

2015 年 前期  
課題演習 A5 報告書

加須屋春樹<sup>†</sup>, 坂口雄一<sup>†</sup>, 鈴木一輝<sup>†</sup>, 中脇稔貴<sup>†</sup>, 藤井涼平<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 京都大学 理学部

2015 年 4 月 13 日 — 2015 年 10 月 29 日

# 目次

概要	3
第 I 部 理論	4
第 1 章 同種粒子の対称性	5
1.1 ボソンとフェルミオン	5
1.2 複合粒子の統計性	5
1.3 波動関数の対称化, 反対称化	6
第 2 章 断面積と微分断面積	7
2.1 物理過程の断面積	7
2.2 微分断面積	7
2.3 微分断面積の測定	7
2.4 波動関数と微分断面積	7
第 3 章 部分波展開による断面積の導出	9
3.1 部分波展開	9
3.2 微分断面積・断面積	10
第 4 章 Coulomb 散乱	11
4.1 Coulomb 散乱波	11
第 5 章 Rutherford 散乱・Mott 散乱	13
5.1 異種粒子の散乱	13
5.2 同種粒子の散乱	14
第 6 章 Blair 散乱	15
6.1 Blair モデルの考え方	15
6.2 クーロン散乱波の部分波展開	15
6.3 Blair モデルの拡張	18
第 7 章 運動学	20
7.1 古典論	20
7.2 相対論	21
7.3 本実験における運動学の利用	23

第 II 部	実験	24
第 8 章	実験装置	25
8.1	加速器 . . . . .	25
8.2	データの取得 . . . . .	25
第 9 章	炭素膜厚の測定	27
9.1	測定原理 . . . . .	27
9.2	実験 . . . . .	27
第 10 章	実験手順	30
10.1	実験の準備 . . . . .	30
10.2	散乱実験 . . . . .	30
第 11 章	実験結果	32
11.1	微分断面積 (実験値) の求め方 . . . . .	32
11.2	測定データ . . . . .	32
第 III 部	解析	40
第 12 章	散乱粒子のカウント	41
12.1	散乱粒子のカウント . . . . .	41
第 13 章	角度の補正	43
13.1	理論値との比較 . . . . .	43
13.2	グラフのずれと原因 . . . . .	43
13.3	補正の方針 . . . . .	43
13.4	検出器の回転中心のずれ . . . . .	43
13.5	スピンの同定 . . . . .	46
13.6	異種粒子散乱のフィッティング . . . . .	46
第 14 章	誤差	50
14.1	誤差伝播 . . . . .	50
14.2	微分断面積の誤差 (求め方) . . . . .	50
14.3	微分断面積の誤差 (データ) . . . . .	51
14.4	定数倍 . . . . .	51
第 15 章	不純物解析	56
15.1	不純物解析をする理由 . . . . .	56
15.2	運動学 . . . . .	56
15.3	ラザフォード散乱 . . . . .	57
15.4	解析と結果 . . . . .	57
結論		60
謝辞		61
参考文献		62

## 概要

量子力学において粒子どうしの散乱は、経路による区別ができないため波動関数の重ね合わせとして記述する。そのため同種粒子どうしの散乱では干渉が生まれる。

今期の課題演習 A5 ではこういった量子力学における対称性について理論を学習した後、炭素原子同位体の同種粒子、異種粒子間の衝突散乱実験を、マイクロイオンビーム加速器を用いて行い、確かめた。

第 I 部

理論

# 第 1 章

## 同種粒子の対称性

### 1.1 ボソンとフェルミオン

#### 1.1.1 同種粒子の入れ替え

同種の粒子が  $N$  個ある系を考える。各粒子の位置  $r$  およびスピンの  $z$  成分  $s_z$  をまとめて  $\xi$  とする。するとこの系の波動関数は

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad (1.1)$$

と表される。

ここで、二つの粒子  $i, j$  を入れ替える演算子  $\hat{P}_{i,j}$  を導入する。すなわち、

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i,j}\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \\ = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \end{aligned} \quad (1.2)$$

のようになる。同種の粒子を入れ替えても状態は変化しないはずであるので、 $c$  を定数として、

$$\hat{P}_{i,j}\psi = c\psi \quad (1.3)$$

とかけるはずである。さらにもう一度  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させると、

$$\hat{P}_{i,j}\hat{P}_{i,j}\psi = c^2\psi \quad (1.4)$$

となるが二回  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させているので、これは  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させない状態と全く同じ状態のはずであり、

$$\hat{P}_{i,j}\hat{P}_{i,j}\psi = \psi \quad (1.5)$$

である。この二式を使うと  $c^2 = 1$  となり、したがって、

$$c = \pm 1 \quad (1.6)$$

を得る。これを使うと  $\hat{P}_{i,j}$  の固有値は  $\pm 1$  となり、(1.3) は、

$$\hat{P}_{i,j}\psi = \pm\psi \quad (1.7)$$

となる。

#### 1.1.2 粒子の分類

したがって、同種粒子の入れ替えにおいて、その系は対称または反対称の二つに分類されることがわかる。そして、これは粒子の種類によって決まっていることが実験からわかっており、粒子の入れ替えに対して対称な粒子をボソン、反対称な粒子をフェルミオンと呼ぶ。また、実験結果より、電

子、陽子、中性子などスピンの反整数の粒子はフェルミオンであり、 $\alpha$  粒子、中間子、光子などスピンの整数である粒子はボソンであることがわかっている。

### 1.2 複合粒子の統計性

#### 1.2.1 複合粒子からなる系

原子や原子核のように、いくつかの粒子からなる系の基底状態である複合粒子を考える。複合粒子を励起するのに必要なエネルギーに比べて、十分に低いと考えられるエネルギー領域においては、複合粒子を基本粒子のように扱うことができる。すなわち、いくつかの複合粒子からなる系の波動関数は、それぞれの複合粒子の重心座標およびスピンの  $z$  成分の関数として表せる。よって、 $N$  個からなる複合粒子の系は、各複合粒子の重心座標  $r_{\text{CM}}$ 、スピンの  $z$  成分  $s_z$  をまとめて  $\xi^{\text{CM}}$  とすると、

$$\psi_{\text{複}}(\xi_1^{\text{CM}}, \xi_2^{\text{CM}}, \dots, \xi_N^{\text{CM}}) \quad (1.8)$$

とかける。

#### 1.2.2 複合粒子の入れ替え

次に波動関数 (1.8) に  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させたときに波動関数がどう変化するかを考える。

この複合粒子が  $N_F$  個のフェルミオンと  $N_B$  個のボソンからなるとする。この複合粒子からなる系に  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させるということは、その構成要素である  $N_F$  個のフェルミオンと  $N_B$  個のボソンを入れ替えることと等しい。ボソンの入れ替えに対して波動関数は対称であるため変化はないが、フェルミオンの入れ替えに対しては波動関数は反対称であり、フェルミオン一つの入れ替えに対して波動関数に  $-1$  がかかるので、 $N_F$  個のフェルミオンの入れ替えに対しては  $(-1)^{N_F}$  がかかる。したがって、複合粒子の入れ替えに対して、奇数個のフェルミオンを含む複合粒子からなる系は、

$$\hat{P}_{i,j}\psi_{\text{複}} = -\psi_{\text{複}} \quad (1.9)$$

のようにフェルミオンとなり、偶数個のフェルミオンを含む複合粒子からなる系は、

$$\hat{P}_{i,j}\psi_{\text{複}} = \psi_{\text{複}} \quad (1.10)$$

のようにボソンとなる。

したがって、 $^{12}\text{C}$  は偶数個のフェルミオンからなるのでボソン、 $^{13}\text{C}$  は奇数個のフェルミオンからなるのでフェルミオンである。

### 1.3 波動関数の対称化, 反対称化

今までは、最初に波動関数があり、それに  $\hat{P}_{i,j}$  を作用させ、波動関数が対称か、反対称かで粒子を区別していた。次は、もとの波動関数自体に対称性、反対称性を要請することでその系の波動関数を表すことを考える。

まず、同種粒子であることを考えないと  $N$  個の粒子からなる系の波動関数は、

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad (1.11)$$

となる。ここで、以下のように対称化演算子  $\hat{S}$ , 反対称化演算子  $\hat{A}$  を導入する。

$$\hat{S}\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \psi(\xi_{\sigma_1}, \xi_{\sigma_2}, \dots, \xi_{\sigma_N}) \quad (1.12)$$

$$\hat{A}\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn } \sigma \psi(\xi_{\sigma_1}, \xi_{\sigma_2}, \dots, \xi_{\sigma_N}) \quad (1.13)$$

ただし、 $S_N$  は  $\{1, 2, \dots, N\}$  の置換全体の集合であり、 $\text{sgn } \sigma$  は、 $\sigma$  が偶置換であれば  $+1$ 、奇置換であれば  $-1$  をとるとする。

$\hat{S}\psi$  は粒子の入れ替えに対して対称、 $\hat{A}\psi$  は粒子の入れ替えに対して反対称であるので、同種のボソン、フェルミオンからなる系の波動関数は  $\hat{S}\psi$ ,  $\hat{A}\psi$  を用いて表せる。

例えば、二粒子の場合を考えると、その粒子がボソン、フェルミオンであるときはそれぞれ、

$$\hat{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\psi(\xi_1, \xi_2) + \psi(\xi_2, \xi_1)\} \quad (1.14)$$

$$\hat{A}\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\psi(\xi_1, \xi_2) - \psi(\xi_2, \xi_1)\} \quad (1.15)$$

のようになり、確かに粒子の入れ替えに対して対称、反対称となっている。

## 第 2 章

# 断面積と微断面積

### 2.1 物理過程の断面積

粒子の衝突において、標的粒子の面密度を  $n$  とおくと、入射粒子が特定の物理過程を経る確率は、 $n$  に比例することが期待される。この比例定数を  $\sigma$  とおくと、 $\sigma$  は面密度  $n[L^{-2}]$  との積で確率（無次元）を与えるので、面積の次元をもつ。この  $\sigma$  を物理過程の断面積とよぶ。

粒子が衝突の際に経る物理過程には、弾性散乱、励起、吸収などいろいろなものがある。これらは同時に 2 つ以上起こることはないので、確率を考える上での背反事象とみなせる。個々の過程の起こる確率はそれぞれ  $n$  に比例するので、この各々に断面積が定義できる。さらに背反事象に関しては確率の足し算が可能なので、粒子が何らかの物理過程を経る確率は、起こりうる全ての過程の断面積の総和  $\sigma_{\text{tot}}$  を用いて、 $\sigma_{\text{tot}}n$  と書くことができる。この  $\sigma_{\text{tot}}$  を衝突の全断面積とよぶ。

### 2.2 微断面積

粒子が標的に対し散乱を行った場合、一般に粒子の進行方向（運動量の向き）は変化する。これに対し、衝突地点を中心とするある系で見た単位立体角に粒子が散乱される確率を微断面積とよぶ。微断面積は散乱に限らず、反応後に何らかの粒子（入射粒子と同じものでなくともよい）が放出されるような過程ならば定義されうる。

ある立体角  $\Omega$  への微断面積を  $\zeta(\Omega)$  と書くと、粒子の放出は全立体角  $4\pi$  のどこかへと行われるので、定義から、その全立体角での積分はその過程の断面積を与える。

$$\int_{\Omega} \zeta(\Omega) d\Omega = \sigma \quad (2.1)$$

このことから、微断面積は一般に、微分の記号を借用して

$$\zeta(\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) \quad (2.2)$$

と表記される。

ある物理過程の断面積を実験的に求めようとするとき、実際の実験で読み取れるのは「どの方向にどれだけ散乱（放出）

されたか」という情報だけなので、一旦各立体角での微断面積を求めてから、上の式に従ってそれらを足し上げて過程そのものの断面積を算出する、という手法がとられる。

また、後述するように散乱過程に回折（干渉）構造が含まれる場合、それは微断面積の角度依存性の変化という形で現れる。

立体角は観測者の座標系に依存するために、微断面積も重心系と実験室系のどちらで見るかによって変化する。これら二つの系の間での微断面積の変換には立体角の変換を応用することができ、その方法は 7 章にて解説している。

### 2.3 微断面積の測定

現実の系での実験から、上記の微断面積を求める方法を述べる。標的粒子（面密度を  $n$  とおく）に衝突させる粒子のビームを入射し、その射線から角度  $\theta$ 、距離  $l$  の位置に微小な面積  $S$  の検出器を配置して放出される粒子を観測する場合を考える。簡単のため、検出器を除いて系は射線に関し軸対称であるとする。このとき、微断面積  $d\sigma/d\Omega$  は単に  $\theta$  の関数として与えられる。

入射粒子数が  $N_{\text{inc}}$  (incident) となったとき、観測された粒子数が  $N_{\text{rec}}$  (received) であったとする。一度の過程で放出される粒子数が一つなら、これが角度  $\theta$  へ放出される確率は、これらの比  $N_{\text{rec}}/N_{\text{inc}}$  である。一方、ある方向に単位立体角あたり粒子が放出される確率は、微断面積と標的の面密度との積で与えられるから、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \times n \times d\Omega = \frac{N_{\text{rec}}}{N_{\text{inc}}} \quad (2.3)$$

ここで、 $d\Omega$  は検出器のカバーする微小立体角で、今の場合  $S/l^2$  で与えられるから、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{l^2}{nS} \frac{N_{\text{rec}}}{N_{\text{inc}}} \quad (2.4)$$

この式に  $N_{\text{inc}}$ 、 $N_{\text{rec}}$  の二つの数値を代入すれば、この過程の角度  $\theta$  での微断面積を求めることができる。

### 2.4 波動関数と微断面積

ミクロな粒子同士の衝突問題を考えるとき、入射粒子が二つ以上の標的粒子と相互作用することがないとみなせるな



ら、考えるべき標的粒子一つだけに注目し、入射粒子との間の重心系で波動関数を考えるのが定石である。ただし、こうして計算した波動関数と微分断面積との対応関係を考えるのは難しい。ここではこれらの関係を、以下の二つの仮定をおいた場合に限って考える。

- 過程として弾性散乱をえらぶ  
これは、入射粒子と散乱粒子が同じ大きさ  $v$  の速度を持つとする仮定である。
- 標的は十分に疎である  
具体的には、面密度  $n$  の逆数が、散乱の断面積より十分に大きければよい。この仮定により各標的粒子は、「占める」面積  $1/n$  に入射した粒子だけを散乱するものとみなせる。なお、先述の重心系を考える際の仮定はこれからも従う。

散乱された粒子の波動関数が  $\psi_{\text{scat}}$  で与えられたとする。Born の解釈により、 $|\psi_{\text{scat}}|^2$  は粒子の確率密度を与える。よって、微小面積  $dS$ 、微小時間  $dt$  に対し、

$$j dt dS = v |\psi_{\text{scat}}|^2 dt dS \tag{2.5}$$

は  $dt$  の間に  $dS$  を通過する粒子数の期待値を表す。 $j$  は散乱粒子のフラックスである。

一方、入射波の個数密度が 1 に規格化されているとすると、これも速さは  $v$  なので、 $dt$  の間に標的粒子が「占める」面積  $1/n$  に入射する粒子数は、 $v dt/n$  で与えられる。

従って、ある微小立体角  $d\Omega = dS/r^2$  に対して、ここへの微分断面積  $d\sigma_{\text{scat}}/d\Omega$  とおくと、一個の入射粒子が  $d\Omega$  に散乱される確率について、

$$\frac{d\sigma_{\text{scat}}}{d\Omega} n \times d\Omega = \frac{v |\psi_{\text{scat}}|^2 dt dS}{v dt/n} \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{\text{scat}}}{d\Omega} = r^2 |\psi_{\text{scat}}|^2 \tag{2.7}$$

この式は一見  $r$  依存性が残っているように見えるが、3章や4章で扱う問題では  $\psi_{\text{scat}}$  (あるいは  $|\psi_{\text{scat}}|$ ) の  $r$  依存性は  $1/r$  の因子の形でのみ現れるので、結局  $d\sigma_{\text{scat}}/d\Omega$  は  $r$  に依らない角度の関数となる。

# 第 3 章

## 部分波展開による断面積の導出

狭い領域のみに中心力ポテンシャルを持つ物質との散乱において、部分波展開を用いることで弾性散乱, 非弾性散乱における微分断面積, 断面積を求める。

### 3.1 部分波展開

#### 3.1.1 前提条件

入射粒子と標的粒子 1 つずつの散乱を考える。標的粒子は、等方的で周囲の限定された範囲にのみ散乱の影響を与えると<sup>1)</sup>。また、入射粒子と標的粒子の重心を原点として表す座標系（重心系）で議論をすすめることに<sup>2)</sup>。

#### 3.1.2 入射粒子の波動関数

入射粒子の波動関数  $\psi_{\text{inc}}$ （平面波）は、球面波の和で書き表せる。

$$\psi_{\text{inc}} = e^{ikr \cos \theta} \quad (3.1)$$

$$= \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \cdot \left\{ e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \right\} \quad (3.2)$$

こうすることで、内向き球面波  $e^{ikr}$  と外向き球面波  $e^{-ikr}$  に分けられる。

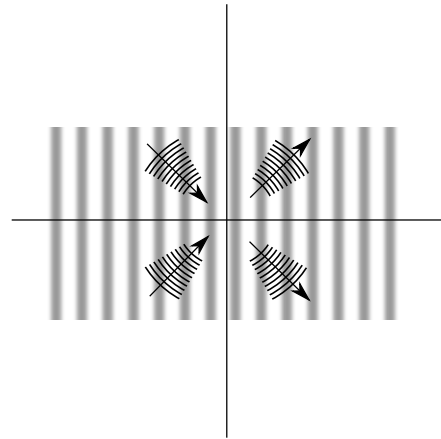


図 3.1 入射波  $\psi_{\text{inc}}$  とその部分波の模式図

#### 3.1.3 全体, 散乱粒子の波動関数

図 3.1 を見れば明らかなように、内向き球面波はまだ原点に到達していない波を、外向き球面波はすでに原点を通過した波を表している。従って、全体の波動関数  $\psi_{\text{tot}}$ , 弾性散乱された粒子の波動関数を  $\psi_{\text{scat}}$  とすると、

$$\psi_{\text{tot}} = \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \cdot \left\{ \eta_l e^{2i\delta_l} e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \right\} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{scat}} &= \psi_{\text{tot}} - \psi_{\text{inc}} \\ &= \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \cdot \left\{ (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1) e^{ikr} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と表すことができる。式 (3.3) の  $\eta_l e^{2i\delta_l}$  は散乱による影響を修正するための係数である。 $\eta_l$  を弾性度、 $\delta_l$  を位相のずれという。

