hbar^2}(\xi+\eta) \end{aligned} \tag{12}$$

なので，変数分離すると

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Xi}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi\frac{d}{d\xi}\Big)\Xi+\frac{mE}{2\hbar^2}\xi = c_1, \\ \frac{1}{H}\frac{d}{d\eta}\Big(\eta\frac{d}{d\eta}\Big)H+\frac{mE}{2\hbar^2}\eta = c_2, \\ c_1+c_2-\frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

となる．整理すると，$k := \sqrt{2mE}/\hbar$ として

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\xi}\xi\frac{d\Xi}{d\xi}+\Big(\frac{k^2}{4}\xi-c_1\Big)\Xi = 0, \\ \frac{d}{d\eta}\eta\frac{dH}{d\eta}+\Big(\frac{k^2}{4}\eta-c_2\Big)H = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

となる．

境界条件

一般に，波動関数を球面波展開したとき，中心から出ていく球面波 e^{ikr} と外から中に入っていく球面波 e^{-ikr} が存在する．しかし，物理的には，クーロンポテンシャルがある場合も，外から中に入ってくる球面波は入射波からの寄与だけである．従って，境界条件は入射方向の無限遠では漸近的に入射波に近づくことである．
以下では入射波が

$$u^{in} = e^{ikz}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{15}$$

で与えられる場合を考える．$z\to-\infty$ という極限をとることは，球面座標では $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ で $r\to\infty$ という極限をとることに対応するので，式 (3) より，放物線座標では $\xi\to\infty$ の極限をとることに対応する[1]．$z = (-\xi+\eta)/2$ なので，境界条件は

$$u(\xi,\eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \to e^{ikz} = e^{-ik\xi/2}e^{ik\eta/2} \tag{16}$$

[1] 教科書の図 13.10 からもわかる．また，このとき $\eta = r(1+\cos\theta)$ は任意の非負の実数をとる．

である．これが任意の η で成り立つので

$$H(\eta) = e^{ik\eta/2} \tag{17}$$

となる[2]．このとき

$$\frac{d}{d\eta}\eta\frac{dH}{d\eta} + \frac{k^2}{4}\eta H = \eta\frac{d^2}{d\eta^2}H + \frac{d}{d\eta}H + \frac{k^2}{4}\eta H = \Big\{(\frac{ik}{2})^2\eta + \frac{ik}{2} + \frac{k^2}{4}\Big\}e^{ik\eta/2} = \frac{ik}{2}H \tag{18}$$

なので，$H(\eta) = e^{ik\eta/2}$ は式 (14) を満たし，

$$c_2 = \frac{ik}{2}, \quad c_1 = \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} - c_2 = \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} - \frac{ik}{2} \tag{19}$$

である．$\Xi(\xi)$ については

$$\Xi(\xi) = e^{-ik\xi/2}f(\xi) \tag{20}$$

とおく．

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}e^{-ik\xi/2}f(\xi) &= \Big(\frac{df}{d\xi} - \frac{ik}{2}f\Big)e^{-ik\xi/2} \\ \frac{d^2}{d\xi^2}e^{-ik\xi/2}f(\xi) &= \Big(\frac{d^2f}{d\xi^2} - 2\frac{ik}{2}\frac{df}{d\xi} + (-\frac{ik}{2})^2 f\Big)e^{-ik\xi/2} \end{aligned} \tag{21}$$

となることを用いると，式 (14) より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\xi}\xi\frac{d\Xi}{d\xi} + \Big(\frac{k^2}{4}\xi - c_1\Big)\Xi \\ &= \xi\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + \frac{d\Xi}{d\xi} + \Big(\frac{k^2}{4}\xi - c_1\Big)\Xi \\ &= \Big\{\xi\frac{d^2f}{d\xi^2} + \Big(1 - ik\xi\Big)\frac{df}{d\xi} + \Big(-\frac{ik}{2} + (-\frac{ik}{2})^2\xi + \frac{k^2}{4}\xi - c_1\Big)\Big\}e^{-ik\xi/2} \\ &= \Big\{\xi\frac{d^2f}{d\xi^2} + \Big(1 - ik\xi\Big)\frac{df}{d\xi} - \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar}\Big\}e^{-ik\xi/2} \end{aligned} \tag{22}$$

となるので，

$$\begin{aligned} 0 &= \xi\frac{d^2f}{d\xi^2} + \Big(1 - ik\xi\Big)\frac{df}{d\xi} - \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} \\ &= \xi\frac{d^2f}{d\xi^2} + \Big(1 - ik\xi\Big)\frac{df}{d\xi} - \gamma k f \end{aligned} \tag{23}$$

$$\gamma \coloneqq \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar k} = \frac{ZZ'\alpha c}{v}, \quad v \coloneqq \frac{\hbar k}{m} \tag{24}$$

となる．ただし，m は換算質量で v は相対速度.

