

課題演習 A5 理論パート

南出晃宏 0500-31-4605

2021 年 11 月 8 日

13.7 クーロン場による散乱

これまでの散乱問題では, ポテンシャル $V(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で $1/r^2$ よりも早く 0 に近づくと仮定していた. この仮定はクーロンポテンシャルに対しては成り立たない.

それぞれ電荷 $Ze, Z'e$ を持つ, 異なる 2 粒子の衝突によって起こる散乱を考える. 微細構造定数 α (電磁相互作用の強さを表す無次元量) は

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

である. 2 粒子の間に働くクーロン力のポテンシャルは

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{ZZ'\alpha\hbar c}{r} \quad (1)$$

で与えられる.

クーロンポテンシャルのように, 遠方でも無視することができないポテンシャルで表される力を, 長距離力と呼ぶ. このとき, 入射粒子の波動関数は十分遠方でも平面波とはならず, 散乱波も球面波にならない. よって, 波動関数の漸近形を用いて散乱振幅を定義する (12.2 節) ことはできず, 散乱振幅を部分波展開での位相のずれ δ_l で与える方法 (13.2 節) も用いることができない.

1. シュレディンガー方程式

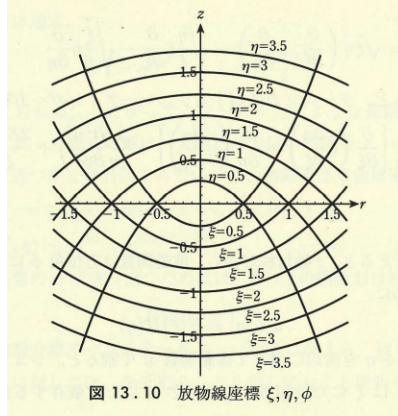
計算に便利な座標として, 次の放物線座標 ξ, η, ϕ を導入する:

$$\begin{aligned} \xi &= r(1 - \cos\theta) = r - z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z, \\ \eta &= r(1 + \cos\theta) = r + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z, \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta} \cos\phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin\phi, \quad z = \frac{-\xi + \eta}{2}, \\ r &= \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta}, \quad \cos\theta = \frac{-\xi + \eta}{\xi + \eta}. \end{aligned}$$

定義より, $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ である. 下の図は $\xi = (\text{一定}), \eta = (\text{一定})$ の面を図示したものである (3次元では, これらの放物線を z 軸まわりに回転させた放物面になる).



相対運動のシュレディンガー方程式は、入射粒子と標的粒子の換算質量を m として

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] u + \frac{ZZ'\alpha\hbar c}{r} u = Eu \quad (2)$$

と書かれる。ここで、

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial r} \partial_\eta = \frac{2}{\xi + \eta} (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta) = \frac{1}{r} (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta), \\ \partial_\theta &= \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \partial_\eta = \sqrt{\xi \eta} (\partial_\xi - \partial_\eta) = r \sin \theta (\partial_\xi - \partial_\eta) \end{aligned}$$

を用いて変数変換すれば、

$$\begin{aligned} \partial_r (r^2 \partial_r) &= r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r \\ &= r^2 \left[-\frac{1}{r^2} (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta) + \frac{1}{r^2} (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta)^2 \right] + 2r \cdot \frac{1}{r} (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta) \\ &= (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta)^2 + (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta), \\ \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) &= \sin \theta \partial_\theta^2 + \cos \theta \partial_\theta \\ &= \sin \theta [r \cos \theta (\partial_\xi - \partial_\eta) + r^2 \sin^2 \theta (\partial_\xi - \partial_\eta)^2] + \cos \theta \cdot r \sin \theta (\partial_\xi - \partial_\eta) \\ &= r^2 \sin^3 \theta (\partial_\xi - \partial_\eta)^2 + 2r \sin \theta \cos \theta (\partial_\xi - \partial_\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \\ &= \frac{1}{r^2} [(\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta)^2 + (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta)] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} [r^2 \sin^3 \theta (\partial_\xi - \partial_\eta)^2 + 2r \sin \theta \cos \theta (\partial_\xi - \partial_\eta)] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \\ &= \frac{1}{r^2} [(\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta)^2 + (\xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta) + \xi \eta (\partial_\xi - \partial_\eta)^2 + (-\xi + \eta) (\partial_\xi - \partial_\eta)] + \frac{1}{\xi \eta} \partial_\phi^2 \\ &\quad (\because r \sin \theta = \sqrt{\xi \eta}, r \cos \theta = \frac{-\xi + \eta}{2}) \\ &= \frac{1}{r^2} (\xi + \eta) (\partial_\xi (\xi \partial_\xi) + \partial_\eta (\eta \partial_\eta)) + \frac{1}{\xi \eta} \partial_\phi^2 \\ &= \frac{4}{\xi + \eta} (\partial_\xi (\xi \partial_\xi) + \partial_\eta (\eta \partial_\eta)) + \frac{1}{\xi \eta} \partial_\phi^2 \quad (\because r = \frac{\xi + \eta}{2}). \end{aligned}$$