遷移振幅

$$T_l \equiv \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \quad (3.5)$$

$$= \frac{\eta_l}{2} \sin 2\delta_l + \left( \frac{1}{2} - \frac{\eta_l}{2} \cos 2\delta_l \right) i \quad (3.6)$$

<sup>1)</sup> この仮定がないと、散乱する前に標的粒子に近づいただけで波動関数が影響を受けてしまう。

<sup>2)</sup> こうすることで、入射してくる粒子も弾性散乱した粒子もすべて同じ運動量  $k$  をもつことになり、球面波はすべて 1 つの波数  $k$  を使って表すことができるようになる。

を導入することで、散乱粒子の波動関数は

$$\psi_{\text{scat}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) T_l \quad (3.7)$$

と表される。また、散乱振幅

$$f(\theta) \equiv \lambda \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) T_l \quad (3.8)$$

を導入することで、

$$\psi_{\text{scat}} = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (3.9)$$

となる。ただし、 $\lambda = \lambda/2\pi$  である。

## 3.2 微分断面積・断面積

### 3.2.1 弾性散乱の微分断面積

散乱粒子の点  $(r, \theta)$  における密度は

$$|\psi_{\text{scat}}|^2 = \frac{e^{-ikr}}{r} f(\theta)^* \cdot \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) = |f(\theta)|^2 r^{-2}$$

で表される。速度×密度  $= v|\psi_{\text{scat}}|^2$  は散乱粒子のフラックス（単位時間、点  $(r, \theta)$  における単位面積に散乱してくる粒子の数）である。 $dS/r^2 = d\Omega$  だから、

$$\begin{aligned} v|\psi_{\text{scat}}|^2 dS &= vr^2 |f(\theta)|^2 r^{-2} d\Omega \\ &= v|f(\theta)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

これは単位時間当たり  $d\Omega$  に散乱してくる粒子の数を表す。単位時間、単位面積あたりに  $v|\psi_{\text{inc}}|^2 = v$  個の粒子が入射してくるから、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{v} \cdot v|f(\theta)|^2 = |f(\theta)|^2 \quad (3.10)$$

これに (3.8) を代入すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \lambda^2 \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) T_l \right|^2 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^2 \sum_l (2l+1)^2 P_l(\cos \theta)^2 |T_l|^2 \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{l \neq l'} (2l+1)(2l'+1) T_l T_{l'}^* \\ &\quad \cdot P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。 $l$  についての和の部分を主要項、 $l \neq l'$  についての和の部分を干渉項という。

### 3.2.2 弾性散乱の断面積

断面積は、微分断面積  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  を立体角で積分することで得られる。

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int d\sigma = \sigma \quad (3.13)$$

$P_l(\cos \theta)$  の直交性より、積分すれば干渉項は消える。従って

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{elastic}} &= \int_{4\pi} |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= \lambda^2 \sum_l (2l+1)^2 |T_l|^2 \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \\ &= 4\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) |T_l|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.2.3 非弾性散乱の断面積

(3.4) のうち、原点に向かう粒子の波動関数は  $e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}$  の項である。よって、単位時間あたりに  $d\Omega$  から入射してくる粒子の数は、3.2.2 と全く同様の議論によって

$$vr^2 \left| \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{-ikr} \right|^2 d\Omega$$

これを全球について積分すると、原点に向かってくる波数  $k$  を持つ粒子の単位時間あたりの数は

$$v\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1)$$

となる。一方、原点から外に向かう粒子の波動関数は、 $e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}$  の項である。単位時間あたりに  $d\Omega$  に入射してくる粒子の数は、

$$vr^2 \left| \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \eta_l e^{2i\delta_l} e^{ikr} \right|^2 d\Omega$$

これを全球について積分すると、外側へ向かっていく波数  $k$  をもつ粒子の単位時間あたりの数は

$$v\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) \eta_l^2$$

となる。この差をとると、波数  $k$  をもつ粒子が原点で単位時間あたりに減少する数は

$$v\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1)(1 - \eta_l^2)$$

と表される。単位時間・面積あたりに  $v|\psi_{\text{inc}}|^2 = v$  個の粒子が入射してくるから、 $v$  で割って

$$\sigma_{\text{inelastic}} = \pi \lambda^2 \sum_l (2l+1)(1 - \eta_l^2) \quad (3.15)$$

となる。

### 3.2.4 全断面積

全断面積は、弾性散乱、非弾性散乱の断面積を足せば良いから、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}} &= \sigma_{\text{elastic}} + \sigma_{\text{inelastic}} \\ &= \pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) \{4|T_l|^2 + (1 - \eta_l^2)\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$= 4\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) \text{Im } T_l \quad (3.17)$$

と表せる。

## 第 4 章

# Coulomb 散乱

### 4.1 Coulomb 散乱波

Coulomb 相互作用をしている 2 粒子の衝突問題を考える。相対座標で Schrödinger 方程式を立てると、

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

となる。この式は

$$\begin{cases} E = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \\ \gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v^2} \end{cases} \quad (4.2)$$

とおくと、

$$\left( \nabla^2 + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} \right) \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.3)$$

と書ける。ここで、放物座標  $(\xi, \eta, \varphi)$  を導入する。

$$\begin{cases} \xi = r - z = r(1 - \cos \theta) \\ \eta = r + z = r(1 + \cos \theta) \\ \varphi = \varphi \end{cases} \quad (4.4)$$

すると、(4.3) 式は次の (4.5) 式のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{4}{\xi + \eta} \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ + k^2 \psi - \frac{4k\gamma}{\xi + \eta} \psi = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Coulomb ポテンシャルは球対称で、十分遠方における入射粒子の速度の向きに  $z$  軸をとるので、 $z$  軸のまわりに軸対称となる。よって

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = \psi(\xi, \eta) = g(\xi)h(\eta) \quad (4.6)$$

を考える。(4.6) 式を (4.5) 式に代入し、整理する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\xi)} \left[ \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d}{d\xi} + \frac{k^2}{4} \xi \right) \right] g(\xi) \\ + \frac{1}{h(\eta)} \left[ \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} + \frac{k^2}{4} \eta \right) \right] h(\eta) \\ = k\gamma \end{aligned} \quad (4.7)$$

また、 $\xi$  と  $\eta$  は独立変数ゆえ、(4.7) 式の左辺の第 1 項と第 2 項はそれぞれ定数  $C_1, C_2$  とおける。これより、

$$\left[ \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d}{d\xi} \right) + \frac{k^2}{4} \xi - C_1 \right] g(\xi) = 0 \quad (4.8)$$

$$\left[ \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \right) + \frac{k^2}{4} \eta - C_2 \right] h(\eta) = 0 \quad (4.9)$$

が得られる。

入射粒子が標的粒子から十分離れた  $z \rightarrow -\infty$  では、

$\psi \rightarrow e^{ikz}$  に近づかずである。

$z = \frac{-\xi + \eta}{2}$ ,  $\xi, \eta \geq 0$  より、 $z \rightarrow -\infty$  の極限は  $\xi \rightarrow \infty$  のときである。

$$\psi(\xi, \eta) \rightarrow e^{ikz} = e^{\frac{ik\eta}{2}} e^{-\frac{ik\xi}{2}} \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (4.10)$$

これが  $\eta$  の値によらず成り立つので

$$h(\eta) = e^{\frac{ik\eta}{2}} \quad (4.11)$$

(4.11) 式を (4.9) 式に代入すると

$$C_2 = \frac{ik}{2} \quad (4.12)$$

となる。(4.7) 式より

$$C_1 = k\gamma - \frac{ik}{2} \quad (4.13)$$

次に、 $g(\xi)$  を考える。

$$g(\xi) = e^{-\frac{ik\xi}{2}} \omega(\xi) \quad (4.14)$$

とおいて、(4.13)(4.14) 式を (4.8) 式に代入すると

$$\xi \frac{d^2 \omega}{d\xi^2} + (1 - ik\xi) \frac{d\omega}{d\xi} - \gamma k \omega = 0 \quad (4.15)$$

という式になる。この微分方程式は、合流型超幾何微分方程式と同じ形をしている。

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (b - z) \frac{dF}{dz} - aF = 0 \quad (4.16)$$

(4.16) 式の独立な解のうち、原点  $z = 0$  で定数となる関数は合流型超幾何関数と呼ばれ、次で表される。

$$F(a|b|z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+s)} z^s \quad (4.17)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad (4.18)$$

これを使うと, (4.15) 式の解の中で, 原点に正則な解は

$$\omega(\xi) = AF(-i\gamma|1|ik\xi) \quad (A \text{ は定数}) \quad (4.19)$$

となる. 合流型超幾何関数は  $|z| \rightarrow \infty$  で次の漸近展開が出来る.

$$\begin{aligned} F(a|b|z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(n+a-b+1)}{\Gamma(a-b+1)} \frac{1}{n!} (-z)^{-n-a} \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+b-a)}{\Gamma(b-a)} \frac{\Gamma(n+1-a)}{\Gamma(1-a)} \frac{1}{n!} z^{-n+a-b} \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.20) を (4.19) に代入すると

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= A \frac{1}{\Gamma(1+i\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(n-i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right)^2 \frac{1}{n!} (ik\xi)^{-n+i\gamma} \\ &+ A \frac{1}{\Gamma(-i\gamma)} e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(n+1+i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \right)^2 \frac{1}{n!} (ik\xi)^{-n-i\gamma-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

この式から  $r^{-1}$  の項まで求めればよい. つまり,  $(k\xi)^{-1}$  の項までとる. すると,

$$\begin{aligned} \psi &= e^{ikz} \omega(\xi) \\ &\simeq \frac{Ae^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(1+i\gamma)} \exp(ikz + i\gamma \log k\xi) \left[ 1 + \frac{i\gamma^2}{k\xi} + \dots \right] \\ &- \frac{Ae^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(-i\gamma)} \exp(ikz + ik\xi - i\gamma \log k\xi) \frac{i}{k\xi} \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる. 定数  $A$  を

$$\frac{Ae^{\frac{\gamma\pi}{2}}}{\Gamma(1+i\gamma)} = 1 \quad (4.23)$$

とする. また, 放物座標の定義から

$$\exp(ikz + ik\xi) = \exp(ikr) \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \log k\xi &= \log k \left( 2r \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \log(2kr) + \log \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

これらより (4.22) 式は

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \exp[i(kz + \gamma \log k(r-z))] \left[ 1 + \frac{i\gamma^2}{k(r-z)} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{r} \exp[i(k\gamma - \gamma \log 2kr)] \\ &\cdot \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \frac{\exp \left[ -i\gamma \log \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]}{2ik \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる. (放物座標がこの時点で消えた.)

(4.26) 式の一行目は  $e^{ikz}$  を含むので入射波を,

二行目は  $\exp ik\gamma/r$  を含むので散乱波を表していると考えら

れる.

よって (4.26) 式を

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \exp[i(kz + \gamma \log k(r-z))] \left[ 1 + \frac{i\gamma^2}{k(r-z)} + \dots \right] \\ &+ f(\theta) \frac{1}{r} \exp[i(k\gamma - \gamma \log 2kr)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$f(\theta) = \frac{\exp \left[ -i\gamma \log \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]}{2ik \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \quad (4.28)$$

と  $f(\theta)$  を用いて表しておく.

(4.27) の第一項を  $\psi_i$ , 第二項を  $\psi_d$  とする. それぞれの流れは

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i &= \frac{\hbar}{2im} (\psi_i^* (\nabla \psi_i) - \psi_i (\nabla \psi_i^*)) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \mathbf{e}_z = v \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_d &= \frac{\hbar}{2im} (\psi_d^* (\nabla \psi_d) - \psi_d (\nabla \psi_d^*)) \\ &= \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} v \mathbf{e}_r = \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \mathbf{j}_i \end{aligned} \quad (4.30)$$

これより,  $\psi_i$  は入射波を,  $\psi_d$  は散乱波を表しているといえた.

よって (4.28) で定めた  $f(\theta)$  は Coulomb 散乱の散乱振幅を表していることがわかる.

## 第 5 章

# Rutherford 散乱・Mott 散乱

前章で求めた散乱振幅  $f(\theta)$  を用いて、異種粒子・同種粒子散乱の理論式を導出する。

Coulomb 散乱は、影響範囲が広いので、第 3 章で用いた部分波展開の方法を用いることはできない。そのため、この章では、別の方法により微分断面積を求める。その過程で、部分波展開を用いても同じ結果が得られることがわかる。

この章では、核力は考慮しない。核力も考慮した場合の微分断面積については、第 6 章で述べる。

### 5.1 異種粒子の散乱

#### 5.1.1 衝突前の波動関数

$t \ll 0$  では、系の波動関数を以下のように表わせる。

$$\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

$$\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b})} \cdot \chi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{b}) \quad (5.2)$$

$$E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$$

$\mathbf{b}$  は衝突パラメータである。 $\chi$  は波束の形を表す関数で、規格化されている。

#### 5.1.2 衝突後の波動関数

一方、 $t \gg 0$  では、波動関数は以下のように表わせる。

$$\Psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) + \psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t) &\sim e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] \\ &\cdot f(\theta) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \quad (t \gg 0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}/v$$

$$\mathbf{s} = \text{grad}_{\mathbf{k}} \arg f$$

$\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t)$  は透過波、 $\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}(\mathbf{r}, t)$  は散乱波を表している。

微分断面積は、衝突が終わった直後に粒子が微小立体角に含まれている確率を求めれば良い。 $\chi$  が規格化されていることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \iint |\psi_{\mathbf{b}}^{(d)}|^2 r^2 dr d\mathbf{b} \\ &= |f(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。この結果は、平面波の部分波展開によって求めた (3.10) 式と一致する。よって、部分波展開による方法で Coulomb 散乱を扱うことができる。

#### 5.1.3 散乱経路

2 つの異種粒子が Coulomb 散乱する場合、次の図で示す 2 つの経路を通ることが考えられる：

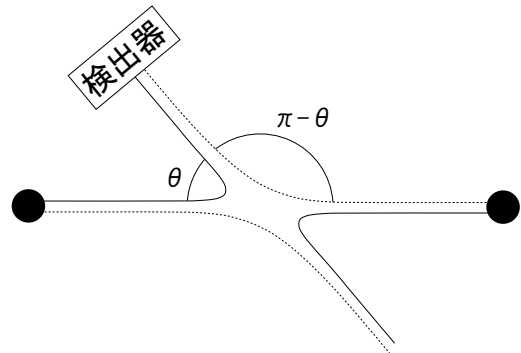


図 5.1 散乱角

#### 5.1.4 微分断面積

検出器には 2 つの経路からの粒子が入射するから、それぞれの微分断面積を足す必要がある。(5.5) より、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \quad (5.6)$$

となる。前章で求めた

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp\left(-i\gamma \log\left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right) \\ &= -\frac{\gamma}{2k} e^{2i\sigma_0} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-i\gamma-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\gamma = \frac{e^2}{\hbar v} \quad (v \text{ は相対粒子の速度})$$

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\gamma)$$

を代入して、次式を得る。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2}\right] \quad (5.8)$$

これを Rutherford の公式という<sup>1)</sup>。すなわち、異種粒子は Rutherford 散乱すると予想される。

<sup>1)</sup> 通常、Rutherford の公式といえば  $|f(\theta)|^2$  のみを計算したものを指す。このレポートでは、Mott 散乱との対比のため両方の粒子の微分断面積を足したものを Rutherford の公式としている。

## 5.2 同種粒子の散乱

同種粒子の散乱でも図 5.1 の 2 つの経路があるが、同種粒子の場合は 1 組の粒子が同時に 2 つの経路で散乱する。そのため、2 つの経路を通った波動関数の間に干渉が起こる。

### 5.2.1 波動関数の対称化

同種粒子は区別できないため、波動関数を修正する必要がある。粒子の位置を交換した際に波動関数が対称／反対称になり、なおかつ波動関数の“大きさ”を保つためには、以下の“対称化波動関数”  $\hat{\Psi}$  を定義すればよい。

$$\hat{\Psi}_b(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_b(\mathbf{r}, t) \pm \Psi_b(-\mathbf{r}, t)] \quad (5.9)$$

計算を進めると、 $t \gg 0$  で

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_b(\mathbf{r}, t) &= [\hat{\psi}_b(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}_b^{(d)}(\mathbf{r}, t)] \\ \hat{\psi}_b^{(d)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_b^{(d)}(\mathbf{r}, t) \pm \psi_b^{(d)}(-\mathbf{r}, t)] \quad (5.10) \\ &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} - iEt/\hbar} \chi[\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathbf{s} - \mathbf{b}] \end{aligned}$$

$$\cdot \hat{f}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.11)$$

$$\hat{f}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f(\theta) \pm f(\pi - \theta)] \quad (5.12)$$

となる。 $\hat{f}(\theta)$  は対称化散乱振幅である。

### 5.2.2 位置交換対称／反対称性

微分断面積は、図 5.1 の 2 つの経路を通ってきた場合を足し上げて、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |\hat{f}(\theta)|^2 + |\hat{f}(\pi - \theta)|^2 \\ &= |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2 \quad (5.13) \end{aligned}$$

となる。符号が正のものは位置交換対称、負のものは反対称である。ただし、この段階ではスピンについて考慮していない。

### 5.2.3 スピン交換対称／反対称性

スピン  $S$  の 2 つの粒子が散乱するとき、2 粒子の合成スピンの固有状態は以下の  $(2S + 1)^2$  通りのものがある：

$$\begin{aligned} &|2S, 2S\rangle, \dots, |2S, 0\rangle, \dots, |2S, -2S\rangle \\ &|2S - 1, 2S - 1\rangle, \dots, |2S - 1, 0\rangle, \dots, |2S - 1, -2S + 1\rangle \\ &\vdots \\ &|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle \\ &|0, 0\rangle \quad (5.14) \end{aligned}$$

合成スピンの最も大きい状態はスピン交換対称、1 つ下がるごとに反対称 … と入れ替わっている。

### 5.2.4 微分断面積

2 粒子を交換すると、位置が交換されると同時に、スピンも交換される。 $S$  が整数ならば、粒子はボゾンだから、位置交

換とスピン交換の両方に対して対称のはずである。 $S$  が半整数ならば、粒子はフェルミオンだから、位置交換とスピン交換のうち片方が対称、もう片方が反対称のはずである。(5.13) と (5.14) を組み合わせ、この条件を満たすすべての状態を足し上げると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{T=0}^{2S} \frac{2T+1}{(2S+1)^2} |f(\theta) + (-1)^T f(\pi - \theta)|^2 \quad (5.15)$$

となる。散乱振幅を代入し、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left[ \sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(-1)^{2S}}{2S+1} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \cos\left(\frac{e^2}{\hbar v} \log\left(\tan^2 \frac{\theta}{2}\right)\right) \right] \quad (5.16) \end{aligned}$$

