第11章　クーロン相互作用

11.1　クーロン散乱

クーロン力による散乱を考える。クーロン力は長距離力 (r のべきで減衰する力) であるから以前行った位相差の方法では扱えない。したがって特別に扱う必要がある。質量 m_1, 電荷 Z_1e の粒子と質量 m_2, 電荷 Z_2e の粒子についてクーロン力を考えたハミルトニアンは

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{Z_1Z_2e^2}{r} \tag{11.1}$$

これより重心を分離して相対座標に書き換えれば換算質量を $m(m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2})$ として

$$H = \frac{p_{rel}^2}{2m} + \frac{Z_1Z_2e^2}{r} \tag{11.2}$$

したがって相対運動のシュレディンガー方程式は

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{Z_1Z_2e^2}{r}]\psi(r) = E\psi(r) \tag{11.3}$$

とかける。E は重心系でのエネルギーで散乱現象においては正の値をとる。ここで

$$E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \tag{11.4}$$

$$\gamma = \frac{Z_1Z_2me^2}{\hbar^2k} \tag{11.5}$$

と書けば、シュレディンガー方程式は

$$[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\gamma k}{r}]\psi(r) = 0 \tag{11.6}$$

とかける。この方程式で解の形を $\psi = e^{ikz}f(r-z)$ と仮定してこれを代入する。$u = r - z = r(1-\cos\theta)$ とおけば座標は $(r,\theta,\phi) \to (r,u,\phi)$ と変えることができて, このときラプラシアンの θ, r による項は

$$\partial_\theta = \frac{\partial u}{\partial\theta}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial\theta} = r\sin\theta\partial_u$$

$$\partial_r = \frac{\partial u}{\partial r}\partial_u + \frac{\partial r}{\partial r} = \partial_r + \frac{u}{r}\partial_u$$

より、

$$\begin{aligned}\partial_r^2 &= (\partial_r + \frac{u}{r}\partial_u)^2 \\ &= \partial_r^2 + 2\frac{u}{r}\partial_r\partial_u - \frac{u}{r^2}\partial_u + \frac{u^2}{r^2}\partial_u^2 + \frac{u}{r^2}\partial_u \end{aligned} \tag{11.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta &= r\partial_u(1-\cos^2\theta)r\partial_u \\ &= r^2\partial_u[1-(1-\frac{u}{r})^2]\partial_u \\ &= r^2[(2\frac{1}{r}-2\frac{u}{r})\partial_u+(2\frac{u}{r}-\frac{u^2}{r^2})\partial_u^2] \qquad (11.8)\end{aligned}$$

とかける。これを球座標のラプラシアンの表式に代入し、仮定した解に ϕ 依存がないことを考慮すればシュレディンガー方程式は

$$[\partial_r^2+2\frac{u}{r}\partial_u\partial_r+\frac{2}{r}\partial_u+\frac{2}{r}\partial_r+2\frac{u}{r}\partial_u^2+k^2-\frac{2\gamma k}{r}]e^{ik(r-u)}f(u)=0$$

$$[2\frac{u}{r}\partial_u^2+2\frac{u}{r}(-ik+\frac{1}{u})\partial_u-\frac{2\gamma k}{r}]f(u)=0$$

$$[u\partial_u^2+u(1-iku)\partial_u-\gamma k]f(u)=0 \qquad (11.9)$$

とかける。ここで変数を $v=iku$ に変更すれば

$$[v\partial_v^2+(1-v)\partial_v+i\gamma]f(v)=0 \qquad (11.10)$$

とかける。これは合流型超幾何微分方程式になっており、この正則な解は合流型超幾何級数を用いて $F(-i\gamma,1;v)$ とかける。

合流型超幾何級数

合流型超幾何級数は次式で定義される。

$$F(a,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!}$$

ここで $(a)_k=\prod_{i=0}^{k-1}(a+i)$ である。これは任意の a と負の整数および 0 でない c について複素平面上で収束する。a が負の整数なら-a 次の多項式となる。また、次の等式を満たす。

$$F(a,c;z)=e^zF(c-a,c;-z)$$

この合流型超幾何級数を用いれば微分方程式

$$z\frac{d^2f}{dz^2}+(c-z)\frac{df}{dz}-af=0$$

の解は

$$f_1=F(a,c;z)$$

$$f_2=z^{1-c}F(a+1-c,2-c;z)$$

とあらわせる。これらは $c=1$ の時に一致する。また合流型超幾何級数について,2 つの関数 $g_1(a,c;z),g_2(a,c;z)$ があって

$$F(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}g_1(a,c;z)+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c)}g_2(a,c;z) \qquad (11.11)$$