よって、シュレディンガー方程式 (2) を放物線座標で書くと

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) + \frac{2ZZ'\alpha\hbar c}{\xi + \eta} u = Eu \quad (3)$$

となる.

十分遠方における入射粒子の速度の向きを z 軸にとると, クーロン力は中心力なので波動関数は z 軸周りの回転に対して対称, つまり方位角 ϕ に依存しないはずである. そこで,

$$u(\mathbf{r}) = u(\xi, \eta, \phi) = u(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \quad (4)$$

のように変数分離ができると仮定する.

(3) に代入すると,

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{4}{\xi + \eta} \left[H \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi} \right) + \Xi \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dH}{d\eta} \right) \right] + \frac{2ZZ'\alpha\hbar c}{\xi + \eta} \Xi H = E\Xi H \\ \therefore -\frac{1}{\Xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi} \right) - \frac{mE}{2\hbar^2} \xi + \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} = \frac{1}{H} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \frac{mE}{2\hbar^2} \eta \end{aligned}$$

左辺は ξ のみの関数で, 右辺は η のみの関数であるから, この式の値は定数でなければならない. 従って,

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi} \right) + \left(\frac{k^2}{4} \xi - c_1 \right) \Xi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \left(\frac{k^2}{4} \eta - c_2 \right) H = 0 \quad (6)$$

と表せる (このように ξ と η について対称な形で方程式が書けることが放物線座標の利点なのだと思う). ここで, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ はエネルギー E に対応する波数であり, 定数 c_1, c_2 は関係式

$$c_1 + c_2 = \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} \quad (7)$$

を満たす.

2. 境界条件

次に, 無限遠での境界条件を与える. 波動関数を球面波で分解すると, 中心から出ていく球面波 $\exp(ikr)$ も外から中に入ってくる球面波 $\exp(-ikr)$ も, 入射波の中に含まれている. しかし, これ以外の寄与は散乱波なので, 中心から出ていく球面波 $\exp(ikr)$ だけが許され, 外から中に入ってくる球面波 $\exp(-ikr)$ を含むことは許されない. すなわち, 外から中に入ってくる球面波は入射波からの寄与だけである. ゆえに, 境界条件としては, 入射方向の無限遠では漸近的に入射波に近づくことになる. つまり, 長距離力の場合でも, 入射粒子が標的粒子から十分離れた $z \rightarrow -\infty$ の無限遠方では漸近的に

$$u(\mathbf{r}) \rightarrow e^{ikz} \quad (z \rightarrow -\infty), \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

となると考えられる.

$z = \frac{-\xi + \eta}{2}$ であることに注意すると, $z \rightarrow -\infty$ は放物線座標において η の値にかかわらず $\xi \rightarrow \infty$ という極限をとることに相当する. つまり,

$$\forall \eta \geq 0 \quad u(\xi, \eta) \rightarrow e^{ik\eta/2} e^{-ik\xi/2} \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (8)$$

$u(\mathbf{r})$ の変数分離形 (4) と比較して, $H(\eta)$ は

$$H(\eta) = e^{ik\eta/2} \quad (9)$$

と求まる. このとき, 定数 c_1, c_2 は

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{H} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \frac{k^2}{4} \eta \\ &= e^{-ik\eta/2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{ik\eta}{2} e^{ik\eta/2} \right) + \frac{k^2}{4} \eta = e^{-ik\eta/2} \left(e^{ik\eta/2} e^{ik\eta/2} - \frac{k^2 \eta}{4} e^{ik\eta/2} \right) + \frac{k^2}{4} \eta \\ &= \frac{ik}{2}, \\ c_1 &= \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar} - \frac{ik}{2} \quad (\because (7)) \end{aligned}$$