を得る。これを Mott の公式という。すなわち、同種粒子は Mott 散乱すると予想される。(5.16) の前半部分は Rutherford の公式 (5.8) と同じである。後半部分が 2 つの経路を通ってきた波動関数が起こした干渉の影響である。

### 5.2.5 異種粒子・同種粒子散乱の比較

これら概形をプロットしたのが以下の図である。

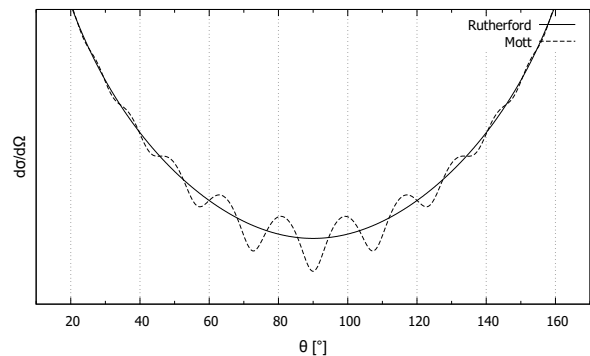


図 5.2 Rutherford 散乱, Mott 散乱の微分断面積

なお、この図にはフェルミオンの微分断面積がプロットされている。ボゾンの場合、干渉による波の山と谷が逆転する。

■補足 (5.16) において、 $e^2/\hbar v \rightarrow \infty$  の古典極限では、グラフの波は稠密になっていく。実際の検出器は、“点”ではなく、ある有限の範囲に散乱されてきた粒子をすべて検出する。すなわち、その範囲で値を積分しているのに等しい。波が稠密になり、検出器の分解能を超えてしまうと、稠密な波も積分によって打ち消し合い、波がないように見えるようになる。これは Rutherford 散乱と一致する。

## 第 6 章

# Blair 散乱

これまでに述べた議論は、入射粒子の経る物理過程が Coulomb 散乱だけであると考えて行っていた。しかし、短距離力ではあるものの、二粒子感には核力も働いている。特に強い相互作用に関しては、及ぶ範囲内においてはクーロン力を上回る引力ポテンシャルを形成し、核反応を起こして入射粒子を吸収してしまう。この効果は微分断面積にも重大な影響を与えると考えられるので、核力が無視できない場合、Rutherford, Mott に代わる適切なモデルが必要となる。

### 6.1 Blair モデルの考え方

これまでは入射粒子の経る過程として、弾性散乱および非弾性散乱のみを考えてきたが、実際には入射粒子が標的粒子に吸収される過程も起こり得る。その効果を取り入れて Mott のモデルを修正したものが、ここで説明する Blair の散乱モデルである。

仮定として、標的粒子にある程度近づいた粒子が吸収され、他は散乱される、というものを考える。すなわち、粒子間相互作用にクーロン力に加え、短距離 ( $r_0$  とする) でのみ極めて深い井戸型ポテンシャルを持つような引力相互作用が存在するとする。このとき、系の従う実効ポテンシャルを粒子間距離  $r$  の関数として書くと、図 6.1 のようになる。ここで、

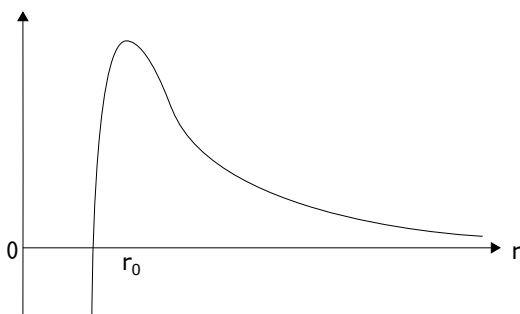


図 6.1 吸収を考慮した実効ポテンシャル

$r > r_0$  における障壁は、クーロンポテンシャルと遠心力ポテンシャルによって形成される。後者は軌道角運動量量子数  $l$  の自乗のオーダーで高くなるので、トンネル効果は無視す

ると、与えられたエネルギーに対しある軌道角運動量量子数  $l_{\max}$  が決まって、 $l \leq l_{\max}$  となる部分波だけがポテンシャル井戸の内部に到達できる。すなわちこの仮定は、軌道角運動量量子数がある値よりも小さい粒子が吸収される、と言い換えることができる。

$l > l_{\max}$  である粒子は全て散乱されると考えているので、測定される微分断面積の分布は、Mott の散乱モデルで導いた式から  $l \leq l_{\max}$  である粒子の寄与を差し引いたもので与えられる。これが最も基本的な Blair モデルである。

### 6.2 クーロン散乱波の部分波展開

Blair 散乱の微分断面積を入射方向からの角度  $\theta$  の関数として表すため、軌道角運動量  $l$  をもつ、入射粒子のある部分波の断面積への寄与を求める。具体的には、4 章で計算していたクーロン波の表式を Legendre 多項式で展開することを目指す。

まず、パラメータ  $\gamma$  で表されるクーロンポテンシャル下で散乱される粒子の波動関数  $\psi$  は、4 章の結果から  $r$  と  $z$  の関数として次のように書ける。

$$\psi = \Gamma(1 + i\gamma)e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikz} F(-i\gamma | 1 | ik(r-z)) \quad (6.1)$$

ここに、超幾何関数に対して成り立つ恒等式 [6]

$$F(a|b|\zeta) = (1 - e^{2\pi ia})^{-1} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \times \int_{\Gamma_0} e^{\zeta t} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (6.2)$$

$(b \in \mathbb{Z}, \Gamma_0$  は図 6.2 の経路)

を用いると、

$$\begin{aligned} \psi &= \Gamma(1 + i\gamma) \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikz}}{1 - e^{-2\pi\gamma}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-i\gamma)\Gamma(1 + i\gamma)} \\ &\times \int_{\Gamma_0} e^{ik(r-z)t} t^{-i\gamma-1} (1-t)^{1+i\gamma-1} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}}}{1 - e^{-2\pi\gamma}} \frac{1}{\Gamma(-i\gamma)} \\ &\times \int_{\Gamma_0} e^{ikrt} e^{ikz(1-t)} t^{-1-i\gamma} (1-t)^{i\gamma} dt \quad (6.3) \end{aligned}$$



$\psi$  の角度依存性は、この被積分関数内に現れる  $e^{ikz(1-t)}$  からくるため、この項を部分波展開すればよい。そのため、一旦自由平面波  $\psi_{\text{free}}$  の従う Schrödinger 方程式を考える。

エネルギー固有値  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  をもつ自由平面波の波動方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{\text{free}} = E \psi_{\text{free}} \Leftrightarrow \nabla^2 \psi_{\text{free}} = -k^2 \psi_{\text{free}} \quad (6.4)$$

運動量が  $z$  正の向きならば、この解は  $\psi_{\text{free}} = e^{ikz}$  で与えられる。一方で、この方程式を極座標で書き直すと、

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}}{r^2} \right) \psi = -k^2 \psi_{\text{free}} \quad (6.5)$$

ここで、 $\hat{L}$  は軌道角運動量演算子で、 $\psi_{\text{free}}$  の部分波展開

$$\psi_{\text{free}} = \sum_l \psi_{\text{free},l} P(\cos \theta) \quad (6.6)$$

を考えて代入すると、各  $l$  について次の微分方程式が成り立つ。

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l(l+1)}{r} \right\} \psi_{\text{free},l} = k^2 \psi_{\text{free},l} \quad (6.7)$$

または、 $\chi_l \equiv r \psi_{\text{free},l}$  として、

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \left\{ \frac{l(l+1)}{r} - k^2 \right\} \chi = 0 \quad (6.8)$$

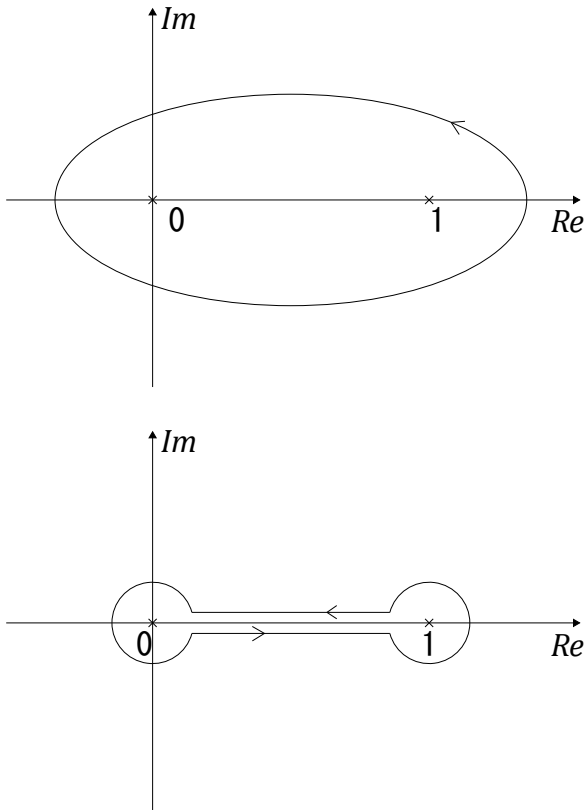


図 6.2 上の図は岩波 [6], 下の図は Messiah[4] による積分経路  $\Gamma_0$ . 被積分関数の特異点は 0, 1 の 2 点だけなので, 2 つの経路上で積分値は一致する。

この解の  $r \rightarrow 0$  および  $r \rightarrow \infty$  での正則な漸近形は、これらの極限の下で (6.8) 式の形を考えて、

$$\chi_l \sim r^{l+1} \quad (r \rightarrow 0) \quad (6.9)$$

$$\chi_l \sim e^{\pm ikr} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (6.10)$$

である。そこで、(6.8) 式の解の形を次のように期待する<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} \chi_l &= r^{l+1} e^{ikr} \tilde{\chi}_l \\ &\propto \xi^{l+1} e^{-\frac{\xi}{2}} \tilde{\chi}_l \quad (\xi = -2ikr) \end{aligned} \quad (6.11)$$

これを (6.8) 式に代入し変数変換を行うと、次の  $\tilde{\chi}_l$  に対する微分方程式が得られる。

$$\xi \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_l}{\partial \xi^2} + (2l+2-\xi) \frac{\partial \tilde{\chi}_l}{\partial \xi} - l(l+1) \tilde{\chi}_l = 0 \quad (6.12)$$

これは、(4.16) 式と同様に超幾何微分方程式の形をしているので、原点で正則な解は、(4.19) 式を用いて、

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_l &= F(l+1 | 2l+2 | \xi) \\ &= \sum_s \frac{1}{\Gamma(1+s)} \frac{\Gamma(l+1+s)}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l+2+s)} \xi^s \\ &= \sum_s \frac{(l+s)!}{l!} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^s}{s!} \end{aligned} \quad (6.13)$$

以上 (6.6), (6.11), (6.13) の 3 式から、自由粒子の波動関数  $\psi_{\text{free}}$  の部分波展開を次のように書ける。

$$\begin{aligned} \psi_{\text{free}} &= \sum_l \bar{C}_l \frac{1}{r} r^{l+1} e^{ikr} \tilde{\chi}_l P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l \bar{C}_l P_l(\cos \theta) \times \frac{1}{r} r^{l+1} e^{ikr} \\ &\quad \times \sum_s \frac{(l+s)!}{l!} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^s}{s!} \\ &= \sum_l C_l e^{ikr} P_l(\cos \theta) \\ &\quad \times \sum_s \frac{(l+s)!}{l!} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \end{aligned} \quad (6.14)$$

なお、これまでに扱った微分方程式はいずれも線形だったので、足し合わせる際に適当な重み  $\bar{C}_l = (-2ik)^l C_l$  を掛ける必要があることに注意されたい。

デカルト座標での計算から得られた結果と比較することで、(6.14) 式の右辺が  $e^{ikz}$  の部分波展開となっていることはすぐにわかる。一方で、遠方での平面波の展開は (3.2) 式で与えられている。よって、各部分波の重み  $C_l$  は、 $r \rightarrow \infty$  の極限で (6.14) の右辺が (3.2) のそれに漸近するように決められなければならない。

<sup>1)</sup> 指数因子として  $e^{ikr}$  と  $e^{-ikr}$  のいずれを選ぶかの不定性があるが、超幾何関数の性質から、結局得られる解は互いに一次従属であることがわかる。

そこで、正の虚軸上にない引数に対して成り立つ近似式 (4.20) を (6.13) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_l &\simeq \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(n-l)}{\Gamma(-l)} \frac{(2ikr)^{-n-l-1}}{n!} \\ &+ \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)} e^{-2ikr} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(n-l)}{\Gamma(-l)} \frac{(-2ikr)^{-n-l-1}}{n!} \quad (6.15) \\ &(r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

さらに  $r$  が十分大きいとし、 $n \geq 1$  の項を落とすと、

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_l &\simeq \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)} (2ikr)^{-l-1} + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)} e^{-2ikr} (-2ikr)^{-l-1} \\ &= \frac{(2l+1)!}{l!} (2ikr)^{-l-1} \left\{ 1 + (-1)^{-l-1} e^{-2ikr} \right\} \quad (6.16) \end{aligned}$$

これを (6.14) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \psi_{\text{free}} &\simeq \sum_l C_l (-2ikr)^l e^{ikr} P_l(\cos \theta) \\ &\times \frac{(2l+1)!}{l!} (2ikr)^{-l-1} \left\{ 1 + (-1)^{-l-1} e^{-2ikr} \right\} \\ &= \sum_l \frac{(2l+1)!}{l!} C_l \frac{(-1)^l e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2ikr} \sum_l \frac{(2l+1)!}{l!} C_l (-i)^l P_l(\cos \theta) \\ &\times \left\{ e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right\} \quad (6.17) \end{aligned}$$

これと (3.2) 式を比較することで、部分波の重み  $C_l$  が求まって、(6.14) 式より、

$$C_l = \frac{l!}{(2l)!} (-1)^l \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \psi_{\text{free}} \\ &= \sum_l (2l+1) (-1)^l e^{ikr} P_l(\cos \theta) \\ &\times \sum_s \frac{(l+s)!}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \quad (6.19) \end{aligned}$$

こうして、 $z$  方向に運動量  $k$  を持つ平面波の厳密な部分波展開が得られた。そこで、この  $k$  を  $k(1-t)$  に置き換えて

(6.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}}}{1 - e^{-2\pi\gamma}} \frac{1}{\Gamma(-i\gamma)} \\ &\times \int_{\Gamma_0} e^{ikr t} t^{-1-i\gamma} (1-t)^{i\gamma} \\ &\times \sum_l (-1)^l (2l+1) e^{ikr(1-t)} P_l(\cos \theta) \\ &\times \sum_s \frac{(l+s)!}{(2l+1+s)!} \frac{\{-2ikr(1-t)\}^{l+s}}{s!} dt \\ &= \sum_l P_l(\cos \theta) \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikr}}{\Gamma(-i\gamma)} (-1)^l \\ &\times \sum_s \frac{(l+s)!(2l+1)}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \\ &\times \frac{1}{1 - e^{-2\pi\gamma}} \int_{\Gamma_0} t^{-1-i\gamma} (1-t)^{l+s+i\gamma} dt \quad (6.20) \end{aligned}$$

ここから、 $\psi$  の部分波展開  $\psi = \sum_l \psi_l P_l(\cos \theta)$  の各項が求まり、

$$\begin{aligned} \psi_l &= \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikr}}{\Gamma(-i\gamma)} (-1)^l \sum_s \frac{(l+s)!(2l+1)}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \\ &\times \frac{1}{1 - e^{-2\pi\gamma}} \int_{\Gamma_0} t^{-1-i\gamma} (1-t)^{l+s+i\gamma} dt \quad (6.21) \end{aligned}$$

または、ベータ関数について成り立つ関係式 [6]

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= \frac{1}{1 - e^{2\pi iy}} \int_{\Gamma_0} t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt \quad (6.22) \\ &(x+y \in \mathbb{Z}, y \notin \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

を用いると、 $e^{2\pi i(l+s+i\gamma+1)} = e^{-2\pi\gamma}$  に注意して、

$$\begin{aligned} \psi_l &= \frac{e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikr}}{\Gamma(-i\gamma)} (-1)^l \sum_s \frac{(l+s)!(2l+1)}{(2l+1+s)!} \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \\ &\times \frac{\Gamma(-i\gamma)\Gamma(l+s+i\gamma+1)}{\Gamma(l+s+1)} \\ &= e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikr} (-1)^l \sum_s \frac{\Gamma(l+1+i\gamma+s)(2l+1)}{(2l+1+s)!} \\ &\times \frac{(-2ikr)^{l+s}}{s!} \quad (6.23) \end{aligned}$$

この部分波は、(4.19) 式から合流型超幾何関数で表すことができ、

$$\begin{aligned} &\psi_l P_l(\cos \theta) \\ &= e^{-\frac{\gamma\pi}{2}} e^{ikr} (-1)^l \frac{\Gamma(l+1+i\gamma)}{(2l)!} P_l(\cos \theta) \\ &\times F(1+l+i\gamma | 2l+2 | -2ikr) (-2ikr)^l \\ &= \frac{G_l e^{i\delta_l - \frac{\pi\gamma}{2}}}{(2l)!} (2ikr)^l e^{ikr} P_l(\cos \theta) \\ &\times F(l+1+i\gamma | 2l+2 | -2ikr) \quad (6.24) \end{aligned}$$

ここに,  $G_l = |\Gamma(l+1+i\gamma)|$ ,  $\delta_l = \arg(\Gamma(l+1+\gamma))$  であり, 後者は特にクーロンの位相のずれ (Coulomb phase shift) と呼ばれる [4].

こうしてクーロン散乱波の部分波の表式が求まったので, 次にこの散乱振幅への寄与を求める. 再び (4.20) 式から,  $r$  が十分大きいとし, (6.16) 式と同様の近似を行うと,

$$\begin{aligned}
 & \psi_l P_l(\cos \theta) \\
 &= \frac{G_l e^{i\delta_l - \frac{\pi\gamma}{2}}}{(2l)!} (2ikr)^l e^{ikr} \left\{ \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\gamma)} (2ikr)^{-l-1-i\gamma} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\gamma)} e^{-2ikr} (-2ikr)^{-l-1+i\gamma} \right\} P_l(\cos \theta) \\
 &= \frac{(2l+1)e^{i\delta_l - \frac{\pi\gamma}{2}}}{2ikr} \left\{ e^{i\delta_l} e^{ikr} (2ikr)^{-i\gamma} \right. \\
 & \quad \left. + e^{-i\delta_l} e^{-ikr} (-1)^{-l-1} (-2ikr)^{i\gamma} \right\} P_l(\cos \theta) \\
 &= \frac{(2l+1)e^{i\delta_l - \frac{\pi\gamma}{2}}}{2ikr} \left( e^{i\delta_l + ikr + \frac{\pi\gamma}{2} - i\gamma \ln 2kr} P_l(\cos \theta) \right. \\
 & \quad \left. - e^{-l\pi i} e^{-i\delta_l - ikr + \frac{\pi\gamma}{2} + i\gamma \ln 2kr} \right) \\
 &= \frac{2l+1}{2ikr} \left\{ e^{i(kr - \gamma \ln 2kr + 2\delta_l)} \right. \\
 & \quad \left. - e^{-i(kr - \ln 2kr + l\pi)} \right\} P_l(\cos \theta) \tag{6.25}
 \end{aligned}$$

この第一項を  $\psi_l^{(+)}$ , 第二項を  $\psi_l^{(-)}$  とおくと, これらはそれぞれ外向き, 内向きの球面波を表していることが予想できる.

