

A5 理論レジュメ

藤井涼平

2015年6月15日

§9 スピンのない同種2粒子の衝突

同種2粒子のそれぞれの座標を $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}$, 質量を m とする. 重心座標 \mathbf{R} , 相対座標 \mathbf{r} を

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{r}^{(2)}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} \quad (44)$$

と定義すると, ハミルトニアンは以下のように書ける:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{4m} + \frac{\mathbf{p}^2}{m} + V(\mathbf{r}) \quad (45)$$

証明.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^{(1)2} + \frac{1}{2m}\mathbf{p}^{(2)2} + V(\mathbf{r})$$

$\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)}$ (重心の運動量), $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{p}^{(2)})$ (相対粒子の運動量) を導入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2} + 2\mathbf{p}^2 \right) + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mathbf{P}^2}{4m} + \frac{\mathbf{p}^2}{m} + V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

重心の質量は $2m$, 相対粒子の質量は $m/2$ である. □

ハミルトニアンを重心と相対粒子の運動で分離できたので, この系の状態は波動関数 $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ で表すことができる. そこで二つの粒子の交換を考えることにする. この交換をしても重心座標 \mathbf{R} は変わらないが, 相対座標 \mathbf{r} は $-\mathbf{r}$ に変化する. なぜなら, \mathbf{r} は定義より「粒子2から見た粒子1の場所」だからである. この交換において,

$$|\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{R}, -\mathbf{r})|^2$$

の要請から

$$\Psi(\mathbf{R}, -\mathbf{r}) = \pm \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \quad (46)$$

となる. 上の式で符号が $+$ の粒子をボゾンと言い, $-$ の粒子をフェルミオンと言う.

9.1 異種粒子の衝突

同種粒子の衝突を考える前に、この節ではまず二つの粒子が異なるものとして考えることにする。衝突パラメータ（入射粒子が標的粒子の影響を受けずに直進した場合の軌道に散乱中心から引いた垂線のベクトル；言葉で説明するより、後に出てくる図1を見た方がわかりやすい）を \mathbf{b} , 時刻 $t = 0$ に衝突が起こるとする。

■衝突前の波動関数 $t \ll 0$ では、系の波動関数を以下のように分離できるとする*1：

$$\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{R}, t) \varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) \quad (t \ll 0) \quad (\text{A})$$

衝突前でポテンシャルの影響を受けていないので、 $\Phi(\mathbf{R}, t)$, $\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t)$ は自由波束で表されるはずである：

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) &= e^{-iEt/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b})} \cdot \chi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) \quad (t \ll 0) \\ E &= \hbar^2 \mathbf{k}^2 / m \end{aligned} \quad (47)$$

この式の前半部分は平面波、 χ は波束の形を決める関数である。例えば、ガウス波束ならば χ はガウシアンである。この関数は以下の性質を持つ：

1. 引数が $\mathbf{0}$ 付近（波束の広がり程度の領域）でのみ顕著な値をもつ。
2. 規格化されている：

$$\int |\chi(\boldsymbol{\rho})|^2 d\boldsymbol{\rho} = 1$$

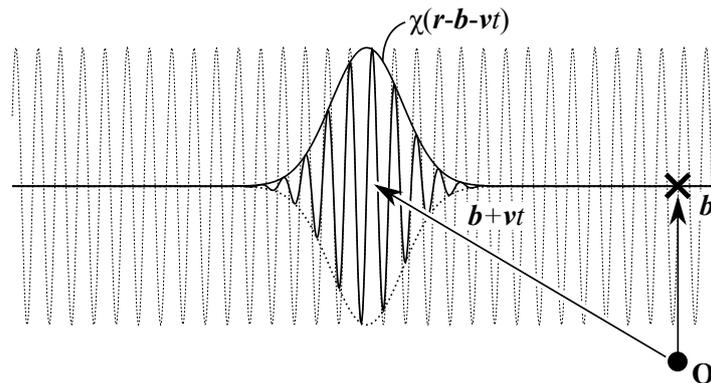


図1 (47) の概要

*1 $t \ll 0$ では2粒子の相互作用はないから、 \mathbf{R}, \mathbf{r} の波動関数の積ではなく、 $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}$ の波動関数の積で表されるはずである。しかし、 \mathbf{R}, \mathbf{r} の波動関数の積から出発したことによる誤差は無視できる程度らしい。

■衝突後の波動関数 衝突後の波動関数は以下のように表される：

$$\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{R}, t) [\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) + \psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t)] \quad (t \gg 0) \quad (48)$$

$\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t)$ は透過波, $\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t)$ は広がっていく波束を表している.