と定まる. ξ の波動関数 $\Xi(\xi)$ は, 簡単のため $\xi \rightarrow \infty$ における漸近形 $e^{-ik\xi/2}$ で規格化しておく:

$$\Xi(\xi) = e^{-ik\xi/2} f(\xi). \quad (10)$$

$f(\xi)$ についての境界条件は

$$f(\xi) \rightarrow 1 \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

になる.

(10) を方程式 (5) に代入すると, f に関する微分方程式が得られる:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d(e^{-ik\xi/2} f)}{d\xi} \right) + \left(\frac{k^2}{4} \xi - c_1 \right) e^{-ik\xi/2} f = 0 \\ \therefore \frac{d}{d\xi} \left[\xi e^{-ik\xi/2} \left(-\frac{ikf}{2} + \frac{df}{d\xi} \right) \right] + \left(\frac{k^2}{4} \xi - c_1 \right) e^{-ik\xi/2} f &= 0 \\ \therefore \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - ik\xi) \frac{df}{d\xi} - \left(c_1 + \frac{ik}{2} \right) f &= 0 \\ \therefore \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - ik\xi) \frac{df}{d\xi} - \gamma k f &= 0, \quad (11) \\ \gamma &\equiv \frac{mZZ'\alpha c}{\hbar k} = \frac{ZZ'\alpha c}{v}, \quad v = \frac{\hbar k}{m}. \end{aligned}$$

ここで, v は入射粒子が $z \rightarrow -\infty$ にあるときの 2 粒子の相対速度である.

方程式 (11) で $w = ik\xi$ と変数変換すれば, $\frac{d}{d\xi} = ik \frac{d}{dw}$ より

$$w \frac{d^2 f}{dw^2} + (1 - w) \frac{df}{dw} + i\gamma f = 0$$

となる. この方程式は, 合流型超幾何微分方程式の 1 つである. 合流型超幾何微分方程式は 2 つのパラメータ a, b を含み, その一般形は

$$w \frac{d^2 u}{dw^2} + (b - w) \frac{du}{dw} - au = 0.$$

合流型超幾何微分方程式の解のうち, 原点で定数となる関数は合流型超幾何関数 $F(a, b; w)$ と呼ばれ, べき級数

$$\begin{aligned} F(a, b; w) &\equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+s)} w^s \\ &= 1 + \frac{a}{1!b} w + \frac{a(a+1)}{2!b(b+1)} w^2 + \dots \end{aligned}$$

で与えられる.

cf. Pochhammer 記号 $(a)_n \equiv a(a+1)\cdots(a+n-1)$ を用いれば, $F(a, b; w) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{s!(b)_s} w^s$ と書ける.

従って, $f(\xi)$ が原点で正則であるとする, いまの場合パラメータの値が $a = -i\gamma, b = 1$ なので, 規格化定数を C として

$$\begin{aligned} f(\xi) &= CF(-i\gamma, 1; ik\xi), \\ u(r) &= e^{ik\eta/2} \cdot e^{-ik\xi/2} CF(-i\gamma, 1, ik\xi) = Ce^{ikz} F(-i\gamma, 1; ik\xi) \end{aligned}$$

が求める解となる.

3. 合流型超幾何関数について (付録 A.2)

a, b をパラメータとする次の微分方程式を合流型超幾何微分方程式と呼ぶ:

$$w \frac{d^2 u}{dw^2} + (b-w) \frac{du}{dw} - au = 0. \quad (12)$$

ベッセル関数やクーロン力のポテンシャル下での波動関数を求める場合に現れる.