実際にそれぞれの確率流を計算すると,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_l^{(+)} &\equiv \frac{\hbar}{2im} \left\{ (\psi_l^{(+)})^* \overleftrightarrow{\nabla} \psi_l^{(+)} \right\} \\
 &= \frac{(2l+1)^2 \hbar}{8imk^2} \hat{\mathbf{r}} \left\{ \frac{e^{-i(kr - \gamma \ln 2kr)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)}}{r} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-i(kr - \gamma \ln 2kr)}}{r} \right\} (P_l(\cos \theta))^2 \\
 &= \frac{(2l+1)^2 \hbar}{4mk^2 r^2} \hat{\mathbf{r}} \left( k - \frac{\gamma}{r} \right) (P_l(\cos \theta))^2 \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{j}_l^{(-)} \equiv \frac{\hbar}{2im} \left\{ (\psi_l^{(-)})^* \overleftrightarrow{\nabla} \psi_l^{(-)} \right\} = -\mathbf{j}_l^{(+)} \tag{6.27}$$

$r$  が十分大きい位置での展開を考えているので,  $\mathbf{j}_l^{(+)}$  は  $r$  正の向き,  $\mathbf{j}_l^{(-)}$  はその逆となる.

実際に検出されるのは外向きの球面波だけなので<sup>2)</sup>, 散乱振幅  $f(\theta)$  に寄与するのは  $\psi_l^{(+)}$  のみであり, その寄与  $f_l(\theta)$  は,

$$\psi_l^{(+)} = \frac{2l+1}{2ikr} e^{i(kr - \ln 2kr + 2\delta_l)} P_l(\cos \theta) \tag{6.28}$$

$$f_l(\theta) = \frac{2l+1}{2ik} e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \tag{6.29}$$

最終的な Blair 散乱の微分断面積は, 4 章や 5 章で計算した微分断面積で, 計算に用いた散乱振幅  $f(\theta)$  ((4.28)) から吸

<sup>2)</sup> クーロン相互作用は長距離力なので, 3 章で想定していた, 散乱は標的周囲の限定的な範囲でのみ起こるという仮定が成り立たない. そのため, 入射波と反射波とに関わらず, 動径方向外向きの運動量を持つ項が検出される粒子に対応する.

取されるとした  $l$  に対応する  $f_l(\theta)$  を全て引けばよい. (5.7) 式も用いると, 異種粒子の場合は,

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{different}} = \frac{1}{4k^2} \left| \gamma e^{2i\delta_0} \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} - i \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \right|^2 \tag{6.30}$$

同種粒子の場合は, (5.16) 式から, 粒子のスピン  $S$  として,

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{identical}} \\
 &= \sum_{T=0}^{2S} \frac{2T+1}{(2S+1)^2} \frac{1}{4k^2} \\
 & \times \left| \gamma e^{2i\delta_0} \left\{ \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} + (-1)^T \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - i \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \right. \\
 & \quad \left. - (-1)^T i \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

### 6.3 Blair モデルの拡張

こうして,  $l \leq l_{\max}$  なる部分波は全て吸収され, 他は全て反射されるという仮定での Coulomb 散乱の微分断面積が求まったが, 現実の系では必ずしも仮定が十分に満たされとは限らない. 例として,  $^{12}\text{C}$  原子核同士の衝突実験では,  $l \leq l_{\max}$  となる全ての部分波に加え,  $l_{\max} + 2$  を飛ばして  $l_{\max} + 4$  の部分波が吸収されたような結果が得られるといった報告もある [2]. また, 実際には大きい  $l$  の値を持つ部分波もトンネル効果により吸収される可能性があるので, より厳密な議論のためには高い軌道角運動量をもつ部分波についても修正を行う必要がある. 以上を考えて, 二式 (6.30), (6.31) はそれぞれ次のように修正できる.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{different}} = \frac{1}{4k^2} \left| \gamma e^{2i\delta_0} \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} - i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \right|^2 \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{identical}} \\
= & \sum_{T=0}^{2S} \frac{2T+1}{(2S+1)^2} \frac{1}{4k^2} \\
& \times \left| \gamma e^{2i\delta_0} \left\{ \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} + (-1)^T \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} \right\} \right. \\
& - i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a'_l e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \\
& \left. - (-1)^T i \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a'_l e^{2i\delta_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \quad (6.33)
\end{aligned}$$

係数  $a_l, a'_l$  は各部分波の吸収される割合を表す重みであり、実験から決定される。

# 第 7 章

## 運動学

重心系での議論は散乱の問題を簡単化(本質化)する。そのため前述の散乱理論はすべて重心系で議論されてきた。しかし、実際に観測を行うのは実験室系であるので、2つの系の間の変換が必要となる。ここでは2体の弾性散乱における2系間の変換について古典論、相対論における取り扱いを考える。散乱における2つの系(実験室系と重心系)と2つの状態(始状態と終状態)を自由に行き来することがこの章の目標である。

質量  $m_1$ 、運動量  $\mathbf{p}_1$  で  $x$  軸の正の向きに運動する粒子 1 が、質量  $m_2$  の静止している粒子 2 に弾性散乱される場合を考える。以下、「 $\mathbf{p}_1$ 」、「 $\mathbf{p}_2$ 」はそれぞれ粒子 1, 2 の物理量を表し、重心系の量には「 $\mathbf{p}^*$ 」を、終状態の量には「 $\mathbf{p}'$ 」をつけて表すこととする。

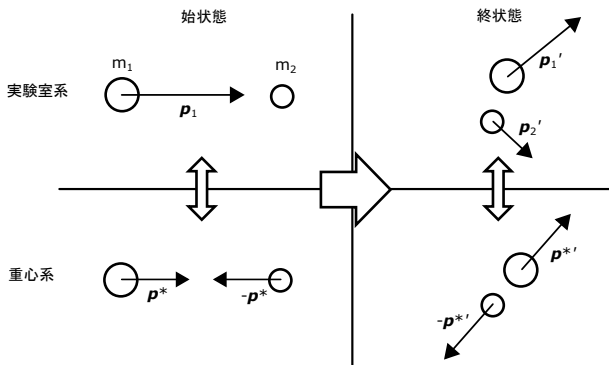


図 7.1 系と状態

### 7.1 古典論

まず古典論で考える。重心系の始状態において粒子 1, 2 の運動量は互いに大きさが等しく逆向き ( $\mathbf{p}^*$ ,  $-\mathbf{p}^*$  とする) である。運動量の保存則によって、重心系の終状態の両粒子の運動量もまた互いに大きさが等しく逆向きであり ( $\mathbf{p}'^*$ ,  $-\mathbf{p}'^*$  とする)、一方エネルギーの保存則によって、それらの大きさは散乱の前後で変化しない。

$$|\mathbf{p}'^*| = |\mathbf{p}^*| \quad (7.1)$$

実験室系からみた重心の速度  $\mathbf{v}_c$  は

$$\mathbf{v}_c = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \times \mathbf{0}}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1 + m_2} \quad (7.2)$$

である。よって

$$\mathbf{p}^* = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_c) = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \quad (7.3)$$

また

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'^* &= m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_c) = \mathbf{p}'_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \\ \therefore \mathbf{p}'_1 &= \mathbf{p}'^* + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{p}'^* &= m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_c) = \mathbf{p}'_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \\ \therefore \mathbf{p}'_2 &= -\mathbf{p}'^* + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (7.5)$$

以上の結果は幾何学的に解釈することができる。半径  $|\mathbf{p}^*|$  の円を描き、その上に  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  からなる三角形を重ねると、以下のようなになる。

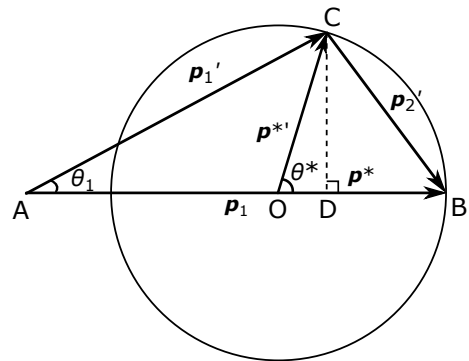


図 7.2 幾何的解釈

与えられた  $\mathbf{p}_1$  に対しては、円周の半径および点 A, B の位置は変化しないが、点 C は円周上の任意の位置をとりうる。ここで

$$AO : OB = m_1 : m_2 \quad (7.6)$$

である。粒子 1 の実験室系での散乱角を  $\theta_1$ 、重心系での散乱角を  $\theta^*$  とすると、点 C から直線 AB に下ろした足を点 D と

して、図より

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{CD}{AO + OD} \\ &= \frac{|\mathbf{p}^*| \sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} |\mathbf{p}^*| + |\mathbf{p}^*| \cos \theta^*} \\ &= \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{1}{n}} \quad \left( \text{ここで } n = \frac{m_2}{m_1} \text{ とした} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

これが古典論における実験室系での散乱角  $\theta_1$  と重心系での散乱角  $\theta^*$  を関係づける式である。

$n = 1$  ( $m_1 = m_2$ , 同種粒子) のときは, 点 A が円周上にくることから簡単になり, 下図より

$$\theta_1 = \frac{\theta^*}{2} \quad (7.8)$$

となる。

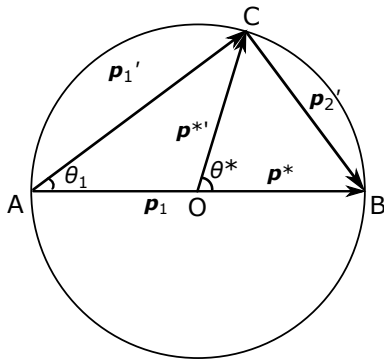


図 7.3 同種粒子の場合

最後に各系での微分断面積の関係を与える。実験室系, 重心系での微分断面積をそれぞれ  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{lab}}$ ,  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{CM}}$  とすると, 立体角のある与えられた要素へ散乱される粒子の数はどちらの座標系で見ても等しいので

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} \sin \theta_1 d\theta_1 &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} \sin \theta^* d\theta^* \\ \therefore \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} &= \frac{d(\cos \theta_1)}{d(\cos \theta^*)} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} \\ &= \frac{1 + \frac{\cos \theta^*}{n}}{\left( 1 + \frac{2}{n} \cos \theta^* + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

## 7.2 相対論

次に相対論で考える。粒子 1, 2 の運動量をそれぞれ, 古典論のときと同じく, 重心系の始状態において  $\mathbf{p}^*$ ,  $-\mathbf{p}^*$ , 重心系の終状態において  $\mathbf{p}^{*'}$ ,  $-\mathbf{p}^{*'}$ , また実験室系の終状態において  $\mathbf{p}'_1$ ,  $\mathbf{p}'_2$  とすれば, 実験室系, 重心系における 4 元運動量の保

存はそれぞれ以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E'_1}{c} \\ p'_{1x} \\ p'_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E'_2}{c} \\ p'_{2x} \\ p'_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1^*}{c} \\ p^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_2^*}{c} \\ -p^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1^{*'}}{c} \\ p_x^{*'} \\ p_y^{*'} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_2^{*'}}{c} \\ -p_x^{*'} \\ -p_y^{*'} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

ここで散乱は xy 平面上で起こるものとした。また散乱は弾性的であるので, それぞれの系, 状態におけるエネルギーは運動量と以下の関係にある。

$$\begin{aligned} \left( \frac{E'_1}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}'_1)^2 &= \left( \frac{E_1^*}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}^*)^2 = \left( \frac{E_1^{*'}}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}^{*'})^2 \\ &= \left( \frac{E_1}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}_1)^2 = (m_1 c)^2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\left( \frac{E'_2}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}'_2)^2 = \left( \frac{E_2^*}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}^*)^2 = \left( \frac{E_2^{*'}}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}^{*'})^2 = (m_2 c)^2 \quad (7.13)$$

まず, 4 元運動量の保存より

$$\frac{E_1^*}{c} = \frac{E_1^{*'}}{c} \quad \frac{E_2^*}{c} = \frac{E_2^{*'}}{c} \quad |\mathbf{p}^*| = |\mathbf{p}^{*'}| \quad (7.14)$$

がいえる。

次に, 重心系での全エネルギーを  $W^*$  とすると, 始状態における全系のローレンツ不変量から

$$\begin{aligned} \left( \frac{W^*}{c} \right)^2 - 0 &= \left( \frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - (\mathbf{p}_1)^2 \\ \therefore \left( \frac{W^*}{c} \right)^2 &= (m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2 \frac{E_1}{c} m_2 c \end{aligned} \quad (7.15)$$

を得る。

次にローレンツ変換のパラメータ  $\beta$  を求める。始状態の全系の変換は

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} + m_2 c \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W^*}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{W^*}{c} \\ \beta\gamma \frac{W^*}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \gamma = \frac{E_1 + m_2 c}{\frac{W^*}{c}} \quad (7.16)$$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  より

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{\left( \frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - (m_1 c)^2}}{\frac{E_1}{c} + m_2 c} = \frac{p_1}{\frac{E_1}{c} + m_2 c} \quad (7.17)$$

となる。

次に始状態, 終状態それぞれにおける粒子 1 についての変換から

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1'}{c} \\ p_x^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \left( \frac{E_1}{c} - \beta p_1 \right) \\ \gamma \left( p_1 - \beta \frac{E_1}{c} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1'}{c} \\ p_{1x}' \\ p_{1y}' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1^{**}}{c} \\ p_x^{**} \\ p_y^{**} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \left( \frac{E_1^{**}}{c} + \beta p_x^{**} \right) \\ \gamma \left( p_x^{**} + \beta \frac{E_1^{**}}{c} \right) \\ p_y^{**} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{p_{1x}'}{\gamma} &= p_x^{**} + \beta \frac{E_1^{**}}{c} \\ &= p_x^{**} + \beta \frac{E_1^*}{c} \\ &= p_x^{**} + \beta\gamma \left( \frac{E_1}{c} - \beta p_1 \right) \\ &= p_x^{**} + \left\{ \frac{E_1}{c} \frac{(E_1 + m_2c)}{(W^*)^2} - \frac{(E_1)^2 - (m_1c)^2}{(W^*)^2} \right\} \frac{p_1}{\gamma} \\ &= p_x^{**} + \frac{E_1 m_2c + (m_1c)^2}{(W^*)^2} \frac{p_1}{\gamma} \end{aligned} \quad (7.20)$$

ここで,  $x$  成分のみを  $1/\gamma$  倍したベクトルを「 $\bar{\quad}$ 」をつけて表すと,  $\bar{\mathbf{p}}_1' = (p_{1x}'/\gamma \quad p_{1y}' \quad 0)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_1 = (p_{1x}/\gamma \quad 0 \quad 0)$  であり

$$\bar{\mathbf{p}}_1' = \mathbf{p}^{**} + \frac{E_1 m_2c + (m_1c)^2}{(W^*)^2} \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (7.21)$$

がなりたつ. 粒子 2 についても同様に

$$\begin{pmatrix} \frac{E_2^*}{c} \\ -p^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_2c \\ -\beta\gamma m_2c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_2'}{c} \\ p_{2x}' \\ p_{2y}' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_2^{**}}{c} \\ -p_x^{**} \\ -p_y^{**} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \left( \frac{E_2^{**}}{c} - \beta p_x^{**} \right) \\ \gamma \left( -p_x^{**} + \beta \frac{E_2^{**}}{c} \right) \\ -p_y^{**} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{p_{2x}'}{\gamma} &= -p_x^{**} + \beta \frac{E_2^{**}}{c} \\ &= -p_x^{**} + \beta \frac{E_2^*}{c} \\ &= -p_x^{**} + \beta\gamma m_2c \\ &= -p_x^{**} + \frac{(E_1 + m_2c) m_2c}{(W^*)^2} \frac{p_1}{\gamma} \end{aligned} \quad (7.24)$$

だから,  $\bar{\mathbf{p}}_2' = (p_{2x}'/\gamma \quad p_{2y}' \quad 0)$  として

$$\bar{\mathbf{p}}_2' = -\mathbf{p}^{**} + \frac{(E_1 + m_2c) m_2c}{(W^*)^2} \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (7.25)$$

となる.

以上の結果は古典論のときと同様に幾何学的に解釈することができる. 半径  $|\mathbf{p}^*|$  の円を描き, その上に  $\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1', \bar{\mathbf{p}}_2'$  からなる三角形を重ねると, 以下ようになる.

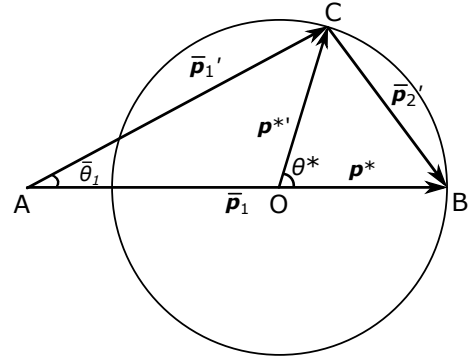


図 7.4 幾何的解釈 (相対論)

ここで

$$AO : OB = \frac{E_1}{c} m_2c + (m_1c)^2 : \frac{E_1}{c} m_2c + (m_2c)^2 \quad (7.26)$$

である.  $\bar{\mathbf{p}}_1$  と  $\bar{\mathbf{p}}_1'$  のなす角を  $\bar{\theta}_1$  とすると

$$\tan \bar{\theta}_1 = \frac{p_{1y}'}{p_{1x}'/\gamma} = \gamma \tan \theta_1 \quad (7.27)$$

また,  $n = (E_1/c m_2c + (m_2c)^2) / (E_1/c m_2c + (m_1c)^2)$  とすれば以前の結果を用いて

$$\tan \bar{\theta}_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{1}{n}} \quad (7.28)$$

となる. よって

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left( \cos \theta^* + \frac{1}{n} \right)} \quad (7.29)$$

これが相対論における実験室系での散乱角  $\theta_1$  と重心系での散乱角  $\theta^*$  を関係づける式である.