というの和の形でかけることがわかっている。ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数。また、関数 $g_1(a,c;z), g_2(a,c;z)$ は $|Z| \to \infty$ において

$$
\begin{aligned}
g_1(a,c;z) &\to (-z)^{-a} \quad (11.12)\\
g_2(a,c;z) &\to e^z z^{a-c} \quad (11.13)
\end{aligned}
$$

と漸近する。

今の場合 $a = -i\gamma, c = 1$ であるから上のような解になる。したがって波動関数は A を定数として

$$\psi_c = Ae^{ikz}F(-i\gamma, 1; ik(r-z)) \quad (11.14)$$

とかける。この解の無限遠での形を考える。

$$A = \Gamma(1+i\gamma)e^{-\pi\gamma/2} \quad (11.15)$$

と定数を定めれば、波動関数 ψ_c は十分遠方での振る舞いは

$$\psi_c \to \Gamma(1+i\gamma)e^{-\pi\gamma/2}e^{ikz}\{\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+i\gamma)}[-ik(r-z)]^{i\gamma} + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-i\gamma)}e^{ik(r-z)}[ik(r-z)]^{-i\gamma-1}\} \quad (11.16)$$

とかける。第１項を ψ_i、第２項を ψ_d と定めれば

$$
\begin{aligned}
\psi_i &= e^{ikz}[k(r-z)]^{i\gamma}\\
&= e^{ikz+i\gamma\ln k(r-z)} \quad (11.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_d &= \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)}e^{ikr}\frac{[ik(r-z)]^{-i\gamma}}{ik(r-z)}\\
&= -i\gamma\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}e^{ikr}\frac{[ik(r-z)]^{-i\gamma}}{ikr(1-\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{r}e^{ikr-i\gamma\ln 2kr}\{-\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}e^{-i\gamma\ln\sin^2\frac{\theta}{2}}\}\\
&= \frac{1}{r}e^{ikr-i\gamma\ln 2kr}f_c(\theta) \quad (11.18)
\end{aligned}
$$

と変形できる。ここで

$$
\begin{aligned}
f_c(\theta) &= -\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}e^{-i\gamma\ln\sin^2\frac{\theta}{2}}\\
&= -\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}}e^{-i\gamma\ln\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sigma_0} \quad (11.19)
\end{aligned}
$$

であり $\sigma_0 = \arg\Gamma(1+i\gamma)$。

$\because$ γ は実数であり、ガンマ関数の定義より

$$\Gamma(1+i\gamma) = \int_0^\infty dt t^{i\gamma}e^{-t}$$

この複素共役を取ればそれは $\Gamma(1-i\gamma)$ になっており、$\Gamma(1+i\gamma)=Re^{i\sigma_0}$ と書けば、$\Gamma(1-i\gamma)=Re^{-i\sigma_0}$, 故に

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} &= \frac{Re^{i\sigma_0}}{Re^{-i\sigma_0}} \\ &= e^{2i\sigma_0}\end{aligned} \tag{11.20}$$

とかける □
結局この $f_c(\theta)$ を用いれば十分遠方での波動関数は

$$\psi_c = e^{ikz+i\gamma\ln k(r-z)} + \frac{1}{r}e^{ikr-i\gamma\ln 2kr}f_c(\theta) \tag{11.21}$$

とかける。

11.2 ラザフォードの公式

ポテンシャルが十分遠方で早く 0 に近づく場合 (少なくとも $\frac{1}{r^2}$ の速さで収束する場合) には遠方での波動関数は

$$\psi = e^{ikz} + \frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta) \tag{11.22}$$

の形に書くことができた。しかしながらクーロンポテンシャルの場合は十分遠方の漸近領域であっても

$$\psi_c = e^{ikz+i\gamma\ln k(r-z)} + \frac{1}{r}e^{ikr-i\gamma\ln 2kr}f_c(\theta) \tag{11.23}$$

という形になり ψ_i には $e^{i\gamma\ln k(r-z)}$,ψ_d には $e^{-i\gamma\ln 2kr}$ だけ、位相因子が変化している。クーロン力は長距離力であり、十分遠方にも影響を及ぼすのである。しかしこの場合でも r についての最低次のみを考えれば

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 \tag{11.24}$$

という形に書くことができる。これを示す。まず、入射粒子 (がクーロン力で変化を受けたもの) のフラックスは十分遠方での振る舞いを極座標に戻って考えると

$$\begin{aligned} j_i &= \frac{1}{m}Re(\psi_i^*\frac{\hbar}{i}\nabla\psi_i) \\ &= \frac{\hbar}{2im}\{e^{-i(kz+\gamma\ln k(r-z))}[\boldsymbol{e}_r(ik\cos\theta+i\gamma\frac{1}{r})+\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta(-ikr\sin\theta+i\gamma\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})]e^{i(kz+i\gamma\ln k(r-z))} - c.c\} \\ &\to \frac{\hbar}{2im}\{\boldsymbol{e}_r(ik\cos\theta)-\boldsymbol{e}_\theta(ik\sin\theta)-c.c\}\ (z\to-\infty) \\ &= \frac{\hbar k}{m}\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{11.25}$$