この方程式は, $w = 0$ と $w = \infty$ に特異点を持つ. 特異点付近 $w \approx 0, w \approx \infty$ で方程式は近似的に

$$w \frac{d^2 u}{dw^2} + b \frac{du}{dw} = 0 \quad (w \approx 0), \quad \frac{d^2 u}{dw^2} - \frac{du}{dw} = 0 \quad (w \approx \infty)$$

となるので, 2つの独立な解は $w \approx 0$ では $u \approx w^0$ と $u \approx w^{1-b}$ のようにふるまい, $w \approx \infty$ では $u \approx e^{0 \cdot w}$ と $u \approx e^w$ とふるまうことが分かる.

$w \approx 0$ 付近で $u \approx w^0$ というふるまいをする解をべき級数展開で求める. べき級数

$$u(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

が方程式 (12) をみたとすると,

$$\begin{aligned} w \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n w^{n-2} + (b-w) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n w^{n-1} - a \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n &= 0 \\ (-ac_0 + bc_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)(n+b)c_{n+1} - (n+a)c_n\} w^n &= 0 \\ \therefore -ac_0 + bc_1 = 0, (n+1)(n+b)c_{n+1} - (n+a)c_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \therefore c_n &= \frac{n+a-1}{n(n+b-1)} c_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

よって, べき級数解は

$$\begin{aligned} u(w) &= c_0 F(a, b; w), \\ F(a, b; w) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(1+a)\cdots(a+n-1)}{n!b(b+1)\cdots(b+n-1)} w^n \end{aligned}$$

と求められる. このべき級数解は, b が 0 または負の整数ではない限り存在する. 収束半径は,

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n+a-1}{n(n+b-1)} \approx \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より, 無限大である (ダランベールの収束判定法). そして, $w \rightarrow \infty$ での漸近形は, a が 0 または負の整数である場合 $F(a, b; w) \approx e^{0 \cdot w}$ となり, それ以外の場合 $F(a, b; w) \approx e^w$ となる.

次のような $\Re b > \Re a > 0$ で定義される積分を考える:

$$\tilde{F}(a, b; w) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 du e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1}.$$

被積分関数を w についてべき級数展開し, 積分を実行すると

$$\begin{aligned} \tilde{F}(a, b; w) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 du \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(wu)^n}{n!} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \int_0^1 du u^{n+a-1} (1-u)^{b-a-1} \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} B(n+a, b-a) \quad (B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \text{ はベータ関数}) \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(n+b)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(n+b)} \frac{w^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(1+a)\cdots(a+n-1)}{n!b(b+1)\cdots(b+n-1)} w^n \end{aligned}$$

となり, $F(a, b; w)$ のべき級数解と一致する. つまり,

$$F(a, b; w) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 du e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1}$$

は, 超幾何関数の積分表示を与える.

以下, b が整数であるとする. 一般の a に対し $u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}$ は多価関数で, $u = 0, 1$ に分岐点をもち, 多重リーマン面上に定義されている. b が整数なので, 下の積分路 C_0 はリーマン面上の閉回路であり, 分岐を回避することができる (C_0 を一周すると元の値に戻る: $(e^{2\pi i} u)^{a-1} (e^{2\pi i} (1-u))^{b-a-1} = e^{2\pi i\{(a-1)+(b-a-1)\}} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} = u^{a-1} (1-u)^{b-a-1}$).

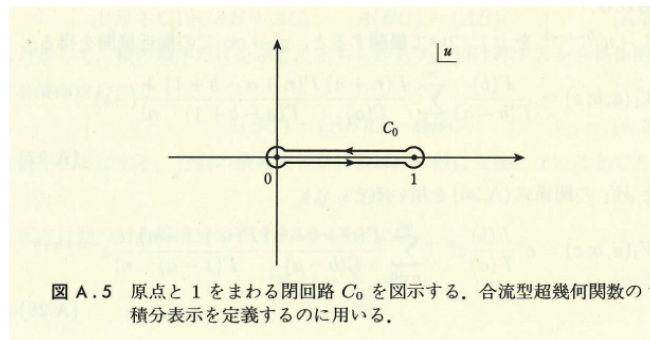


図 A.5 原点と 1 をまわる閉回路 C_0 を図示する. 合流型超幾何関数の積分表示を定義するのに用いる.