$m_1 = m_2$  のときは  $n = 1$  となり, 点 A は円周上にくるので

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\theta^*}{2} \quad (7.30)$$

がなりたつ. よって

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{\tan \frac{\theta^*}{2}}{\gamma} \right) \quad (7.31)$$

となる.

最後に各系での微分断面積の関係を与える. 実験室系, 重心系での微分断面積をそれぞれ  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{lab}, (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{CM}$  とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} &= \frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta^*)} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \\ &= \frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta_1)} \frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta^*)} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \\ &= \gamma \left( \frac{1 + \frac{2}{n} \cos\theta^* + \frac{1}{n^2}}{\sin^2\theta^* + \gamma^2 \left(\cos\theta^* + \frac{1}{n}\right)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \frac{1 + \frac{\cos\theta^*}{n}}{\left(1 + \frac{2}{n} \cos\theta^* + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \\ &= \frac{\gamma \left(1 + \frac{\cos\theta^*}{n}\right)}{\left(\sin^2\theta^* + \gamma^2 \left(\cos\theta^* + \frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \quad (7.32) \end{aligned}$$

### 7.3 本実験における運動学の利用

本実験において系の変換は古典論の範囲で扱えると仮定し, 第7.1節の結果を利用した. 結果, 実験値と理論値はよく一致したことからこの仮定は正しかったといえる.

#### 7.3.1 各散乱を扱う系

同種粒子の散乱 ( $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱) の場合は, 実験室系の散乱角と重心系の散乱角は1対1に対応する (以下の図7.5を参照). そのため, 実験室系, 重心系のどちらで議論してもかまわないが, 理論値と比較しやすいように重心系で議論することとする.

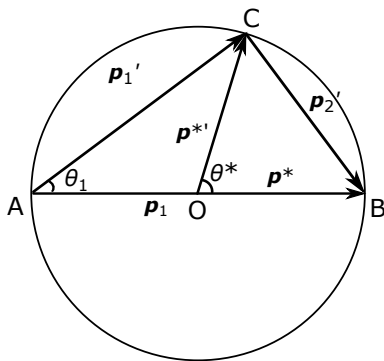


図 7.5 同種粒子の場合

標的粒子より入射粒子のほうが重い異種粒子の散乱 ( $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱) の場合は, 1つの実験室系の散乱角に対して複数の重心系の散乱角が対応する. 以下の図7.6, 7.7は, 入射粒子が同じ実験室系の角度に2つの重心系の角度で散乱される様子を表し, 図7.8は同じ実験室系の角度に標的粒子が散乱される様子を表す. 従ってこの場合はそのまま実験室系で議論することとする.

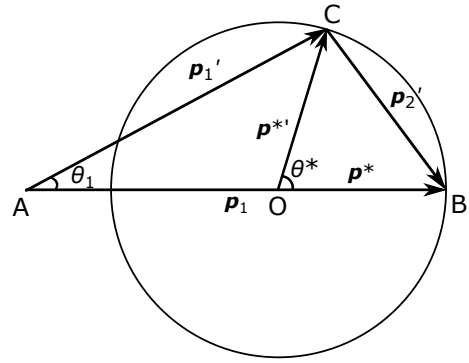


図 7.6 異種粒子の場合 1

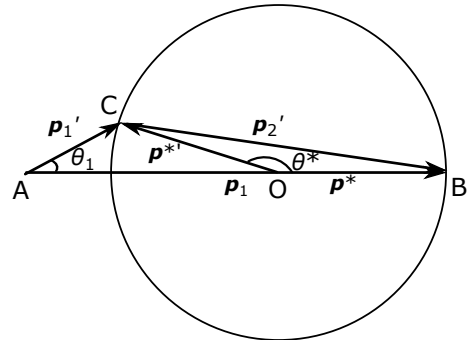


図 7.7 異種粒子の場合 2

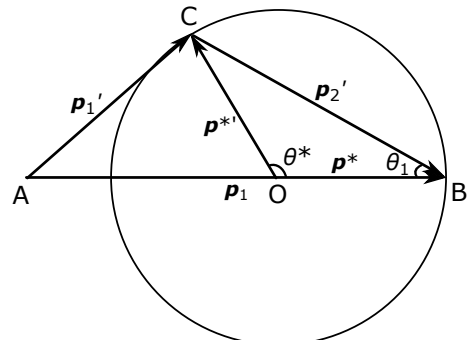


図 7.8 異種粒子の場合 3



## 第 II 部

### 実験

# 第 8 章

## 実験装置

### 8.1 加速器

この実験では、京都大学大学院工学研究科にあるマイクロイオンビーム加速器を使用した。この加速器では、 $^{12}\text{C}$ 、 $^{13}\text{C}$  粒子の電子をそれぞれ 3 つ奪い、最大 2.0MV の高電圧をかけることで加速することができる。かける電圧によって最大 8.0MeV 程度まで加速できるが、今回はすべて 7.5MeV で実験を行った。

#### 8.1.1 入射ビーム量の測定

微分断面積を求めるためには入射ビーム量も知る必要がある。そのため、入射ビーム量を以下の方法で測定した。

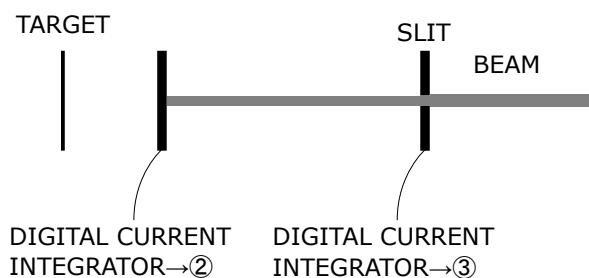


図 8.1 入射ビーム量の測定原理

散乱実験を始める前に、まず金属板をターゲットの前に挿入し、ビームを止めてしまう。ビームが上流でスリットをかすった時に得られる電流を、DIGITAL CURRENT INTEGRATOR を使用して測定する。これは、一定の電流量が流れるたびにパルスが発生させることができる装置である。この装置は VISUAL SCALER の 3 番に接続されている。

同時に、粒子がターゲットの前に挿入した金属板に当たった時に得られる電流を同様に測定する。これは VISUAL SCALER の 2 番に表示される。なお、VISUAL SCALER には  $10^{-10}[\text{C}]$  ごとに 1 カウントされた値が表示される。

ターゲットに入射するはずの粒子数は 2 番の方であるが、散乱実験中は金属板を外してしまうため、直接測ることができない。そこで、事前にこれら 2 つの比を求めておくことで、散乱実験をする際に金属板を外しても、3 番の値から 2 番の値を求めることができるのである。

### 8.1.2 測定器

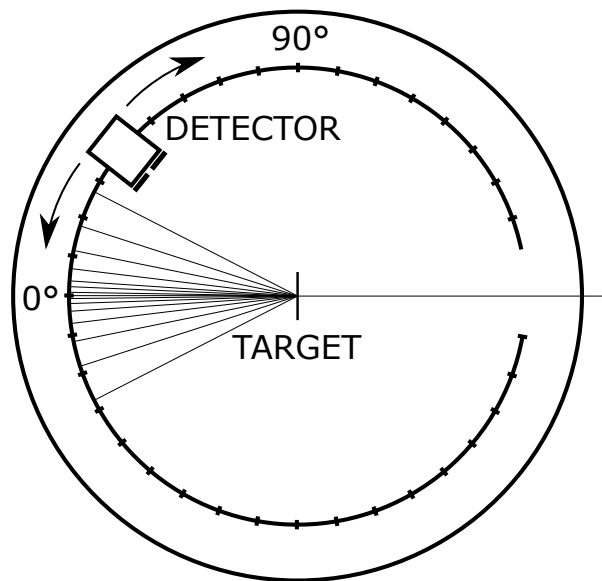


図 8.2 測定器の模式図

ターゲットや検出器が入っているケースは真空にすることができる。検出器は、円形のレール上を  $0.4^\circ$  刻みで遠隔操作することができる。検出器にはスリットがついており、スリットを通過した粒子のみ検出される。以下に主な寸法を記述する。

スリット-ターゲット間	66.0mm
スリット板厚	1.2mm
スリット幅	0.85mm
スリット高さ	8.40mm

### 8.2 データの取得

検出器からの信号は、そのままでは解析することができない。そこで、図 8.3 の装置を使い波形を処理している。実験後の解析に用いた装置とその機能を説明する。VISUAL SCALER は粒子が入射した際のパルスをすべて数える。他にも、8.1.1 節で述べたビーム量測定にも用いる。MCA は、粒子をエネルギーごとにカウントすることができる。これを

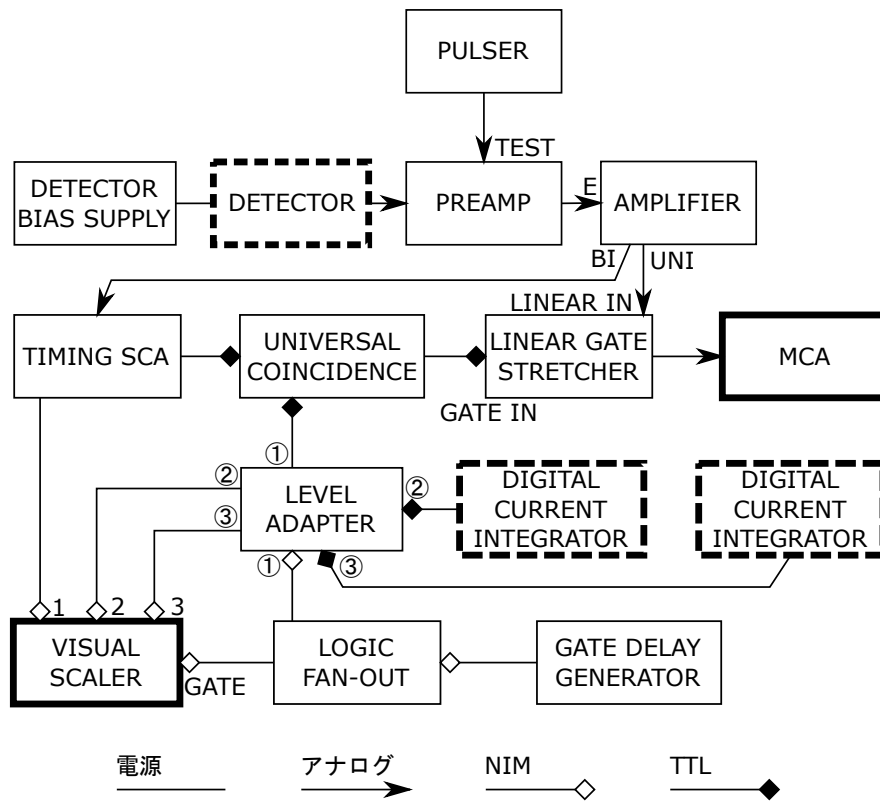


図 8.3 波形整形に使った装置とその回路図

PC に接続することで, 検出粒子のエネルギーヒストグラム  
を表示することができる.

# 第9章

## 炭素膜厚の測定

炭素膜厚は微分断面積に影響を与える。従って、実験に使用した  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$  膜の厚さを求める必要がある。

### 9.1 測定原理

$\alpha$  粒子が炭素膜を通過すると、膜の電子を運動させることでエネルギーを失う。量子力学的効果も考慮して単位長さあたりのエネルギーの損失量を計算したのが Bethe-Bloch の式である。膜を通過した  $\alpha$  粒子が失ったエネルギーを実験によって求め、この式を使うことで膜厚を測定できる。

#### 9.1.1 Bethe-Bloch の式

入射粒子が単位長さあたりに失うエネルギーは、次の Bethe-Bloch の式で与えられる [3]。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (9.1)$$

各記号の意味と値は表 9.1 の通りである。

$I$  は多くの物質において計算するのが困難なため、以下の近似式を用いた。

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV} \quad (Z < 13) \quad (9.2)$$

また、 $W_{\max}$  は、運動学によって次のように求められる。

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2} + s^2} \approx 2m_e c^2 \eta^2 \quad (M \gg m_e) \quad (9.3)$$

ただし  $\eta = \beta\gamma$ ,  $s = m_e/M$ 。

なお、厚みの単位として、厚さ（長さ）cm の代わりに重さ厚さ  $\text{g/cm}^2$  を用いることにする。厚さと重さ厚さはいつでも相互に変換することができる。以上を踏まえ、炭素膜を通過した  $\alpha$  粒子が単位長さあたりに失うエネルギーは、以下の式で与えられる。

$$-\frac{dE}{dx} = \begin{cases} 760.6 \text{ MeV}/(\text{g/cm}^2) & (^{12}\text{C}) \\ 702.1 \text{ MeV}/(\text{g/cm}^2) & (^{13}\text{C}) \end{cases} \quad (9.4)$$

### 9.2 実験

#### 9.2.1 実験装置の概要

炭素ビームではなく、 $\alpha$  線源 (Am) を用いる以外は、第 8 章と同じである。真空中に  $\alpha$  線源を入れ、まずは膜を用いず

そのままエネルギーを測定する。次に、線源の上に炭素膜をセットする。炭素膜を通過した  $\alpha$  線のエネルギーを測定し、その差を求める。

#### 9.2.2 Analyzer Channel とエネルギー

検出器に入射した粒子の情報は Multi Channel Analyzer に送られるが、エネルギーが直接計測されるわけではなく、エネルギーに応じた Analyzer Channel が計測される。従って、次の 2 つの操作によって Analyzer Channel とエネルギーを対応付ける必要がある。

#### 9.2.3 0 点の決定

Pulser は、指定した電圧のパルスが発生させることができ、スイッチを切り替えることでその電圧を  $\times 1$ ,  $\times 1/2$ ,  $\times 1/5$ ,  $\times 1/10$  にすることができる。 $\times 1$ ,  $\times 1/2$ ,  $\times 1/5$ ,  $\times 1/10$  のそれぞれについて得られたヒストグラムをガウスフィットし、中央値と分散を求め、次のように線形近似することで、0keV に対応する Analyzer Channel を求めた。

$$y = Ax + B \quad (9.5)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{y_i - (Ax_i + B)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \chi^2 = \frac{\partial}{\partial B} \chi^2 = 0 \quad (9.7)$$

ただし、

$$x_i = 1, 1/2, 1/5, 1/10$$

$$y_i = \text{Analyzer Channel の中央値}$$

$$\sigma_i = \text{ " の分散}$$

これを計算することで、

$$B = \begin{cases} 68.75 & (^{12}\text{C}) \\ 68.82 & (^{13}\text{C}) \end{cases} \quad (9.8)$$

を得た<sup>1)</sup>。

<sup>1)</sup> 理想的には、この値はターゲットの種類によらないはずだが、実験するたびに微妙に値が変化するため、それぞれの膜厚を測定する直前に 0 点補正を行っている。そのため、 $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$  のそれぞれで値が異なっている。

記号	意味	<sup>12</sup> C の数値	<sup>13</sup> C の数値	単位
$r_e$	古典的電子半径	$2.817 \times 10^{-13}$	$2.817 \times 10^{-13}$	cm
$m_e$	電子質量	$5.109 \times 10^{-1}$	$5.109 \times 10^{-1}$	MeV/c <sup>2</sup>
$N_a$	アボガドロ数	$6.022 \times 10^{23}$	$6.022 \times 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
$I$	平均励起ポテンシャル	$7.900 \times 10^{-5}$	$7.900 \times 10^{-5}$	MeV
$Z$	ターゲットの原子番号	6	6	—
$A$	ターゲットの原子質量	12	13	—
$\rho$	ターゲットの密度	2.25	2.44	g/cm <sup>3</sup>
$z$	入射粒子の電荷	2	2	C/e
$c$	光速	1	1	(m/s)/c
$\beta$	入射粒子の速度	$5.419 \times 10^{-2}$	$5.419 \times 10^{-2}$	"
$\gamma$	$1/\sqrt{1-\beta^2}$	1.001	1.001	—
$W_{\max}$	1 衝突における最大移行エネルギー	$3.010 \times 10^{-3}$	$3.010 \times 10^{-3}$	MeV

表 9.1 Bethe-Bloch の式に関連する記号

9.2.4 エネルギーとの対応付け

9.2.3 の結果と Am から放出される  $\alpha$  線のエネルギーをもとに, Analyzer Channel とエネルギーの関係を求める. 検出された  $\alpha$  線のヒストグラムをガウスフィットし, その中央値を資料から参照した 5485.5612keV だと考え, Analyzer Channel とエネルギーの関係式

$$E \text{ keV} = \begin{cases} 0.9561 \times \text{Channel} - 65.73 & (^{12}\text{C}) \\ 0.9557 \times \text{Channel} - 65.77 & (^{13}\text{C}) \end{cases} \quad (9.9)$$

が得られた.

9.2.5 膜厚の測定

Pulser と Am による校正の直後, 線源の上に膜をセットし, 膜を通過した  $\alpha$  粒子のエネルギー (正確に言えば, Analyzer Channel Number) を測定した (図 9.1). それぞれガウスフィットして, 中央値を求めた. <sup>13</sup>C には 2 つピークがあったため, 2 つのガウス関数の和としてフィットしている. これは膜に薄い部分と厚い部分があったからと考えられる.

膜	中央値	標準偏差
膜なし	5806.33	10.3564
<sup>12</sup> C	5776.22	13.4419
膜なし	5809.09	10.4720
<sup>13</sup> C (厚)	5745.05	24.7378
<sup>13</sup> C (薄)	5777.81	8.59492

表 9.2 ANALYZER CHANNEL NUMBER の測定結果

これを (9.9) 式で得られた式で補正することで失ったエネルギーを求め, (9.4) 式から膜厚を求めた. 結果は次の通りである.

膜	重さ厚さ ( $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ )
<sup>12</sup> C	37.8
<sup>13</sup> C (厚)	86.6
<sup>13</sup> C (薄)	42.0

この誤差については第 14 章にまとめてある.