合流型超幾何関数

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (b - z)\frac{du}{dz} - au = 0 \tag{25}$$

[2] $H(\eta)$ の不定性は $\Xi(\xi)$ にくりこむことにする．

というパラメータ a, b を含んだ微分方程式を合流型幾何微分方程式という．合流型超幾何微分方程式で，$(a, b, z) = (-i\gamma, 1, ik\xi)$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= ik\xi \frac{1}{(ik)^2}\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1 - ik\xi)\frac{1}{ik}\frac{du}{d\xi} - i\gamma u \\ &= \frac{1}{ik}\Big\{\xi\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1 - ik\xi)\frac{du}{d\xi} - \gamma k u\Big\} \end{aligned} \tag{26}$$

となるので，式 (23) は合流型超幾何微分方程式であることがわかる．合流型超幾何微分方程式の解で，原点で正則なものは合流型超幾何関数

$$F(a, b, z) \coloneqq \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b)z^s}{\Gamma(a)\Gamma(b+s)\Gamma(1+s)} = 1 + \frac{az}{1!b} + \frac{a(a+1)}{2!b(b+1)} + \cdots \tag{27}$$

で与えられる．ここで Γ はガンマ関数であり，

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \tag{28}$$

の積分を解析接続したものである．式 (23) の解で原点で正則なものは，規格化定数を C として

$$f(\xi) = CF(-i\gamma, 1, ik\xi) \tag{29}$$

となる．合流型超幾何関数とガンマ関数には

$$\begin{aligned} F(a, b, z) &= W_1(a, b, z) + W_2(a, b, z) \\ W_1 &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-z)^{-a} g(a, a-b+1, -z) \\ W_2 &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z (-z)^{a-b} g(1-a, b-a, z) \\ g(a, b, z) &\to 1 + \frac{ab}{1!z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!z^2} + \cdots, \quad |z| \to \infty \end{aligned} \tag{30}$$

という性質がある．

無限遠での波動方程式

式 (30) を用いると，$\xi \to \infty$ で

$$\begin{aligned} f(\xi) &= CF(-i\gamma, 1, ik\xi) = C\Big\{W_1(-i\gamma, 1, ik\xi) + W_2(-i\gamma, 1, ik\xi)\Big\} \\ &= C\Big\{\frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)}(-ik\xi)^{i\gamma} g(-i\gamma, -i\gamma, -ik\xi) + \frac{1}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi}(ik\xi)^{-i\gamma-1} g(1+i\gamma, 1+i\gamma, ik\xi)\Big\} \\ &\simeq \frac{Ce^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(1+i\gamma)}\Big\{e^{i\gamma \ln k\xi}\Big(1 + \frac{\gamma^2}{ik\xi}\Big) + \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi} \frac{e^{-i\gamma \ln k\xi}}{ik\xi}\Big\} \end{aligned} \tag{31}$$

となる．$\xi = r - z = r(1 - \cos\theta) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}$ となることを用いると，

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \Xi(\xi)H(\eta) = e^{ik(\eta-\xi)/2} f(\xi) = e^{ikz} f(\xi) \\ &\simeq \frac{Ce^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(1+i\gamma)}\Big\{e^{i\{kz + \gamma \ln k(r-z)\}}\Big[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)}\Big] + \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \frac{e^{i\{kr - \gamma \ln 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2}\}}}{2ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}}\Big\} \\ &= \frac{Ce^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(1+i\gamma)}\Big\{e^{i\{kz + \gamma \ln k(r-z)\}}\Big[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)}\Big] + \frac{1}{r} f_c(\theta) e^{i\{kr - \ln 2kr\}}\Big\}, \\ f_c(\theta) &= \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \frac{e^{-i\gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \tag{32}$$

となる．この波動関数 $u(r,\theta)$ の第 1 項目が入射波を表し，第 2 項目が散乱波を表す．どちらも無限遠で対数的に振動する位相を持っていることがわかる．ここで Γ 関数についての性質

$$
\begin{aligned}
\Gamma(-i\gamma)\Gamma(1+i\gamma) &= \frac{i\pi}{\sinh\gamma\pi} \\
|\Gamma(-i\gamma)| = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma\sinh\gamma\pi}}, &\quad |\Gamma(1+i\gamma)| = \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\sinh\gamma\pi}}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