実軸の下側で被積分関数が実数であるリーマン面を選び, C_0 上での積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_{C_0} e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du &= \int_0^1 e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du - \int_0^1 e^{wu} u^{a-1} \{e^{2\pi i} (1-u)\}^{b-a-1} du \\ &= (1 - e^{-2\pi ia}) \int_0^1 e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du \quad (\because b \text{ は整数}) \\ \therefore F(a, b; w) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_{C_0} e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du \end{aligned}$$

を得る (円周部分の積分は半径 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限で 0 に収束する) .

C_0 を連続変形して, 原点から無限遠に向かう積分路 C_1 と, 1 から無限遠に向かう積分路 C_2 に分解することができる : $C_0 = C_1 + C_2$.

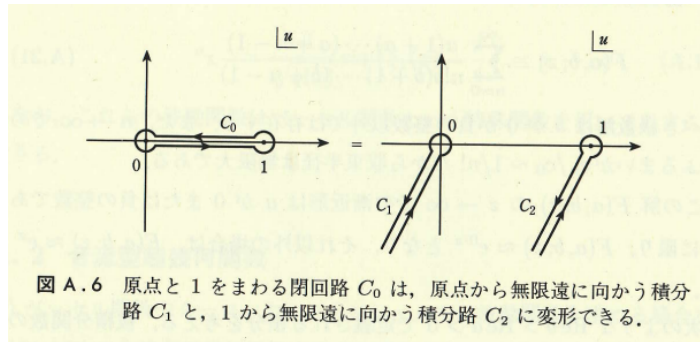


図 A.6 原点と 1 をまわる閉回路 C_0 は, 原点から無限遠に向かう積分路 C_1 と, 1 から無限遠に向かう積分路 C_2 に変形できる.

それぞれの積分路上での積分を W_1, W_2 とすると,

$$\begin{aligned} F(a, b; w) &= W_1(a, b; w) + W_2(a, b; w), \\ W_i(a, b; w) &\equiv \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_{C_i} e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

ただし, w が上 (下) 半面にある場合は, 積分路も上 (下) 半面にとる. 従って, 積分路 C_1 の終点および積分路 C_2 の始点に対応する無限遠で, u の位相を τ とすると, $1-u$ の位相は $\tau - \pi$ ($0 < \tau < \pi$), $\tau + \pi$ ($-\pi < \tau < 0$) となる. この結果,

$$W_1(b-a, b; -w) = e^{-w} W_2(a, b; w) \tag{13}$$

が得られる ($v = 1-u$ において, 積分の変数変換をすればよい) .

ここで,

$$g(a, b; w) \equiv \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{C_1} du e^{-u} u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{w}\right)^{-b}$$

と定義する. このとき,

$$\begin{aligned}
W_1(a, b; w) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_{C_1} e^{wu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} (-w)^{-a} \int_{C_1} e^{-v} v^{a-1} \left(1 + \frac{v}{w}\right)^{b-a-1} dv \\
&= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-w)^{-a} g(a, a-b+1; -w), \\
W_2(a, b; w) &= e^w W_1(b-a, b, -w) (\because (13)) \\
&= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^w w^{a-b} g(b-a, 1-a; w).
\end{aligned}$$

$|w| \rightarrow \infty$ における $g(a, b; w)$ の漸近展開は, テイラー展開の公式 $(1+x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!} x^n$ より

$$\begin{aligned}
g(a, b; w) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{C_1} du e^{-u} u^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)n!} \left(\frac{u}{w}\right)^n \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi ia}} \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)n!} w^{-n} \int_{C_1} du e^{-u} u^{a+n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)n!} w^{-n} \\
&= 1 + \frac{ab}{1!w} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!w^2} + \dots
\end{aligned}$$

4. 漸近的振る舞い

ξ が大きいところでの, 波動関数の漸近的振る舞いを見る.

前節で得た合流型超幾何関数 $F(a, b, w)$ の漸近展開を用い, $\xi \rightarrow \infty$ において $W_1(-i\gamma, 1, ik\xi), W_2(-i\gamma, 1, ik\xi)$ を展開すると