とかける。これは短距離力と同じである。ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向を向いた単位ベクトル。次に同様にして散乱粒子のフラックスを考えると十分遠方では位相変化からの寄与が小さくなることがわかる。

$$\begin{aligned}
j_d &= \frac{1}{m}Re(\psi_d^* \frac{\hbar}{i}\nabla\psi_d) \\
&= \frac{\hbar}{2im}\{\frac{1}{r}e^{-i(kr-\gamma\ln 2kr)}f_c(\theta)^*[\boldsymbol{e}_r(-\frac{1}{r^2}+\frac{ik-i\gamma\frac{1}{r}}{r})f_c(\theta)+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}f_c(\theta)]e^{i(kr-\gamma\ln 2kr)}-c.c\} \\
&\to \frac{\hbar}{2im}\{\frac{1}{r}f_c(\theta)^*[\boldsymbol{e}_r\frac{ik}{r}f_c(\theta)]-c.c\}\ (r\to\infty) \\
&= \frac{\hbar k}{m}\frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned} \tag{11.26}$$

したがって、クーロン散乱における散乱断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_c}{d\Omega} &= \frac{j_d r^2}{j_i} \\
&= |f_c(\theta)|^2
\end{aligned} \tag{11.27}$$

とかけて、クーロン散乱における $f_c(\theta)$ は短距離力での散乱における散乱振幅に対応していることがわかり、これをクーロン散乱の振幅という。これをもちいれば　クーロン散乱の断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_c}{d\Omega} &= \frac{\gamma^2}{4k^2\sin^4\frac{\theta}{2}} \\
&= (\frac{Z_1Z_2e^2}{4E})^2\sin^{-4}\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{11.28}$$

という形になり古典的なクーロン散乱の断面積と”偶然にも”一致する。
これの主な特徴として
1. ポテンシャルの絶対値で決まり、符号によらない。
2. 角に関する分布はエネルギーに無関係。エネルギーは大きさのみ変える
3. ある角に対してはエネルギーが増えると断面積はその逆二乗に比例
4.$\theta=0,\pi$ で発散するので全断面積は無限大
この発散は純粋クーロン場に特有のものであり、自然界ではこのような純粋なクーロン場は存在しないのでこのように断面積が発散することはない。例えば原子核を考えると十分遠方では周りの電子によって遮蔽され、ポテンシャルは 0 になる。
このことをポテンシャルの効く代表的な長さを a としポテンシャルとして湯川型を仮定して考えてみる。

$$V(r)=Z_1Z_2e^2\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \tag{11.29}$$

この力はもはや長距離力ではないが $a \to \infty$ とすればクーロンポテンシャルに一致する。運動量移行を $\boldsymbol{q}$ として Born 近似を用いれば散乱振幅は

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\, r' e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r'}} V(r') \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\int_0^\infty dr\; r'^2 e^{iqr'\cos\theta'} Z_1 Z_2 e^2 \frac{e^{-\frac{-r'}{a}}}{r'} \\
&= -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2}\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr'\; r'^2 \frac{1}{iqr'}[e^{iqr'} - e^{-iqr'}]\frac{e^{-\frac{-r'}{a}}}{r'} \\
&= -Z_1 Z_2 e^2 \frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q^2 + \frac{1}{a^2}} \\
&= -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\cdot\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4k^2a^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{11.30}
$$

と導ける。ここで散乱の前後で運動量 $\hbar k$ の大きさは保存し、角度が θ かわるとして $q^2 = 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ をもちいた。これより、散乱断面積は

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4k^2a^2}}\right)^2 \tag{11.31}
$$

これは $\theta = 0$ でも発散しない。また、θ が小さい時であっても $(\frac{\theta}{2})^2$ が $\frac{1}{4k^2a^2}$ より大きくなるにつれて、すなわち θ が $\frac{1}{ka}$ より大きくなるにつれて分母の $\frac{1}{4k^2a^2}$ の項からの寄与は十分小さくなる。ボルン近似は高エネルギーで k が大きいほどいい近似であり高エネルギーで行われる核物理の散乱実験ではこの近似が使えて、またこの第 2 項は発散を防ぐところ以外では無視しうる。また、遮蔽がなくポテンシャルが無限遠までとどくとすればこれはラザフォードの公式に一致する。