を用いると,[3]

$$
\left|\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)}\right| = \gamma \tag{34}
$$

となるので，微分散乱断面積は

$$
\frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 = \left(\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\frac{ZZ'\alpha\hbar c}{2mv^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{35}
$$

となる．

このような散乱を Rutherford 散乱という．式 (32) に示すように，入射波も散乱波も位相が対数的に振動するため，位相のずれを定義できない．散乱振幅も対数的に振動する位相があるが，微分散乱断面積には対数的に振動する位相はない．しかし，陽子同士の散乱などの同種粒子の間の散乱や，陽子と反陽子のように強い相互作用が働く場合は振動する位相を観測することができる．

規格化定数を $C = v^{-\frac{1}{2}}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}$ とすると，波動関数は

$$
\begin{aligned}
u(r.\theta) &= e^{ikz}f(\xi) = e^{ikz}CF(-i\gamma,1,ik\xi) \\
&= e^{ikz}v^{-\frac{1}{2}}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}F(-i\gamma,1,ik\xi) \\
&= v^{-\frac{1}{2}}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}e^{ikr\cos\theta}F(-i\gamma,1,2ikr\sin^2\frac{\theta}{2})
\end{aligned}
\tag{36}
$$

である．式 (27) からわかるように $F(a,b,0)=1$ なので，原点での存在確率は

$$
|u(0)|^2 = |C|^2 = v^{-1}|\Gamma(1+i\gamma)|^2e^{-\gamma\pi} = \frac{\gamma\pi e^{-\gamma\pi}}{v\sinh\gamma\pi} = \frac{2\gamma\pi}{v(e^{2\gamma\pi}-1)} \tag{37}
$$

となる．ここで衝突の相対速度が十分大きいとき，$1 \ll v$，$|\gamma| = \left|\frac{ZZ'\alpha c}{v}\right| \ll 1$ なので

$$
|u(0)|^2 \simeq \frac{2\gamma\pi}{v(1+2\gamma\pi-1)} = \frac{1}{v} = \frac{m}{\hbar k} \tag{38}
$$

となり，クーロン力がない場合と一致する．これは，速度が大きければクーロン力の影響は小さくなることを表している．一方，衝突の相対速度が十分小さいとき，$1 \gg v$，$|\gamma| = \left|\frac{ZZ'\alpha c}{v}\right| \gg 1$ なので

$$
|u(0)|^2 \simeq \begin{cases} -\dfrac{2\gamma\pi}{v} & \gamma < 0 \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{2\gamma\pi}{ve^{2\gamma\pi}} & \gamma > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{39}
$$

となる．$\gamma = \frac{ZZ'\alpha c}{v}$ より，$\gamma < 0$ の場合はクーロン力が引力となり，$\gamma > 0$ の場合はクーロン力が斥力となる．

核反応では，核力は原子核同士が十分接近したところでのみ働く．原子核はどちらも正の電荷を持っているため，原子核間のクーロン力は斥力である．従って，この斥力ポテンシャルをトンネル効果で通り抜けて初めて核反応が起こる．

[3]式 (33) の $\Gamma(-i\gamma)\Gamma(1+i\gamma) = \frac{i\pi}{\sinh\gamma\pi}$ は相反公式という．式 (33) の残りの 2 式は Γ 関数についての性質 $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ を用いて示せる．

2　スピン $\frac{1}{2}$ の波動関数の合成

2 つのスピン $\frac{1}{2}$ の波動関数の合成

２つのスピン $\frac{1}{2}$ の粒子を軌道の自由度を除いて考える．スピン全角運動量を $\boldsymbol{S}$，それぞれの粒子のスピンを $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ とすると，スピンの合成則は

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2} \tag{40}$$

で与えられる．2 電子のスピン状態に相当するケットを展開するのには，$\boldsymbol{S}^2$ と S_z の固有ケットを用いることもできるし，S_{1z} と S_{2z} の固有ケットを用いることもできる．各演算子の固有値が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^2 = (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_1)^2 &: s(s+1)\hbar^2 \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} &: m\hbar \\ S_{1z} : m_1\hbar, \quad S_z &: m_2\hbar \end{aligned} \tag{41}$$