$$F(-i\gamma, 1, ik\xi) = W_1(-i\gamma, 1, ik\xi) + W_2(-i\gamma, 1, ik\xi),$$

$$\begin{aligned}
W_1(-i\gamma, 1, ik\xi) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+i\gamma)} (-ik\xi)^{i\gamma} g(-i\gamma, -i\gamma, -ik\xi) \\
&\rightarrow \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} (-ik\xi)^{i\gamma} \left(1 + \frac{(-i\gamma)^2}{-ik\xi} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} \exp\left[i\gamma \left(\ln k\xi - i\frac{\pi}{2}\right)\right] \left(1 - \frac{i\gamma^2}{k\xi} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} e^{\frac{1}{2}\gamma\pi} e^{i\gamma \ln k\xi} \left(1 + \frac{\gamma^2}{ik\xi} + \dots\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2(-i\gamma, 1, ik\xi) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi} (ik\xi)^{-i\gamma-1} g(1+i\gamma, 1+i\gamma, ik\xi) \\
&\rightarrow \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi} (ik\xi)^{-i\gamma-1} \left(1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik\xi} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi} \exp\left[(-i\gamma-1)\left(\ln k\xi + i\frac{\pi}{2}\right)\right] \left(1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik\xi} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} e^{\frac{1}{2}\gamma\pi} e^{ik\xi - i\gamma \ln k\xi} \left(\frac{i}{k\xi} + \frac{(1+i\gamma)^2}{(k\xi)^2} + \dots\right).
\end{aligned}$$

よって、波動関数 $u(\mathbf{r})$ の漸近展開で $1/r$ までをとると

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) &\approx \frac{C e^{\frac{1}{2}\gamma\pi}}{\Gamma(1+i\gamma)} \left(e^{ikz+i\gamma \ln k\xi} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik\xi}\right] + \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \frac{e^{ikz+ik\xi-i\gamma \ln k\xi}}{k\xi} \right) \\
&= \frac{C e^{\frac{1}{2}\gamma\pi}}{\Gamma(1+i\gamma)} \left(e^{ikz+i\gamma \ln k(r-z)} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)}\right] + \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \frac{1}{r} e^{ikr-i\gamma \ln 2kr} \frac{e^{-i\gamma \ln \sin^2(\theta/2)}}{2k \sin^2(\theta/2)} \right).
\end{aligned}$$

第2項の変形では $\ln k\xi = \ln kr(1 - \cos\theta) = \ln(2kr \sin^2(\theta/2)) = \ln(2kr) + \ln(\sin^2(\theta/2))$ を用いた。

ここで、

$$\begin{aligned}
f_c(\theta) &\equiv \frac{\Gamma(i+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \frac{e^{-i\gamma \ln(\sin^2(\theta/2))}}{2k \sin^2(\theta/2)} \\
&= \frac{\gamma}{2k \sin^2(\theta/2)} e^{-i\gamma \ln(\sin^2(\theta/2)) - i\pi + 2i\eta_0}, \quad (\eta_0 = \arg \Gamma(1+i\gamma))
\end{aligned}$$

とおく。第1行から第2行への変形には、実数 γ に対するガンマ関数の公式

$$|\Gamma(1+i\gamma)| = \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\sinh \pi\gamma}}, \quad |\Gamma(-i\gamma)| = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma \sinh \pi\gamma}}, \quad \left| \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right| = \gamma$$

を用いた。

$\therefore \gamma$ を実数とする。まず、 $(t^z e^{-t})' = z t^{z-1} e^{-t} - t^z e^{-t}$ の両辺を実軸上の正の部分 $(0, \infty)$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} - \int_0^\infty t^z e^{-t} dt &= 0 \quad (\because \lim_{t \rightarrow +0} t^z e^{-t} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^z e^{-t}) \\
\therefore \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \quad \therefore |\Gamma(1+i\gamma)| = |\gamma||\Gamma(i\gamma)|, \quad |\Gamma(1-i\gamma)| = |\gamma||\Gamma(-i\gamma)|.
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
B(1-z, z) &= \frac{\Gamma(1-z)\Gamma(z)}{\Gamma((1-z)+z)} = \Gamma(1-z)\Gamma(z), \\
B(1-z, z) &= \int_0^1 t^{-z}(1-t)^{z-1} dt \\
&= \int_\infty^0 (s+1)^z \frac{s^{z-1}}{(s+1)^{z-1}} \left(-\frac{ds}{(s+1)^2}\right) \quad \left(t = \frac{1}{s+1} \text{ と変数変換}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{s+1} = \frac{\pi}{\sin z\pi} \quad (\because \text{複素積分}) \\
\therefore \Gamma(1-z)\Gamma(z) &= \frac{\pi}{\sin z\pi} \quad \therefore |\Gamma(-i\gamma)||\Gamma(1+i\gamma)| = \frac{\pi}{|\sinh \pi\gamma|} = |\Gamma(i\gamma)||\Gamma(1-i\gamma)|.
\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}\Gamma(1+i\gamma) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{i\gamma} = \int_0^\infty dt e^{-t} \cos(\gamma \log t) + i \int_0^\infty dt e^{-t} \sin(\gamma \log t), \\ \Gamma(1-i\gamma) &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-i\gamma} = \int_0^\infty dt e^{-t} \cos(\gamma \log t) - i \int_0^\infty dt e^{-t} \sin(\gamma \log t) \\ \therefore |\Gamma(1+i\gamma)| &= |\Gamma(1-i\gamma)|.\end{aligned}$$