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t) &\sim e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] f(\theta, \varphi) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \quad (t \gg 0) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}/v \\ \mathbf{s} &= \text{grad}_{\mathbf{k}} \arg f_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (49)$$

重心系で考えると, $\Phi(\mathbf{R}, t)$ は原点に集中していて動かない. つまり, $\Phi(\mathbf{R}, t)$ は散乱断面積に影響を与えない. よって, $\Omega = (\theta, \varphi)$ 方向への粒子 (1) の微分断面積は, $\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t)$ のみ考えればよいことになる. χ が規格化されていることを考慮すれば, (49) より, 微分断面積は $|f(\theta, \varphi)|^2$ で表される (波束ではなく, 平面波の場合にこうなることを Gibson の理論ゼミで導いた). 従って,

$$\sigma^{(1)}(\Omega) = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (50)$$

となる.

一方, 重心系で見ているから, 粒子 (2) は真逆に散乱される. これはパリティ変換と同じように考えられる*2.

$$\sigma^{(2)}(\Omega) = |f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 \quad (51)$$

9.2 同種粒子 — スピンのない場合

ここまで2つの粒子が異なるものとして考えてきたが, これ以降は同種粒子として扱うことにする. そのためには, 以下の修正が必要である.

(1) 断面積の再定義

微分断面積は, 単位時間, 単位流束あたりに, ある立体角 Ω に散乱してくる粒子の数であった. 粒子 1, 2 は区別することができないから, その両方をカウントするしかない.

$$\sigma(\Omega) = \sigma^{(1)}(\Omega) + \sigma^{(2)}(\Omega) \quad (52)$$

一方, 全断面積は, 単位流束あたりに 入射 ビームが失う粒子の個数である. 同種粒子を重心系から見ているから, 入射粒子も標的粒子も全く同じように原点に向かってきて, 両方散乱していくはずである. 従って, 入射ビームが失う粒子のみカウントするためには, (52) を積分するだけでなく, それを2で割る必要がある.

$$\sigma^{(\text{tot})} = \frac{1}{2} \int \sigma(\Omega) d\Omega \quad (53)$$

*2 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ だが $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ なので完全にはパリティ変換ではない. しかし, $\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}$ には \mathbf{r} しか含まれていないから, $\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}$ に関してはパリティ変換と同様に考えられる.

(2) 波動関数の対称化

波動関数は正しく対称化され, また $t \ll 0$, $t \gg 0$ での条件 (A), (47) を満たす必要がある. そのためには, 今まで求めた Ψ を組み合わせて以下のようにすればよい.

$$\hat{\Psi}_b(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_b(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) \pm \Psi_b(\mathbf{R}, -\mathbf{r}, t)] \quad \langle B \rangle$$

証明. $t \ll 0$ では, (A) を代入することで

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_b(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi(\mathbf{R}, t) \varphi_b(\mathbf{r}, t) \pm \Phi(\mathbf{R}, t) \varphi_b(-\mathbf{r}, t)] \\ &= \Phi(\mathbf{R}, t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_b(\mathbf{r}, t) \pm \varphi_b(-\mathbf{r}, t)] \\ &= \Phi(\mathbf{R}, t) \hat{\varphi}_b(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad \langle C \rangle$$

ただし

$$\hat{\varphi}_b(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_b(\mathbf{r}, t) \pm \varphi_b(-\mathbf{r}, t)]$$

となり, 初期条件 (A) を満たしている. 具体的に $\hat{\varphi}_b(\mathbf{r}, t)$ を計算すると, (47) を代入して

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_b(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi(-\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] \\ &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \pm \chi(-\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] \end{aligned} \quad \langle D \rangle$$