で表されるとする．ここで $m_1, m_2 = \pm\frac{1}{2}$ である．$\boldsymbol{S}^2$ と $\boldsymbol{S}_z$ の固有値に基づく表示では,

$$|s=1, m=\pm1, 0\rangle, |s=0, m=0\rangle \tag{42}$$

が基底ケットとなり，S_{1z} と S_{2z} の固有値に基づく表示では,

$$|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle \tag{43}$$

が基底ケットとなる．次にこの基底ケットの間の関係を考える．まず，$s=1, m=1$ に対応するのは 2 つの電子がともに上向きスピンを持つときなので

$$|s=1, m=1\rangle = |{+}{+}\rangle \tag{44}$$

である．式 (41) より,

$$S_z|{+}{+}\rangle = S_z|s=1, m=1\rangle = \hbar|s=1, m=1\rangle = \hbar|{+}{+}\rangle \tag{45}$$

である．ここで，$S_- = S_{1-} + S_{2-}$ という演算子を式 (44) の両辺に作用させると，左辺は

$$S_-|s=1, m=1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|s=1, m=0\rangle = \sqrt{2}\,|s=1, m=0\rangle \tag{46}$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_-|{+}{+}\rangle &= (S_{1-} + S_{2-})|{+}{+}\rangle \\ &= \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|{+}{-}\rangle + \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|{-}{+}\rangle = |{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle \end{aligned} \tag{47}$$

となるので,

$$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) \tag{48}$$

が従う．式 (41) より,

$$S_z\frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) = S_z|s=1, m=0\rangle = 0 \tag{49}$$

となる．同様に，$S_- = S_{1-} + S_{2-}$ という演算子を両辺に作用させると，左辺は

$$S_-|s=1, m=0\rangle = \sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|s=1, m=-1\rangle = \sqrt{2}\,|s=1, m=-1\rangle \tag{50}$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned} S_-(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) &= (S_{1-} + S_{2-})(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) \\ &= \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|{-}{-}\rangle + \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|{-}{-}\rangle = 2|{-}{-}\rangle \end{aligned} \tag{51}$$

となるので,

$$|s=1,m=-1\rangle = |--\rangle \tag{52}$$

が従う．式 (41) より

$$S_z\,|--\rangle = S_z\,|s=1,m=-1\rangle = -\hbar\,|s=1,m=-1\rangle = -\hbar\,|--\rangle \tag{53}$$

さらに,

$$\langle s=1,m=\pm1,0|s=0,m=0\rangle = 0 \tag{54}$$

より,

$$|s=0,m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \tag{55}$$

が従う．
波動関数を用いて表現すると，スピン全角運動量が 1 の波動関数は

$$u_1\Big(\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(\frac{1}{2}\Big),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_1\Big(\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)+u_1\Big(-\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big],\quad u_1\Big(-\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(-\frac{1}{2}\Big) \tag{56}$$

となり，スピン 3 重項といわれる．3 重項の波動関数は全て粒子の入れ替えについて対称であることがわかる．
スピン全角運動量が 0 の波動関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_1\Big(\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)-u_1\Big(-\frac{1}{2}\Big)u_2\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] \tag{57}$$

となり，スピン 1 重項といわれる．1 重項の波動関数は粒子の入れ替えについて反対称であることがわかる．

合成系の波動関数の対称性

スピン $\frac{1}{2}$ の例では，合成系の波動関数は全て 2 つの波動関数 u_1, u_2 の入れ替えについて対称な波動関数と反対称な波動関数になっていることがわかる．2 つの波動関数を入れ替える演算子を P_{12} と表し，入れ替え演算子という．このとき,

$$\begin{aligned} P_{12}\boldsymbol{J}\psi(1,2) &= P_{12}\Big(\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}\Big)\psi(1,2) = \Big(\boldsymbol{J}^{(2)}+\boldsymbol{J}^{(1)}\Big)P_{12}\psi(1,2) \\ &= \Big(\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}\Big)P_{12}\psi(1,2) = \boldsymbol{J}P_{12}\psi(1,2) \end{aligned} \tag{58}$$

より,

$$[P_{12}, \boldsymbol{J}] = 0 \tag{59}$$

となるので，波動関数を全角運動量 $\boldsymbol{J}$ と入れ替え演算子 P_{12} の同時固有状態にとることができる．特に全角運動量の波動関数に縮退がなければ，全角運動量の波動関数は入れ替え演算子の固有状態となる．
そこで,

$$P_{12}\psi(1,2) = C\psi(1,2) \tag{60}$$

という条件を課すと

$$\psi(1,2) = P_{12}^2\psi(1,2) = CP_{12}\psi(1,2) = C^2\psi(1,2) \tag{61}$$

となるため，入れ替え演算子の固有値 C は ±1 となる．そのため，波動関数は粒子の入れ替えに関して対称または反対称となる．
2 粒子の場合には角運動量の合成則からわかるように縮退は起こらないので，2 粒子の入れ替えに関して対称，または反対称な波動関数を固有状態としてとることができる．