これらの結果を組み合わせれば, 上の公式が従う.□

最終的に, 波動関数の漸近形は

$$u(\mathbf{r}) \approx \frac{C e^{\frac{1}{2}\gamma\pi}}{\Gamma(1+i\gamma)} \left(e^{i[kz+\gamma \ln k(r-z)]} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right] + \frac{1}{r} f_c(\theta) e^{i[kr-\gamma \ln 2kr]} \right) \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (14)$$

と表せる.

(14) の第 1 項は e^{ikz} を含むので入射波を表していると考えられ, 第 2 項は e^{ikr}/r を含み散乱波を表していると考えられる. 実際, $kr \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$u(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{C e^{\frac{1}{2}\gamma\pi}}{\Gamma(1+i\gamma)} e^{ikz}$$

と, 入射波のみになる (無限遠での境界条件がたしかに満たされている). 第 1 項, 第 2 項のどちらも無限遠で対数的に振動する位相を持っているので, 純粋な平面波や球面波ではない. (14) には $\frac{1}{r-z}$ に比例する項があるので, 確率密度が z 軸正の部分で無限大に発散するように見えるが, そもそもこの式は $\xi = r - z \rightarrow \infty$ における展開であったので問題ない.

また, $f_c(\theta)$ が散乱振幅と見なせることも分かるので, 微分散乱断面積が計算できて*1

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega} &= |f_c(\theta)|^2 \\ &= \left(\frac{\gamma}{2k \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{ZZ' \alpha \hbar c}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.\end{aligned}$$

これは, 例えば α 粒子を原子核に衝突させたときに観測される散乱断面積であり, ラザフォードが原子核の存在を検証した実験で用いた現象なので, ラザフォード散乱と呼ばれている.

入射波に通常の e^{ikz} という z 依存性以外に対数的に振動する位相があり, 散乱波には通常の e^{ikr} という r 依存性以外に対数的に振動する位相がある. クーロン力が長距離力であるという特徴はこうした点に現れている. これらの特徴のために, クーロン力に対しては位相のずれ (13.2 節) が正確に定義できない. さらに, 散乱振幅 f_c にも角度 θ について対数的に振動する位相があることも大きな特徴である. この対数的に振動する位相は, 上で計算したように微分散乱断面積 $\frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega}$ に直接は現れない (観測されない). しかし, 同種粒子の間のクーロン散乱では, 干渉項を通じてこの位相が直接観測にかかるようになる (15 章). また, 陽子と反陽子のよように電磁相互作用だけでなく強い相互作用が働く場合にも, 強い相互作用の散乱振幅との干渉効果としてクーロン力の振動する位相も観測にかかる.

*1 グラフは http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/QMII09/QMII09_chap25.pdf から.