一方, $t \gg 0$ では, (48) を代入することで

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_b(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi(\mathbf{R}, t) [\varphi_b(\mathbf{r}, t) + \psi_b^{(d)}(\mathbf{r}, t)] \pm \Phi(\mathbf{R}, t) [\varphi_b(-\mathbf{r}, t) + \psi_b^{(d)}(-\mathbf{r}, t)]] \\ &= \Phi(\mathbf{R}, t) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_b(\mathbf{r}, t) \pm \varphi_b(-\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_b^{(d)}(\mathbf{r}, t) \pm \psi_b^{(d)}(-\mathbf{r}, t)] \right] \\ &= \Phi(\mathbf{R}, t) \cdot [\hat{\varphi}_b(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}_b^{(d)}(\mathbf{r}, t)] \end{aligned}$$

となり, 条件 (48) を満たしている. なお,

$$\hat{\psi}_b^{(d)}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_b^{(d)}(\mathbf{r}, t) \pm \psi_b^{(d)}(-\mathbf{r}, t)] \quad \langle E \rangle$$

である. □

(D) 第 1 項は粒子 (1) が速度 \mathbf{v} で粒子 (2) に向かっていく状態, 第 2 項は粒子 (2) が速度 \mathbf{v} で粒子 (1) に向かっていく状態を表している.

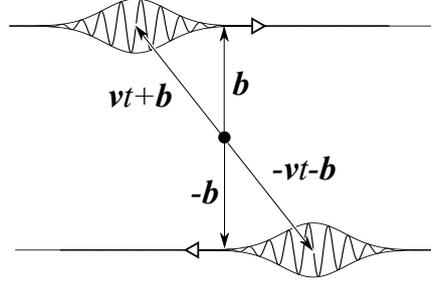


図2 〈D〉の概要；上の波束が第1項, 下の波束が第2項

■対称化散乱振幅・微分断面積 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ で $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ と変換されることに注意すると, 〈E〉に (49) を代入して

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(r - vt) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right. \\
 &\quad \left. \pm e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(r - vt) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] f(\pi - \theta, \varphi + \pi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \\
 &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(r - vt) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] \frac{1}{\sqrt{2}} [f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \varphi + \pi)] \frac{e^{ikr}}{r} \\
 &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(r - vt) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] \hat{f}(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}
 \end{aligned}$$

$$\hat{f}(\theta, \varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \varphi + \pi)] \quad \langle \text{F} \rangle$$

これが対称化した散乱振幅である. (50), (51) を使うと,

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(1)}(\Omega) &= |\hat{f}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{1}{2} |f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 \\
 \sigma^{(2)}(\Omega) &= |\hat{f}(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 = \frac{1}{2} |f(\pi - \theta, \varphi + \pi) \pm f(\pi - (\pi - \theta), (\varphi + \pi) + \pi)|^2 \\
 &= \frac{1}{2} |f(\pi - \theta, \varphi + \pi) \pm f(\theta, \varphi)|^2 = \sigma^{(1)}(\Omega)
 \end{aligned}$$

(52) より, 微分断面積

$$\begin{aligned}
 \sigma(\Omega) &= \sigma^{(1)}(\Omega) + \sigma^{(2)}(\Omega) \\
 &= |f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2
 \end{aligned} \quad (54)$$

が求められた.

§10 二つの陽子の衝突

今まではスピンのない同種2粒子の衝突を扱ってきたが、これをスピンのある場合(2陽子の衝突)に拡張する。引き続き、相互作用は中心力ポテンシャルのみとする。

■1重項状態と3重項状態 陽子のスピンは $1/2$ である。2つの陽子(1),(2)の合成スピンを考える。合成スピンを \hat{S} としたとき、 \hat{S}^2 の固有状態は以下の4つがある。

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$$

$$|1,-1\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$$

$$|1,1\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$$

1,2,3番目の固有値は $2\hbar^2$ で、これらを3重項状態(Triplet state)という。4番目の固有値は0であり、これを1重項状態(Singlet state)という[1]。