3 量子力学での同種粒子と対称化仮説

交換縮退

粒子 1 と粒子 2 は同種粒子であるとすると，Hamiltonian は粒子の入れ替えについて対称であるはずなので，

$$H(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{p}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{p}^{(2)})=H(\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{p}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{p}^{(1)}) \tag{62}$$

となる．特に相互作用がない場合は Hamiltonian は粒子 1 に関する部分と粒子 2 に関する部分に分けられる．従って，粒子 1 が α という状態にあって，粒子 2 が β という状態にある場合の波動関数は

$$u_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x}^{(1)};\boldsymbol{x}^{(2)})=u_\alpha(\boldsymbol{x}^{(1)})u_\beta(\boldsymbol{x}^{(2)}) \tag{63}$$

となる．一方，粒子 1 が β という状態にあって，粒子 2 が α という状態にある場合の波動関数は

$$u_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{x}^{(1)};\boldsymbol{x}^{(2)})=u_\beta(\boldsymbol{x}^{(1)})u_\alpha(\boldsymbol{x}^{(2)}) \tag{64}$$

となり，この 2 つは区別ができない．これを交換縮退という．
量子力学的な系は，同時観測可能量の完全な組の固有値を与えれば指定できる．そのため，量子力学では，同時観測可能量の完全な組が 2 つの粒子の入れ替えに関して対称であるとき，その 2 つの粒子は同種粒子であるという．

対称化仮説

粒子の入れ替えに関して対称な波動関数 $u^{(S)}$ と反対称な波動関数 $u^{(A)}$ を，

$$u^{(S)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}),\quad u^{(A)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\alpha,\beta}-u_{\beta,\alpha}) \tag{65}$$

で定義する．一般に量子力学で観測できるのは確率密度である．そこで，

$$u=c^{(S)}u^{(S)}+c^{(A)}u^{(A)},\quad |c^{(S)}|^2+|c^{(A)}|^2=1 \tag{66}$$

で表され，$c^{(S)}$ と $c^{(A)}$ は決定できない状況を考える．
時刻 $t=0$ での波動関数が u で与えられ，シュレディンガー方程式に従って波動関数が時間発展することを考える．時刻 t での波動関数を ψ とすると，

$$|\psi(t)\rangle=\exp\left(\frac{H}{i\hbar}t\right)|\psi(0)\rangle \tag{67}$$

となり，Hamiltonian は対称的なので，波動関数の対称部分と反対称部分の割合は時間発展に対して不変である．従って，

$$\psi(x_{(1)};x_{(2)};t)=c^{(S)}\psi^{(S)}(x_{(1)};x_{(2)};t)+c^{(A)}\psi^{(A)}(x_{(1)};x_{(2)};t) \tag{68}$$

となる．時刻 t で 2 つの粒子を $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ に観測する確率 $P(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_2;t)$ は，同種粒子は見分けがつかないことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&P(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_2;t)\\
=&|\psi(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2+|\psi(x_{(2)};x_{(1)};t)|^2\\
=&|c^{(S)}\psi^{(S)}(x_{(1)};x_{(2)};t)+c^{(A)}\psi^{(A)}(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2+|c^{(S)}\psi^{(S)}(x_{(2)};x_{(1)};t)+c^{(A)}\psi^{(A)}(x_{(2)};x_{(1)};t)|^2\\
=&|c^{(S)}\psi^{(S)}(x_{(1)};x_{(2)};t)+c^{(A)}\psi^{(A)}(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2+|c^{(S)}\psi^{(S)}(x_{(1)};x_{(2)};t)-c^{(A)}\psi^{(A)}(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2\\
=&2\Big[|c^{(S)}|^2|\psi^{(S)}(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2+|c^{(A)}|^2|\psi^{(A)}(x_{(1)};x_{(2)};t)|^2\Big]
\end{aligned} \tag{69}$$

となる．この式には時刻 $t=0$ では観測できなかった定数 $c^{(S)}$ と $c^{(A)}$ が含まれている．$c^{(S)}=0$ もしくは $c^{(A)}=0$，すなわち，2 つの同種粒子の波動関数は全て対称か反対称な状態にあるという仮説を対称化仮説という．対称な波動関数をもつ粒子を Boson といい，反対称な波動関数をもつ粒子を Fermion という．自然界では Boson のスピンは整数となり，Fermion のスピンは半整数となることが知られている．これをスピンと統計性の関係という．