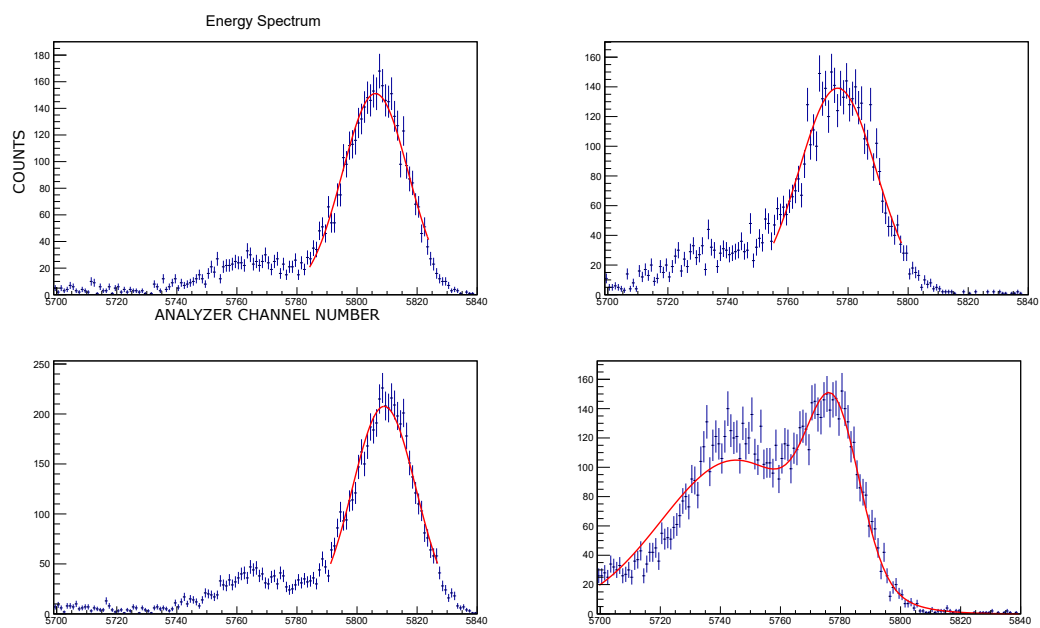


図 9.1 測定結果 (左上:膜なし, 右上: $^{12}\text{C}$ , 左下:膜なし, 右下: $^{13}\text{C}$ ) . 赤線はフィッティング. 右の測定直前に左を測定しているため, 左右でエネルギーを比べる.

# 第 10 章

## 実験手順

ビーム加速器を用いて行った、原子核散乱の測定実験の手順を以下に示す。

### 10.1 実験の準備

#### 10.1.1 NIM の配線

8 章に示した通りに NIM を配線する。

#### 10.1.2 角度のゼロ点設定

ビームの入射装置には、その入射線を知るためレーザー光を発振する装置が付属している。これを使って、検出器のスリットにレーザー光が当たる角度を検出器の角度  $0^\circ$  と設定する。設定は、外部コンピュータ上の検出器遠隔操作パネルと、検出器に付属する円盤状の角度目盛りに対し行った。

#### 10.1.3 長さの測定

測定値から (2.4) 式を用いて微分断面積を算出する際、衝突地点から検出器までの距離  $l$  と検出器のカバーする面積  $S$  を知っておく必要がある。今回の装置は図 10.1 のように、検出器をスリットで覆うことで、 $S$  を微小な値に抑えている。ここで、図に示す記号を用いると、

$$l = D + d \quad (10.1)$$

$$S = h \times w \quad (10.2)$$

となるので、

- 標的からスリットまでの距離  $D$
- スリットの厚み  $d$

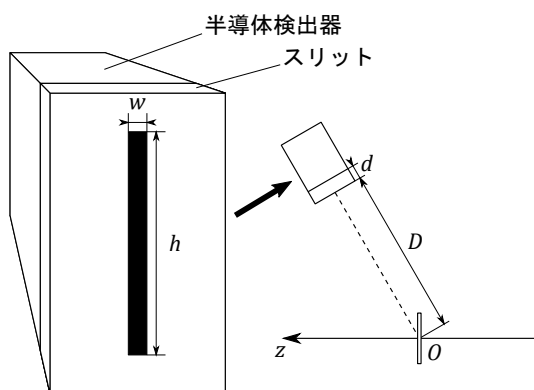


図 10.1 標的と検出器の模式図

- スリットの高さ  $h$
- スリットの幅  $w$

の 4 つの量を実験前に測定しておく。

#### 10.1.4 標的のセット

予め作成した  $^{12}\text{C}$  の膜および用意された  $^{13}\text{C}$  の膜を、槽内のホルダー<sup>1)</sup>に並べてセットする。

その後、槽に真空を引く。

### 10.2 散乱実験

#### 10.2.1 $^{12}\text{C}$ 同士の散乱

初めに、加速器が供給する  $^{12}\text{C}$  の粒子ビームについて、2 つの DIGITAL CURRENT INTEGRATOR の値から、標的とスリットに当たるビーム量の比  $I/i$  を確認する。

標的が入射ビームに当たる位置にあることは、装置に内蔵されたカメラで確認する。

その後、外部操作で検出器を  $60^\circ$  の位置まで動かし、VISUAL SCALER の値で見てある程度の粒子が検出されるまで標的にビームを入射し続ける。目標検出数はおおよそ 30000 個を目安とするが、入射粒子数との比の誤差が小さくとれると判断すればそこで測定を終える。

$60^\circ$  での測定が終われば、検出器を  $-2^\circ$  ずらし、同じ測定を行う。これを  $10^\circ$  に至るまで繰り返す。

$10^\circ$  での測定の後には、対称性の確認のため  $-10^\circ$  及び  $-12^\circ$  での測定も行う。

#### 10.2.2 $^{12}\text{C}$ と $^{13}\text{C}$ の散乱

加速器を操作し、ビームを  $^{13}\text{C}$  のものに切り替える。これについても、 $^{12}\text{C}$  のビーム同様、 $I/i$  を確認する作業を行う。

$^{12}\text{C}$  同士の実験の終了時点で検出器は  $-12^\circ$  の位置にあるので、先程と逆に  $-12^\circ, -10^\circ, 10^\circ, 12^\circ, \dots, 60^\circ$  の順で検出器を動かし、各々の角度で散乱粒子を計数する。

#### 10.2.3 $^{13}\text{C}$ 同士の散乱

標的ホルダーを操作し、標的を  $^{13}\text{C}$  のものに切り替える。 $^{12}\text{C}$  の標的と同様、ビームに当たる位置にあることをカメラ

<sup>1)</sup> 外部操作で入射装置から見て左右に移動できる。初めから二つの膜をセットしておくことで、膜を切り替えるとき逐一槽の真空を破る必要が無くなる。

で確認する.

検出器は  $60^\circ$  の位置にあるので,  $^{12}\text{C}$  同士の実験と同じ順でこれを動かし, 測定を行う.



# 第 11 章

## 実験結果

この章では、種々の測定データを用いて微分断面積の実験値を計算する。

### 11.1 微分断面積 (実験値) の求め方

実験室系における微分断面積の実験値は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{N_{\text{scat}}}{N_{\text{inc}} n d\Omega} \quad (11.1)$$

から計算できる (第 2 章). 各記号の意味とその値の求め方は以下の通り.

- $n$

ターゲットの粒子数面密度. 第 9 章で求めたターゲットの質量面密度を  $\rho t_{\text{target}}$ , ターゲット粒子の質量数を  $Z$ , アボガドロ数を  $N_A$  として

$$n = \frac{\rho t_{\text{target}} N_A}{Z} \quad (11.2)$$

から求める.

- $d\Omega$

ターゲットから検出器の検出部への立体角. ターゲットから検出器のスリット表面までの距離を  $l$ , スリットの厚さを  $d$ , 幅を  $w$ , 高さを  $h$  として

$$d\Omega = \frac{hw}{(l+d)^2} \quad (11.3)$$

から求める.

- $N_{\text{inc}}$

入射粒子数. 散乱実験中は入射ビームを止めて直接入射粒子数を測ることができない. そのため, 手前に置かれたスリットにおける入射ビームの電流量と全入射電荷量に比例関係があるとして, スリットにおける入射ビームの電流量から間接的に入射粒子数を計算する. 入射ビームは 3 価のイオンであるから

$$N_{\text{inc}} = \frac{Q_{\text{in}} I / i 10^{-10}}{3e} \quad (11.4)$$

が成り立つ. ここで  $Q_{\text{in}}$  はスリットで測った入射ビームによる電荷が  $10^{-10}[\text{C}]$  たまると 1 カウントする Scaler3 の値,  $I/i$  は散乱実験前に測定しておいた比例定数,  $e$  は電気素量.

- $N_{\text{scat}}$

散乱粒子数. この章では検出器に入った全粒子数をカウントする Scaler1 の値を用いる. 第 12 章でよりよい方法を考える.

### 11.2 測定データ

#### 11.2.1 ターゲット粒子数面密度 $n$

以下の表 11.1 に  $^{12}\text{C}$  膜と  $^{13}\text{C}$  膜の粒子数面密度  $n$  の値を示す.

表 11.1 ターゲット粒子数面密度

	$n[\text{b}]$
$^{12}\text{C}$ 膜	$1.95 \times 10^{-6}$
$^{13}\text{C}$ 膜	$3.21 \times 10^{-6}$

なお  $^{13}\text{C}$  膜に関しては, ビームに当たった厚い部分と薄い部分の面積の割合を, 膜厚測定時にそれぞれを通過した  $\alpha$  粒子の個数の割合に等しいとして求めた.

#### 11.2.2 検出器の立体角 $d\Omega$

以下の表 11.2 に, ターゲットから検出器のスリット表面までの距離  $l$  とスリットの厚さ  $d$ , 幅  $w$ , 高さ  $h$  の計測値と検出器の立体角  $d\Omega$  の値を示す.

表 11.2 検出器の立体角に関する測定データ

$l[\text{mm}]$	$d[\text{mm}]$	$w[\text{mm}]$	$h[\text{mm}]$	$d\Omega[\text{str}]$
66.0	1.2	8.40	0.85	$1.6 \times 10^{-3}$

#### 11.2.3 入射ビーム量 $I$ とスリットの電流量 $i$

以下の表 11.3, 11.4 に, それぞれ  $^{12}\text{C}$  と  $^{13}\text{C}$  のビームを入射してターゲットの手前で全て止めたときの Scaler2 の値  $I$  (入射ビーム量), Scaler3 の値  $i$  (スリットの電流量) の測定値とその比  $I/i$  を示す.

表 11.3  $^{12}\text{C}$  ビームに対する入射ビーム量  $I$  とスリットの電流量  $i$

	$I$	$i$	$I/i$
1 回目	206152	54463	3.79
2 回目	274633	73622	3.73
3 回目	285890	78806	3.63
平均			3.71

表 11.5  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における各角度に対するスケーラの値

$\theta$ (PC) [°]	Scaler1	Scaler2	Scaler3
60	22558	32982	4842
58	27863	57517	8487
56	14454	61290	9077
54	10120	97042	14447
52	10143	48398	7220
50	10509	23222	3502
48	10303	16737	2511
46	10345	18455	2772
44	10519	31199	4681
42	19349	133160	21424
40	20270	93402	11038
38	10176	17373	2186
36	10769	10786	1497
34	10482	8696	1280
32	10572	10541	1565
30	10505	12748	1953
28	11318	9182	1429
26	13014	3804	591
24	23289	3442	540
22	23684	3119	497
20	22217	2475	388
18	23934	1508	243
16	80373	1915	312
14	86977	1122	186
12	85572	659	113
10	98658	579	102
-10(-9.9)	34505	211	39
-12(-11.9)	25223	349	64

表 11.4  $^{13}\text{C}$  ビームに対する入射ビーム量  $I$  とカップの電流量  $i$

	$I$	$i$	$I/i$
1 回目	201811	88694	2.28
2 回目	212037	90146	2.35
3 回目	210985	88486	2.38
平均			2.34

#### 11.2.4 検出器の角度 $\theta$ に対する Scaler の値

以下の表 11.5, 11.6, 11.7 に,  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  それぞれの散乱における, PC に表示された検出器の角度  $\theta(\text{PC})$  に対する scaler1,2,3 の値を示す. なお  $\theta(\text{PC})$  に関して, 実際の実験では, 表示上  $0.4^\circ$  刻みで回転しない場合があった (括弧内に示す) が, 構造上検出器は  $0.4^\circ$  刻みでしか回転しないため,  $0.4^\circ$  刻みであるとして対応した.

表 11.6  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における各角度に対するスケーラの値

$\theta$ (PC) [°]	Scaler1	Scaler2	Scaler3
60	51649	100126	20526
58	43753	93472	19276
56	56244	129987	26981
54	49139	119808	24926
52	62556	157861	33019
50	30269	76964	16196
48	36486	90270	19034
46	36888	88540	18645
44	32303	71568	15219
42	29505	59480	12671
40	40062	72088	15218
38	41264	64600	13612
36	37558	51247	10821
34	33569	36474	7649
32	54559	43605	9266
30	50297	28095	6203
28	52304	17503	3819
26	75870	18525	3982
24	52949	9669	2011
22	54297	7151	1494
20	40217	3689	830
18	14113	849	199
16	51407	1142	269
14	57642	554	130
12	55969	326	76
10	61318	357	82
-10	168107	1156	253
-12	243697	3257	695

表 11.7  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における各角度に対するスケーラの値

$\theta$ (PC) [°]	Scaler1	Scaler2	Scaler3
60	41555	79677	17638
58	31610	66586	14582
56	53206	89884	19699
54	41052	58161	12755
52	37849	56916	12549
50	38082	78375	17381
48(48.2)	29146	82842	18563
46(46.2)	28967	78232	17600
44(44.2)	34649	60740	13697
42(42.1)	36518	43851	9960
40(40.1)	35068	37207	8477
38(38.1)	29511	33872	7788
36(36.1)	29666	37886	8789
34(34.1)	29045	29608	7008
32(32.1)	26216	16196	3888
30(30.1)	27797	12553	3058
28(28.1)	30118	6653	1634
26(26.1)	36166	7171	1766
24(24.1)	36601	5538	1360
22(22.1)	53222	4928	1205
20(20.1)	49352	2988	743
18(18.1)	57348	2548	654
16(16.1)	103664	2711	714
14(14.1)	91324	865	232
12(12.1)	72608	651	175
10(10.1)	73564	333	91
-10(-9.9)	79804	325	87
-12(-11.9)	74097	648	172

## 11.2.5 検出器の角度

以下の表 11.8, 11.9, 11.10 に、それぞれ  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱において、PC に表示された検出器の角度  $\theta(\text{PC})$  と前述の方法で視認した検出器の角度  $\theta(\text{視認})$  の関係を示し、その結果を図 11.1, 11.2, 11.3 に表す。図より 2 つの角度には線型関係が見られるので、その関係を

$$\theta(\text{PC}) = a \times \theta(\text{視認}) + b \quad (11.5)$$

として最適直線を求め、図に書き入れる。またその傾き  $a$  と切片  $b$  の値を表 11.11 に示す。

表 11.8  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

$\theta$ (PC) [°]	$\theta$ (視認) [°]
60	61.2
50	51.4
40	41.2
30	30.9
20	20.6
10	10.4
-12	-12.0

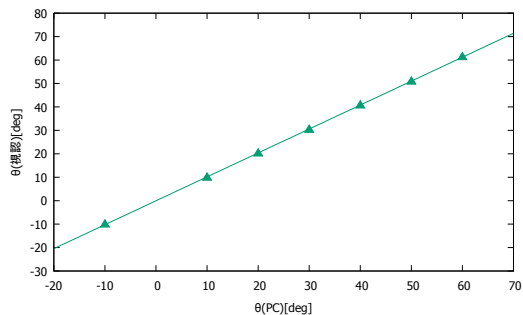


図 11.2  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

表 11.9  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

$\theta$ (PC) [°]	$\theta$ (視認) [°]
60	61.4
50	51.0
40	40.8
30	30.4
20	20.3
10	10.0
-10	-10.0

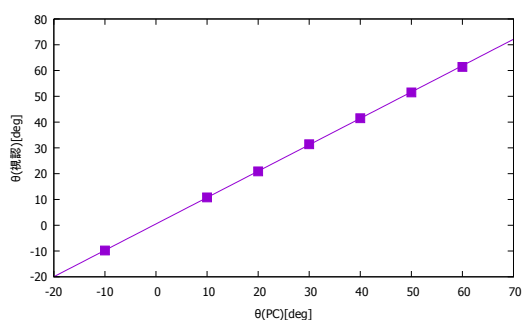


図 11.3  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

表 11.10  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

$\theta$ (PC) [°]	$\theta$ (視認) [°]
60	61.4
50	51.5
40	41.5
30	31.4
20	20.9
10	10.8
-10	-9.8

表 11.11 各実験における最適直線の傾きと切片

	a	b
$^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	1.02	0.26
$^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	1.02	-0.04
$^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$ 散乱	1.02	0.51

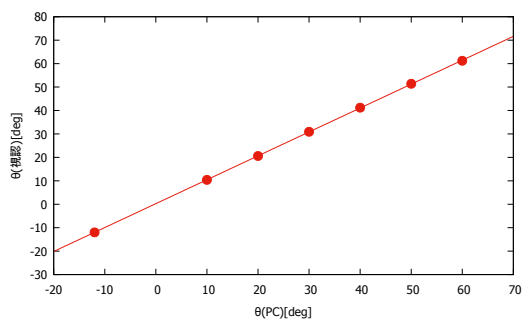


図 11.1  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における PC 表示角度と視認角度

以後、この直線から求めた角度を実験室系の角度  $\theta$  として扱う。

### 11.2.6 微分断面積

以上より、以下の表 11.12, 11.13, 11.14 に、それぞれ  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における、散乱角に対する微分断面積の値を示し、その結果を図 11.4, 11.5, 11.6 に表す。なお、 $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱は重心系,  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱は実験室系で扱う (第 7 章を参照)。

表 11.12  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における各角度に対する微分断面積

$\theta^*$ [°]	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}}$ [b/str]
122.9	$8.94 \times 10^{-1}$
118.8	$5.72 \times 10^{-1}$
114.7	$2.26 \times 10^{-1}$
110.6	$5.85 \times 10^{-2}$
106.6	$1.75 \times 10^{-1}$
102.5	$4.27 \times 10^{-1}$
98.4	$5.77 \times 10^{-1}$
94.3	$4.96 \times 10^{-1}$
90.2	$2.58 \times 10^{-1}$
86.2	$5.83 \times 10^{-2}$
82.1	$1.40 \times 10^{-1}$
78.0	$4.92 \times 10^{-1}$
73.9	$7.97 \times 10^{-1}$
69.9	$8.67 \times 10^{-1}$
65.8	$6.58 \times 10^{-1}$
61.7	$4.30 \times 10^{-1}$
57.6	$6.54 \times 10^{-1}$
53.5	$1.44 \times 10^0$
49.5	$2.20 \times 10^0$
45.4	$2.34 \times 10^0$
41.3	$2.72 \times 10^0$
37.2	$4.79 \times 10^0$
33.1	$8.71 \times 10^0$
29.1	$1.23 \times 10^1$
25.0	$2.28 \times 10^1$
20.9	$4.90 \times 10^1$
-19.9	$4.55 \times 10^1$
-24.0	$2.04 \times 10^1$