3重項状態の粒子間と1重項状態の粒子間とは異なる相互作用が働くかもしれない。そこで、それぞれの場合の対称化される前の散乱振幅を $f_t(\theta)$, $f_s(\theta)$ とする。ここからは、煩雑を避けるため φ 依存性がないものとする。適切に座標を選べば、 φ 依存性をなくすることができる。具体的には、粒子が入射してくる方向を z 軸として、散乱中心を原点にとればよい。

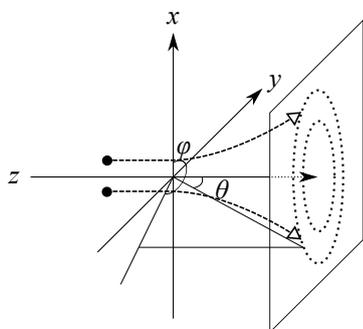


図3 適切に座標を選べば、散乱振幅は φ に依存しない

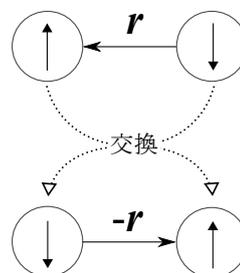


図4 粒子を交換すると、座標とスピンが両方交換される

2粒子を交換すると、座標が交換される(相対座標が $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ に変換される)と同時に、スピンも交換される。陽子はフェルミオンだから、粒子の交換に対して波動関数が反対称でなければならない。そのためには以下の条件を満たす必要がある。

- 3重項状態の場合は、スピンの交換に対して波動関数は対称である。従って、座標の交換によって波動関数が反対称になるよう、散乱振幅は

$$\hat{f}_t(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)]$$

となる。

- 1重項状態の場合は, スピンの交換に対して波動関数は 反対称 である. 従って, 座標の交換をしても波動関数が反対称のままになるよう, 散乱振幅は

$$\hat{f}_s(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)]$$

となる.

■微分断面積 (54) を用いると,

$$\begin{aligned}\sigma_t(\Omega) &= 2|\hat{f}_t(\theta)|^2 = |f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)|^2 \\ \sigma_s(\Omega) &= 2|\hat{f}_s(\theta)|^2 = |f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)|^2\end{aligned}$$

であることがわかる.

入射粒子, 標的粒子のスピンはランダムだから, スピン 3, 1重項の 4つの状態はすべて同じ確率で実現する. 従って,

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &= \frac{3}{4}\sigma_t(\Omega) + \frac{1}{4}\sigma_s(\Omega) \\ &= \frac{3}{4}|f_s(\theta) - f_s(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4}|f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)|^2\end{aligned}\tag{55}$$

となる. 特に, はたらく力がスピンの無関係ならば

$$f_s(\theta) = f_t(\theta) = f(\theta)$$

とできて, (55) を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &= \frac{3}{4}|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4}|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \\ &= \frac{3}{4} [|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - f^*(\theta)f(\pi - \theta) - f(\theta)f^*(\pi - \theta)] \\ &\quad + \frac{1}{4} [|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + f^*(\theta)f(\pi - \theta) + f(\theta)f^*(\pi - \theta)] \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \frac{1}{2} [f^*(\theta)f(\pi - \theta) + f(\theta)f^*(\pi - \theta)]\end{aligned}\tag{56}$$

となる. ポテンシャルがクーロン力のみの際は, 散乱振幅は第 11 章 (33) で表せる.

$$\begin{aligned}f_c(\theta) &= -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp\left(-i\gamma \log\left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right) && \text{第 11 章 (33)} \\ &= -\frac{\gamma}{2k} e^{2i\sigma_0} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-i\gamma-1} && \langle \mathbf{G} \rangle\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{e^2}{\hbar v} \quad (v \text{ は相対粒子の速度}) \\ \sigma_0 &= \arg \Gamma(1 + i\gamma)\end{aligned}$$