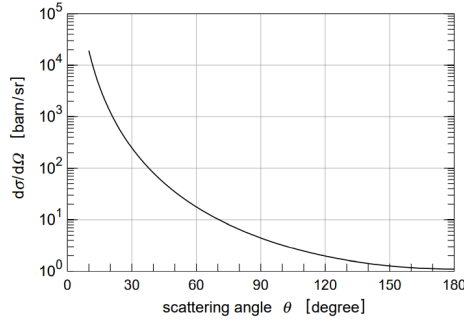


図 25.2: ラザフォード散乱の微分断面積

入射粒子のフラックスを 1 に規格化すると, 規格化定数 C が決まる (フラックスについては後述). 位相は任意でよいので, 簡単のため C は実数とする: $C = v^{-1/2}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}$. このときのクーロン波動関数は

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= v^{-1/2}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}e^{ikz}F(-i\gamma, 1, ik\xi) \\ &= v^{-1/2}\Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{1}{2}\gamma\pi}e^{ikr\cos\theta}F(-i\gamma, 1, 2ikr\sin^2(\theta/2)). \end{aligned}$$

従って, $r = 0$ での存在確率は

$$\begin{aligned} |u(0)|^2 &= |C|^2 (\because \forall a, b F(a, b, 0) = 1) \\ &= \frac{|\Gamma(1+i\gamma)|^2 e^{-\gamma\pi}}{v} \\ &= \frac{2\gamma\pi}{v(e^{2\gamma\pi} - 1)} (\because |\Gamma(1+i\gamma)| = \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\sinh \pi\gamma}}). \end{aligned}$$

衝突の相対速度 v が大きい場合には $|\gamma| (\propto \frac{1}{v}) \ll 1$ なので, 引力であっても斥力であっても $|u(0)|^2 \approx \frac{1}{v}$ となり, クーロン力がない場合, すなわち平面波と一致している. これは衝突速度が大きければクーロン力の影響は無視できるようになるということを意味している. 一方, 衝突の相対速度 v が小さい場合には $|\gamma| \gg 1$ なので, 引力の場合 ($\gamma < 0$) および斥力の場合 ($\gamma > 0$) に応じてそれぞれ

$$\begin{aligned} |u(0)|^2 &\approx \frac{2\pi|\gamma|}{v} (\gamma < 0) \\ |u(0)|^2 &\approx \frac{2\pi\gamma}{v} e^{-2\gamma\pi} (\gamma > 0) \end{aligned}$$

となる. 斥力の場合の指数関数の因子は, 低エネルギーでは最も重要な因子である. 核反応では, 核力は原子核どうしが極めて接近したところでしか働かない. ところが, 原子核はどちらも正の電荷を持っているので, 原子核どうしの間にはクーロン斥力が働く. 従って, クーロンの斥力ポテンシャルの壁をトンネル効果によって通り抜けて初めて核反応が起こる. このトンネル効果の起こる確率が指数関数の因子で与えられている.

求めた波動関数 u に伴う $r \rightarrow \infty$ における確率の流れ

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}(u^*\nabla u - u\nabla u^*)$$

を求める.

入射波の波動関数

$$u_{\text{in}} = v^{-1/2}e^{i[kz + \gamma \ln k(r-z)]} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right]$$

による確率の流れ j_{in} は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} u_{\text{in}} &= v^{-1/2} e^{i[kz + \gamma \ln k(r-z)]} \left[i(k \cos \theta + \frac{\gamma}{r}) \left(1 + \frac{\gamma^2}{ikr \cos \theta} \right) - \frac{\gamma^2}{ikr^2 \cos \theta} \right], \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u_{\text{in}} &= v^{-1/2} e^{i[kz + \gamma \ln k(r-z)]} \left[i(-kr \sin \theta + \frac{\gamma \sin \theta}{1 - \cos \theta}) + \frac{\gamma^2 \sin \theta}{ikr \cos^2 \theta} \right] \\ \therefore j_{\text{in}} &\rightarrow v^{-1} \frac{\hbar k}{m} e_z \quad (\because e_z = \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta) = e_z \quad (z \rightarrow -\infty).\end{aligned}$$

よって, このことから漸近形の第 1 項が入射波という解釈が正当化される.

また, 散乱波の波動関数

$$u_{\text{sc}} = v^{-1/2} \frac{1}{r} f_c(\theta) e^{i[kr - \gamma \ln 2kr]}$$

による確率の流れ j_{sc} も, 同様に計算して

$$j_{\text{sc}} \rightarrow v^{-1} \frac{\hbar k |f_c(\theta)|^2}{mr^2} = \frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2} \quad (r \rightarrow \infty)$$

となり, 第 2 項が散乱波を表していることが確認できる.

参考文献

坂井典佑. 量子力学 2. 培風館, 2000.