表 11.13  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における各角度に対する微分断面積

$\theta$ [°]	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}}$ [b/str]
61.2	$9.40 \times 10^{-1}$
59.2	$8.41 \times 10^{-1}$
57.1	$7.65 \times 10^{-1}$
55.1	$7.12 \times 10^{-1}$
53.0	$6.73 \times 10^{-1}$
51.0	$6.52 \times 10^{-1}$
49.0	$6.56 \times 10^{-1}$
46.9	$6.74 \times 10^{-1}$
44.9	$7.13 \times 10^{-1}$
42.8	$7.66 \times 10^{-1}$
40.8	$8.60 \times 10^{-1}$
38.8	$9.80 \times 10^{-1}$
36.7	$1.13 \times 10^0$
34.7	$1.37 \times 10^0$
32.6	$1.64 \times 10^0$
30.6	$1.97 \times 10^0$
28.5	$2.58 \times 10^0$
26.5	$3.41 \times 10^0$
24.5	$4.71 \times 10^0$
22.4	$6.60 \times 10^0$
20.4	$8.88 \times 10^0$
18.3	$1.31 \times 10^1$
16.3	$2.11 \times 10^1$
14.3	$3.67 \times 10^1$
12.2	$7.01 \times 10^1$
10.2	$1.48 \times 10^2$
-10.2	$1.25 \times 10^2$
-12.3	$6.74 \times 10^1$

表 11.14  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における各角度に対する微分断面積

$\theta^*$ [°]	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}}$ [b/str]
123.8	$4.20 \times 10^{-1}$
119.7	$3.66 \times 10^{-1}$
115.6	$4.46 \times 10^{-1}$
111.5	$5.13 \times 10^{-1}$
107.4	$4.53 \times 10^{-1}$
103.3	$2.97 \times 10^{-1}$
99.2	$1.89 \times 10^{-1}$
95.1	$1.86 \times 10^{-1}$
91.1	$3.01 \times 10^{-1}$
87.0	$4.35 \times 10^{-1}$
82.9	$4.64 \times 10^{-1}$
78.8	$3.87 \times 10^{-1}$
74.7	$3.03 \times 10^{-1}$
70.6	$3.53 \times 10^{-1}$
66.5	$5.88 \times 10^{-1}$
62.4	$8.29 \times 10^{-1}$
58.3	$9.55 \times 10^{-1}$
54.2	$9.96 \times 10^{-1}$
50.1	$1.29 \times 10^0$
46.0	$2.10 \times 10^0$
41.9	$3.15 \times 10^0$
37.9	$4.05 \times 10^0$
33.8	$0.00 \times 10^0$
29.7	$1.08 \times 10^1$
25.6	$1.86 \times 10^1$
21.5	$3.74 \times 10^1$
-19.4	$4.35 \times 10^1$
-23.5	$2.07 \times 10^1$

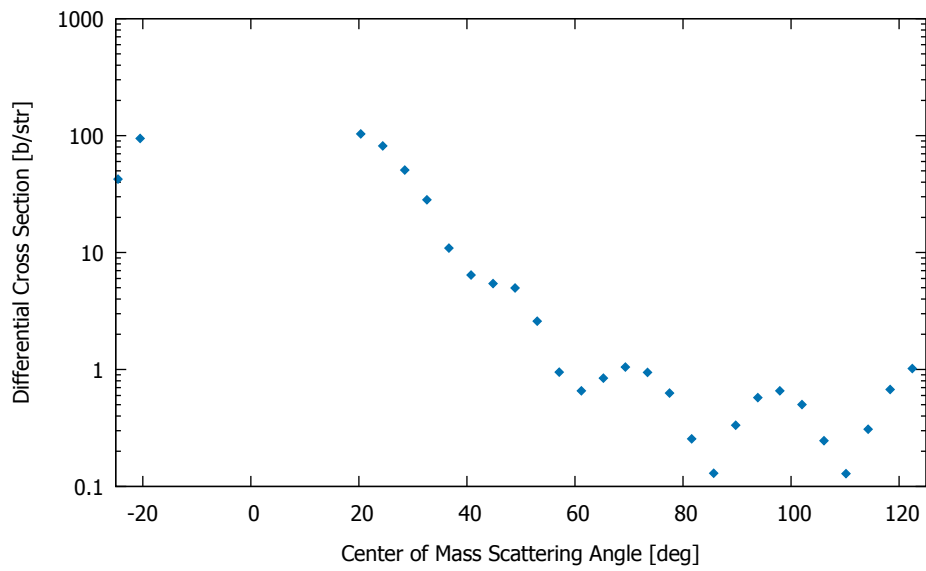


図 11.4  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における微分断面積

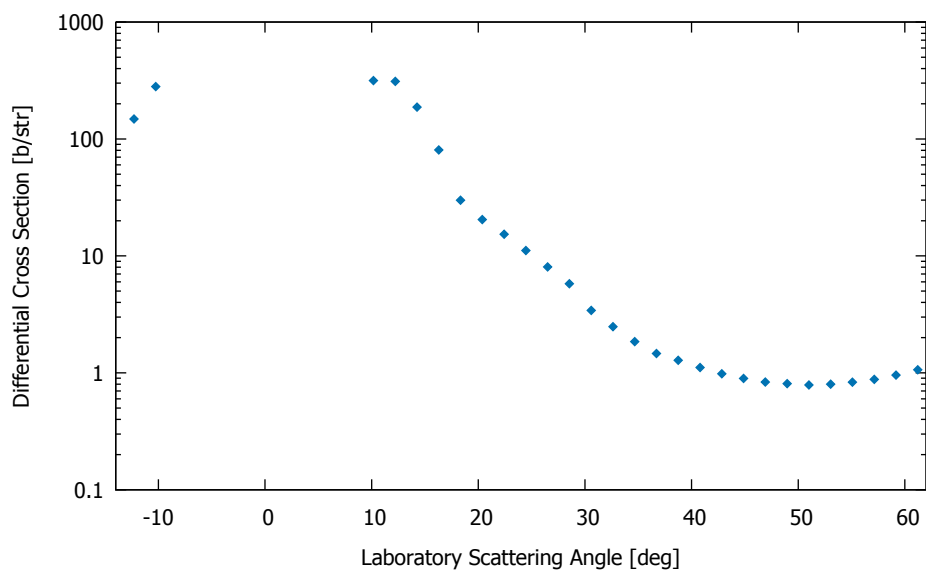


図 11.5  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における微分断面積

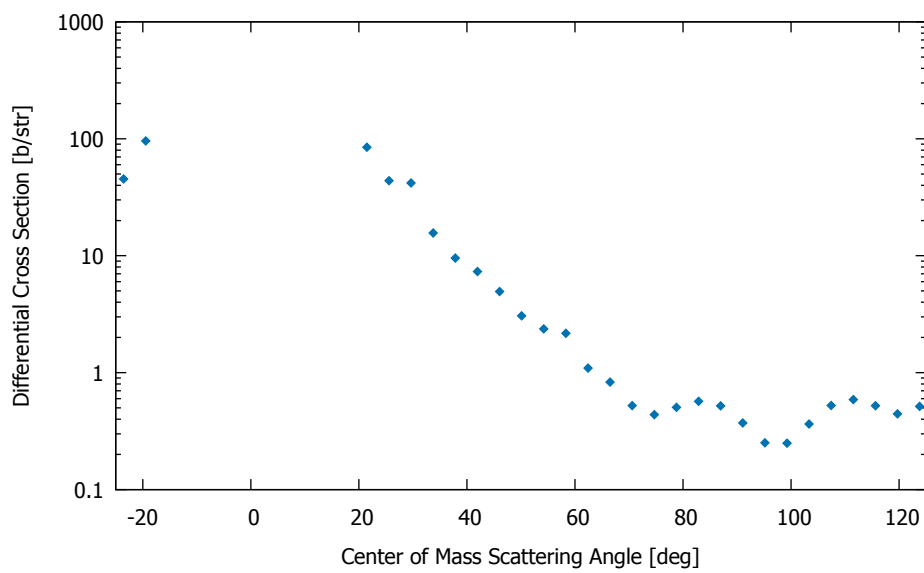


図 11.6  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における微分断面積



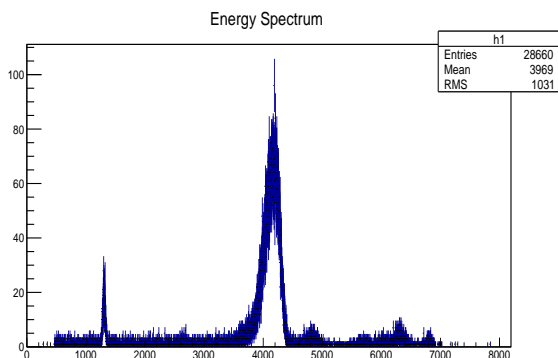
## 第 III 部

### 解析

# 第 12 章

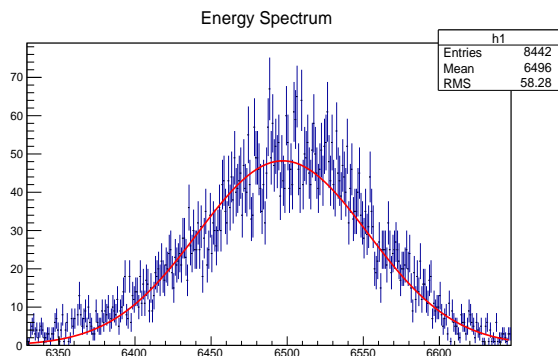
## 散乱粒子のカウント

### 12.1 散乱粒子のカウント



ここでは、散乱粒子のカウントの仕方について述べる。前章で述べた結果では、散乱粒子の数は検出器に入ってきた全粒子をカウントしている。しかし、これにはノイズとして誤ってカウントされたものや、後述する不純物をカウントしてしまっている。上図で言えば、4000(ch) 付近が C であり、他はノイズ、不純物である。したがって、本来の目的である散乱粒子の数を正確にカウントするためにはこれらを除去しなければならない。以下にその方法を述べる。

#### 12.1.1 統計



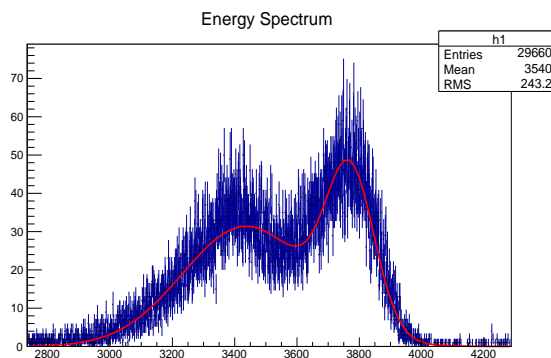
今回、散乱粒子のカウントとして、エネルギーのヒストグラムにおいて C が来るはずの範囲を定め、そのエネルギー範囲の中の粒子のみをカウントするという方法を取り、ノイズ及び不純物のカウントをさけるようにした。そのために、C のピークを基準としてガウス関数でフィッティングし、その

分散の 3 倍を C のピークからの範囲として、その中のエネルギーに含まれる散乱粒子の個数をカウントした。つまり、C のピークを  $c(\text{ch})$ 、分散を  $\sigma$  とすると、

$$c - 3\sigma \leq x \leq c + 3\sigma \quad (12.1)$$

に含まれる粒子の個数をカウントした。これを  $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$  散乱の各角度において行った。統計学より、この範囲には散乱されてくる C のうち、99.73% が含まれている。

#### 12.1.2 補足



それぞれの散乱のたいていの角度は上記で述べた方法で散乱粒子のカウントを実行できたが、 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$  散乱の  $38^\circ \sim 60^\circ$  に限り、上図のように  $^{13}\text{C}$  と  $^{12}\text{C}$  のピークが両方大きく現れ、ガウス関数としてフィッティングできなかった。そのためダブルガウス関数としてそれぞれのピークに合わせてフィッティングし、左側のガウス関数の分散は左側のエネルギーの範囲を定め、右側のガウス関数の分散は右側のエネルギーの範囲を定めるとした。つまり、左側の C のピーク、分散をそれぞれ  $c_L, \sigma_L$ 、右側の C のピーク、分散をそれぞれ  $c_R, \sigma_R$  として、

$$c_L - 3\sigma_L \leq x \leq c_R + 3\sigma_R \quad (12.2)$$

をカウントするエネルギーの範囲とした。

また、この場合の例外として、右側の分散が大きく右側のガウス関数が定めるエネルギーの範囲が、左側のガウス関数が定める範囲よりも左にきてしまった場合、つまり

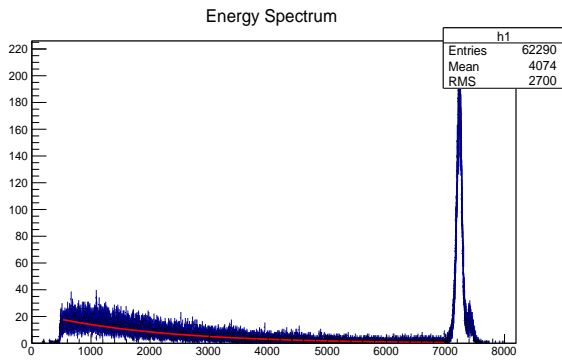
$c_R - 3\sigma_R < c_L - 3\sigma_L$  のときは,  $c_R - 3\sigma_R$  の範囲まで右側の C がきていると考えられるので,

$$c_R - 3\sigma_R \leq x \leq c_R + 3\sigma_R \quad (12.3)$$

として, エネルギーの範囲を定めた.

### 12.1.3 このカウントの方法の妥当性

これまで, 基本的に  $c - 3\sigma \leq x \leq c + 3\sigma$  の範囲をとればノイズを除去できるとしてきたが, 実際にはこの範囲の中にもノイズが微量含まれていると考えられる. そこで, 各角度の中でノイズが一番多いと思われた  $^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$  散乱の  $14^\circ$  について考察を試みる. それが以下の図である.



これをみると, 低エネルギーの時はノイズが多く, 高エネルギーになるにつれてノイズが減っていったと考えられる. したがって, 図に示したようにこのノイズの範囲をガウス関数でフィッティングし, これが C のピークのところでも続いているとしてノイズの個数を計算する.

まず, C についてガウス型でフィッティングすると, ピークが  $c = 7144.03(\text{ch})$ , 分散が  $\sigma = 136.29$  となった. (12.1) より, 散乱粒子としてカウントするのは,  $7007.74 \sim 7280.32(\text{ch})$  である. このエネルギーの中に含まれるそれぞれを次の表に示した.

種類	個数
全粒子	21111
ノイズ	131.90
全粒子-ノイズ	20979.1

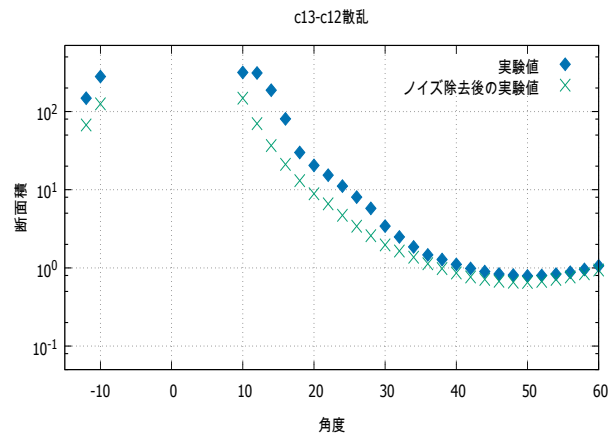
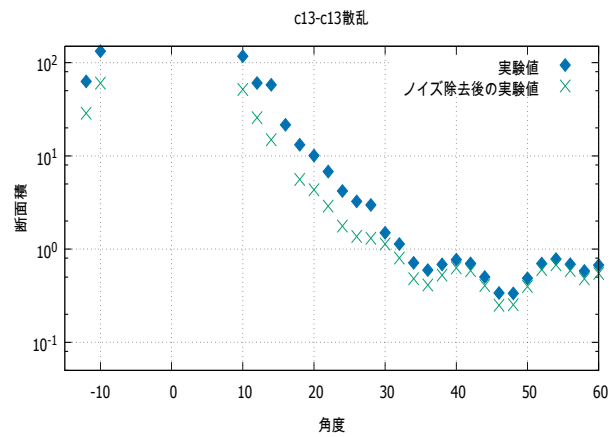
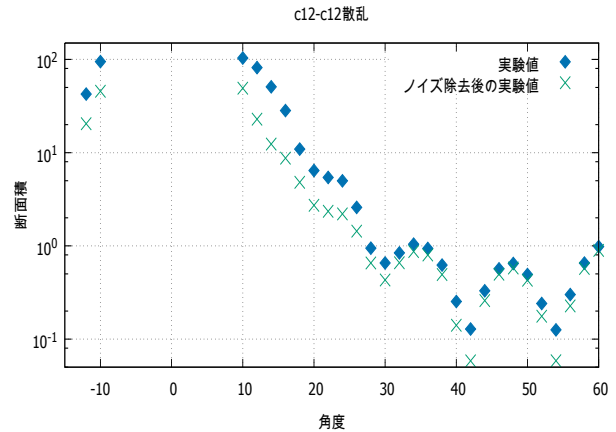
測定結果に反映したのは全粒子の方であり, 本来は全粒子-ノイズの方を使うべきである. しかし,  $(\text{全粒子})/(\text{全粒子-ノイズ})$  を計算すると,

$$\frac{21111}{20979.1} = 1.006 \quad (12.4)$$

となり, ほとんど無視できることがわかった. したがって, 今回はガウス関数の定めるエネルギー範囲内の全粒子を C であるとしてカウントした.

### 12.1.4 結果

以上をもとに散乱粒子をカウントし直した結果が, 以下の通りである.



これをみるとわかるように, 角度の小さいところでは多くのノイズが含まれていたことが分かる.