である。(56)の各項を計算すると、

$$\begin{aligned}
|f_c(\theta)|^2 &= \frac{\gamma^2}{4k^2} \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \\
|f_c(\pi - \theta)|^2 &= \frac{\gamma^2}{4k^2} \cos^{-4} \frac{\theta}{2} \\
f_c^*(\theta)f_c(\pi - \theta) + f_c(\theta)f_c^*(\pi - \theta) \\
&= \frac{\gamma^2}{4k^2} \left[\left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{i\gamma-1} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-i\gamma-1} + \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-i\gamma-1} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{i\gamma-1} \right] \\
&= \frac{\gamma^2}{4k^2} \left(\sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \right) \left[\left(\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)^{i\gamma} + \left(\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)^{-i\gamma} \right] \\
&= \frac{\gamma^2}{4k^2} \left(\sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \right) \cdot 2 \cos \left(\gamma \log \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

となるから、これらを(56)に代入して

$$\sigma(\Omega) = \frac{\gamma^2}{4k^2} \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} - \left(\sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\gamma \log \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

となる。 $E = \hbar^2 k^2 / m$, $v = 2\hbar k / m$, $\gamma = e^2 / \hbar v$ を用いると、

$$\frac{\gamma^2}{4k^2} = \frac{e^4}{4k^2 \hbar^2 v^2} = \frac{e^4}{4k^2 \hbar^2 \left(\frac{2\hbar k}{m} \right)^2} = \frac{e^4}{\left(4 \frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^2} = \left(\frac{e^2}{4E} \right)^2$$

となるから、これを代入すると、最終的に Mott の公式

$$\sigma(\Omega) = \left(\frac{e^2}{4E} \right)^2 \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} - \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{e^2}{\hbar v} \log \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \quad (57)$$

が得られる。角度に関する分布は、 E に依存しない。 E が増加するに従い、各角度における微分断面積は減少する。 $e^2 / \hbar v = 20$ として、この概形をプロットしたものが図5である。後述の古典的計算による微分断面積も重ねてある。グラフから、 $\theta = 90^\circ$ を中心に振動し、 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ で発散することがわかる。この振動は、散乱振幅

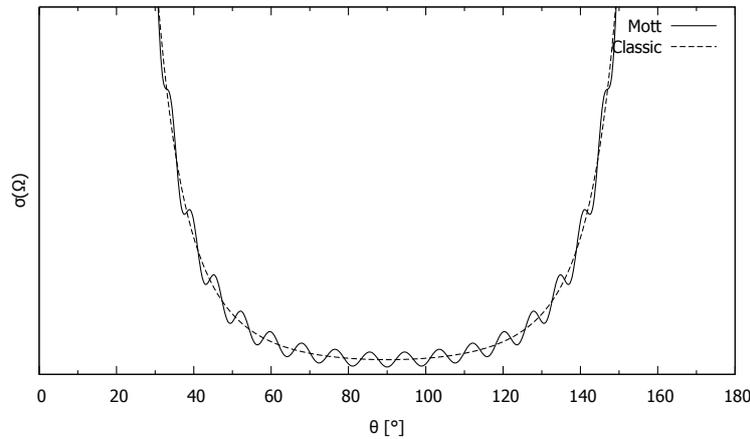


図5 微分断面積の概形

$f(\theta)$ と $f(\theta - \pi)$ の干渉によるものである。また、断面積（これを全立体角について積分して 2 で割ったもの）も発散してしまうことがわかる。これは、クーロンポテンシャルが $1/r$ に依存性するため、陽子同士がどれほど離れていても力を受ける（散乱する）からである [2]。

■古典的計算 古典的計算では粒子を区別できるから、干渉を考える必要がない。(50), (51), (52) より、微分断面積は

$$\sigma_{\text{classic}}(\Omega) = |f_c(\theta)|^2 + |f_c(\pi - \theta)|^2$$

となる。 $\langle G \rangle$ を用いると、

$$\sigma_{\text{classic}}(\Omega) = \left(\frac{e^2}{4E}\right)^2 \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} \right]$$

となる。これも図 5 にプロットしてある。

参考文献

[1] スピン三重項と三重項状態

<http://www.f-denshi.com/000okite/100ryosi/241triplet.html>

[2] 東京工業大学 大学院理工学研究科 武藤研究室 原子核物理学概論 第 2 章 Rutherford 散乱

http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/INP02/INP02_chap02.pdf