# 第 13 章

## 角度の補正

### 13.1 理論値との比較

ノイズと不純物を除去した実験値について、理論値との比較を行う。

比較すべき理論の式は、核力の影響を考慮するならば異種粒子については式 (6.32)、同種粒子については式 (6.33) となり、無視できるならそれぞれ (5.8), (5.16) である。ここでは、一旦核力が無視できるとして計算を行う。実際に核力が微分断面積に寄与するなら、Blair の模型が妥当だとすると、ピークの位置や間隔に理論値との差異が生じるはずである [2]。

ここで、同種粒子散乱について、Mott の公式 (5.16) は注目する粒子のスピン  $S$  を関数のパラメータとして持っているのに対し、 $^{12}\text{C}$  及び  $^{13}\text{C}$  原子核のスピンは不明である。但し、 $^{12}\text{C}$  はボソン、 $^{13}\text{C}$  はフェルミオンで各々スピンが整数、半整数であることと、これらを構成する陽子と中性子はともにスピン  $1/2$  を持ち、その複合粒子のスピンは全核子のスピンの総和を越えないと予想されることから、それぞれのスピンの値は候補が 7 通りに絞られる。次頁に示す図は、 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$  散乱については式 (5.8) で定まる理論値を、 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$  散乱及び  $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$  散乱についてはこの 7 通りのスピンの値に対応する式 (5.16) による理論値を、それぞれ実験値と共にプロットしたものである。

### 13.2 グラフのずれと原因

ここに挙げた実験値と理論値との比較では、グラフの大きな形状は合っているが、たて横にずれているように見える。特に、同種粒子散乱は重心系で見た場合、波動関数にパリティ対称性がある、すなわち

$$\psi|\theta = \psi|\pi-\theta \quad (13.1)$$

が成り立つために、微分断面積は  $90^\circ$  について対称となるはずであるが、図 13.1 及び図 13.3 の結果を見る限り、対称軸が  $\theta$  正の向きにずれているように見える。

考えられる可能性として、検出器の回転円盤が傾いていた、あるいは中心が衝突が起きた点からずれていたことが挙げられる。よって、そのずれ及び傾きをパラメータ化して理論値と実験値とのずれを説明できないか考える。

以下では、粒子の入射する向きを  $z$  正、検出器は本来  $yz$  平面内にあるべきものとし、衝突地点を  $O$ 、検出器の回転中心を  $O'$  とおいている。考えられるパラメータは、ベクトル  $\overrightarrow{OO'}$  の 3 成分と、円盤のオイラー角 3 成分の 6 つがある。ただし、今の系は検出器のずれを除き軸対称なので、自由度をひとつ落とすことができる。具体的には、 $\overrightarrow{OO'}$  を極座標表示<sup>1)</sup>したとき、 $z$  軸から見た方位角は考える必要がない。

### 13.3 補正の方針

円盤の目盛が  $\theta(-\pi \leq \theta < \pi)$  を指しているときの、実際の  $O$  から見た検出器の角度を  $\theta_0(\theta)(-\pi \leq \theta_0 < \pi)$  とする。このとき、実験で得られた微分断面積は  $\theta$  の関数  $d\sigma/d\Omega(\theta)$  として、実験室系での微分断面積の理論値は  $\theta_0$  の関数  $d\sigma/d\Omega_0(\theta_0)$  として与えられる。ここで、 $\Omega, \Omega_0$  はそれぞれ位置  $\theta_0(\theta)$  にある検出器が  $O'$  及び  $O$  から見て占める立体角である。

このとき、 $\theta_0$  と  $\theta$  が 1 対 1 に定まり、かつヤコビアン  $d\Omega/d\Omega_0$  を求めることができれば、合成関数の微分公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}(\theta_0) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta(\theta_0)) \frac{d\Omega}{d\Omega_0}(\theta_0) \quad (13.2)$$

から、微分断面積の測定値と理論値をこの両辺に代入し、二つを比較することができる。

### 13.4 検出器の回転中心のずれ

ここでは、先に挙げた 5 つの自由度のうち、ベクトル  $\overrightarrow{OO'}$  のもつ 2 つを考える。これが大きさ  $R = |\overrightarrow{OO'}|$  と  $z$  軸から測った仰角  $\Theta$  で与えられることは述べた通りである。さらに、検出器の回転半径を  $L$  とおき、 $\theta$  のときの  $O$ -検出器間の距離を  $l$  とおく。また、検出器の角度原点を決定する際、ビームの入射軸上の点を  $0^\circ$  としていたが、それによる  $\theta$  の値のずれを  $\Phi$  とおく。

円盤の傾きがないとしているので、今、 $O$  は検出器の軌道と同じ平面上にある。よって、ずれは  $O$  が軌道の内部にある程度には微小であると考えて、図 13.4 から、 $\theta$  を  $\theta_0$  の関数として直接求められる。

<sup>1)</sup> 後で角度の加減を行うので、円柱座標では都合が悪い。

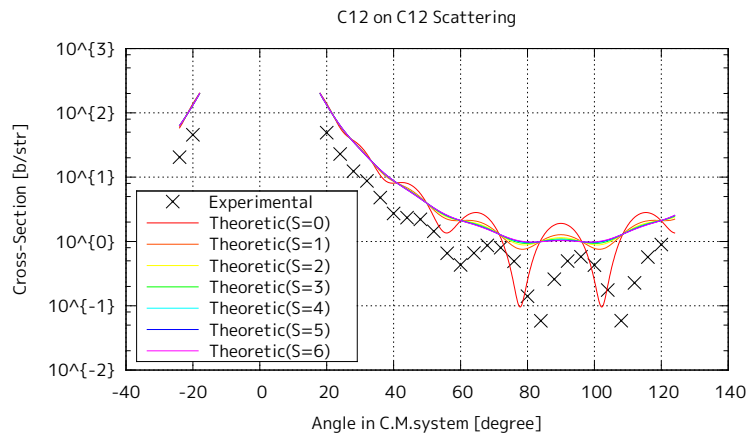


図 13.1  $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$  散乱の理論値との比較

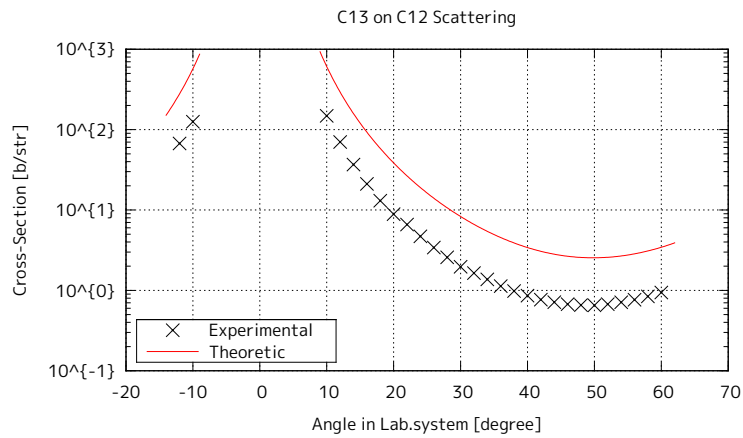


図 13.2  $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$  散乱の理論値との比較

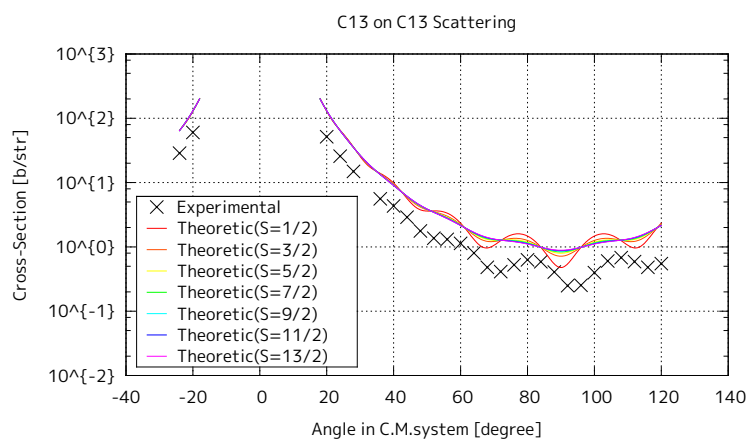


図 13.3  $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$  散乱の理論値との比較

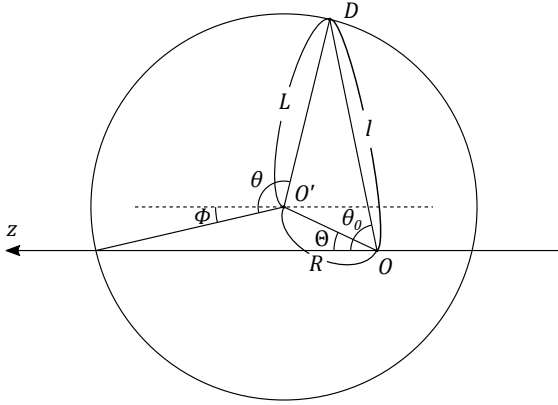


図 13.4 回転中心のずれの模式図

13.4.1 定数の導出

初めに、図 13.4 に現れる定数  $L$  及び  $\Phi$  について、それぞれをずれのパラメータ  $R, \Theta$  で表すことを考える。なお、 $\theta = 0$  のときの  $l$  の値  $l_0$  については、測定前に計測しているので、既知の値として用いることにする。

図 13.5 を用いればこれらは簡単に計算できる。  $\triangle OO'D$  に余弦定理を適用することで、

$$L = \sqrt{l_0^2 + R^2 - 2l_0R \cos \Theta} \quad (13.3)$$

また、垂線  $O'H$  の長さを比較して、

$$L \sin \Phi = R \sin \Theta \Rightarrow \Phi = \text{Arcsin} \left( \frac{R}{L} \sin \Theta \right) \quad (13.4)$$

13.4.2 角度の変換

まず、 $\theta$  と  $\theta_0$  との関係を求めるにあたり、これらをベクトル  $\overrightarrow{OO'}$  から測った角度  $\theta', \theta'_0$  に直す。すなわち、

$$\theta' \equiv \theta - \Phi - \Theta \quad (13.5)$$

$$\theta'_0 \equiv \theta_0 - \Theta \quad (13.6)$$

( $\equiv$  の両辺は  $2\pi$  の整数倍の自由度をもつ)

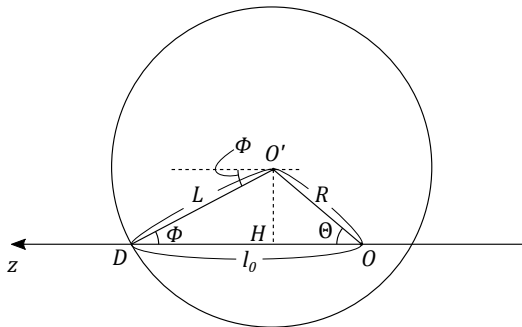


図 13.5 角度原点にある検出器

ここで、 $0 < \theta'_0 < \pi$  であるとき、 $\theta'$  及び  $\theta'_0$  の大きさに応じて図 13.6 のように 3 通りの場合が考えられるが、いずれにおいても点  $D$  から直線  $OO'$  に下ろした垂線の足  $I$  に対し、線分  $O'I$  の長さを 3 通りの方法で求めて比較することで、

$$l \cos \theta'_0 = L \sin \theta' \cot \theta'_0 = L \cos \theta' - R \quad (13.7)$$

を得る。

$-\pi < \theta'_0 < 0$  についても図 13.6 と同様のものを考えて、同じ式が成り立つ。したがって、 $-\pi < \theta_0 < \pi$  について、

$$\begin{aligned} l \cos(\theta_0 - \Theta) &= L \sin(\theta - \Phi - \Theta) \cot(\theta_0 - \Theta) \\ &= L \cos(\theta - \Phi - \Theta) - R \end{aligned} \quad (13.8)$$

すなわち、

$$\theta = \theta_0 + \Phi + \text{Arcsin} \left( \frac{R}{L} \sin(\theta_0 - \Theta) \right) \quad (13.9)$$

$$l = \frac{\sin(\theta - \Phi - \Theta)}{\sin(\theta_0 - \Theta)} L \quad (13.10)$$

13.4.3 立体角のヤコビアン

$d\Omega/d\Omega_0$  は、 $O$  と  $O'$  で見た検出器の立体角の比である。図 13.7 より、立体角の定義から、これは、

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} \frac{d\varphi}{d\varphi_0} \quad (13.11)$$

と書くことができる。ここで、 $d\varphi$  と  $d\varphi_0$  は共に  $z$  軸と点  $O'$  を含む平面に対称にとる。また、図の面積要素はこの平面に垂直であるとする。この仮定のもとで、微小面素の辺の長さについて、次の等式が成り立つ。

$$l d\varphi_0 = L d\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\varphi_0} = \frac{l}{L} \quad (13.12)$$

一方、(13.9) 式から、

$$\cos(\theta - \theta_0 - \Phi) \frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{R}{L} \cos(\theta_0 - \Theta) \quad (13.13)$$

これらと (13.10) 式を併せて (13.11) 式に代入することで、

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \frac{R}{L} \frac{\cos(\theta_0 - \Theta)}{\cos(\theta - \theta_0 - \Phi)} \frac{\sin(\theta - \Phi - \Theta)}{\sin(\theta_0 - \Theta)} \quad (13.14)$$

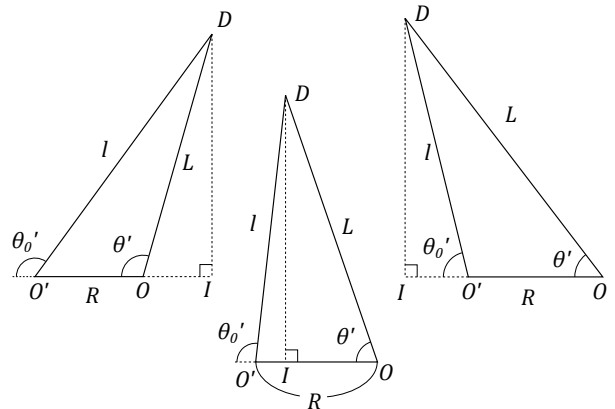


図 13.6  $\triangle OO'D$  の拡大図

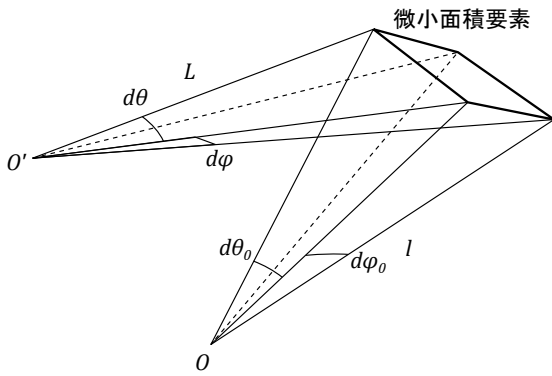


図 13.7 O と O' から見た微小面積要素

(13.9) と (13.14) の 2 式から, (13.2) 式に代入すべき関数は求まった. 加えて, (13.10) 式の  $l$  を用いて実験値を計算し直すことで, これを  $O'$  中心の微分断面積として正しく計算できる.

以上の議論から, (13.2) 式を通して  $O$  と  $O'$  の間にずれがあるとした場合に実験値と理論値を比較する準備が整った. ただし, 同種粒子の散乱については, 5 章で見たように粒子のスピ量子数  $S$  によって微分断面積が変わるので,  $^{12}\text{C}$  および  $^{13}\text{C}$  原子核のスピが分かっていない以上, 比較対象とする理論値の式が決まらないことになる.

### 13.5 スピンの同定

ここでは, 2 つの炭素原子核について, そのスピ量子数  $S$  を確認する. 具体的な方法としては,  $^{12}\text{C}$  と  $^{13}\text{C}$  に対し, 各々の同種粒子散乱の微分断面積の実験値を今導出した式で補正し, 7 通りの理論値すべてにおいてパラメータ  $R$  と  $\Theta$  を変化させたときの理論値との差の二乗和の最小値を求めて, この値が最小となる理論値に対応する  $S$  としてその粒子のスピを求める. 但し, 実際には  $O'$  のずれを考慮しても断面積の絶対値については理論値との一致が良いとは言えなかったため,  $R, \Theta$  に加えて実験値の理論値に対する定数倍  $A$  も導入してフィッティングを行った.

まず,  $^{12}\text{C}$  での結果を表 13.1 に示す. 差の二乗和が最小となっているのは  $S = 0$  のときであり, これが  $^{12}\text{C}$  のスピ量子数であると考えられる. また, 図 13.8 に各理論値とのフィッティング結果をプロットしている. これを見ても,  $^{12}\text{C}$  のスピは 0 であると考えるのが妥当と思われる.

次に,  $^{13}\text{C}$  での結果を表 13.2 に示す.  $^{12}\text{C}$  と違い明確な差は無いが,  $S = 1/2$  の理論値に対して残差平均が最小となっている. 先ほどと同様グラフを図 13.9 に示すが, やはり  $S = 1/2$  の理論値と最も良く一致している.

以上より,  $^{12}\text{C}$  原子核のスピは 0,  $^{13}\text{C}$  は  $1/2$  であることが推測される. また, 表 13.1, 13.2 の該当列の値から,  $O'$  は

$O$  から角度  $-25^\circ$  方向に  $7.3[\text{mm}]$  程度ずれていたと考えられる.

### 13.6 異種粒子散乱のフィッティング

一方で,  $^{12}\text{C}$  と  $^{13}\text{C}$  の散乱の微分断面積について, 同種粒子の場合と同様に実験値と理論値とでフィッティングを行うと, 結果は表 13.3 のようになった.  $R$  と  $\Theta$  は同種粒子の 2 つの結果からはかなり遠い値になったが, それ以上に残差平均が極めて小さくなっている. これは, 残差平均がある程度以下に抑えられる  $R, \Theta$  の組み合わせの範囲が同種粒子の場合以上にかかなり広いということを示していると考えられる. そこで, この 2 つのパラメータを, 同種粒子の時に得られた値の平均値に固定し,  $A$  のみをパラメータとして再びフィッティングを行った. その結果を表 13.4, 及び図 13.10 に示す. この場合も残差平均は表 13.1, 13.2 の値と比べて十分小さ

理論値	$R[\text{mm}]$	$\Theta[\text{degree}]$	$A$	残差平均
$S = 0$	7.37	-25.7	3.68	0.0039
$S = 1$	5.96	-4.71	4.04	0.037
$S = 2$	6.01	-3.53	4.07	0.048
$S = 3$	6.18	-4.75	4.12	0.053
$S = 4$	6.39	-6.80	4.16	0.056
$S = 5$	6.63	-9.15	4.21	0.058
$S = 6$	6.90	-11.6	4.27	0.059

表 13.1  $^{12}\text{C}$  のフィッティング結果. 残差平均は, 差の二乗和をデータ数で割ったものである.

理論値	$R[\text{mm}]$	$\Theta[\text{degree}]$	$A$	残差平均
$S = 1/2$	7.31	-24.1	3.98	0.0013
$S = 3/2$	5.54	0.6	3.77	0.0026
$S = 5/2$	5.19	17.1	3.64	0.0044
$S = 7/2$	5.21	29.5	3.54	0.0055
$S = 9/2$	5.39	39.6	3.46	0.0062
$S = 11/2$	5.70	48.1	3.38	0.0068
$S = 13/2$	6.08	55.4	3.31	0.0071

表 13.2  $^{13}\text{C}$  のフィッティング結果

$R[\text{mm}]$	$\Theta[\text{degree}]$	$A$	残差平均
5.56	70.7	3.79	0.00017

表 13.3 異種粒子散乱のフィッティング結果

$R[\text{mm}]$	$\Theta[\text{degree}]$	$A$	残差平均
(7.73)	(-24.9)	5.01	0.00031

表 13.4 異種粒子散乱を再びフィッティングした結果. () は手で与えた数値を示す.

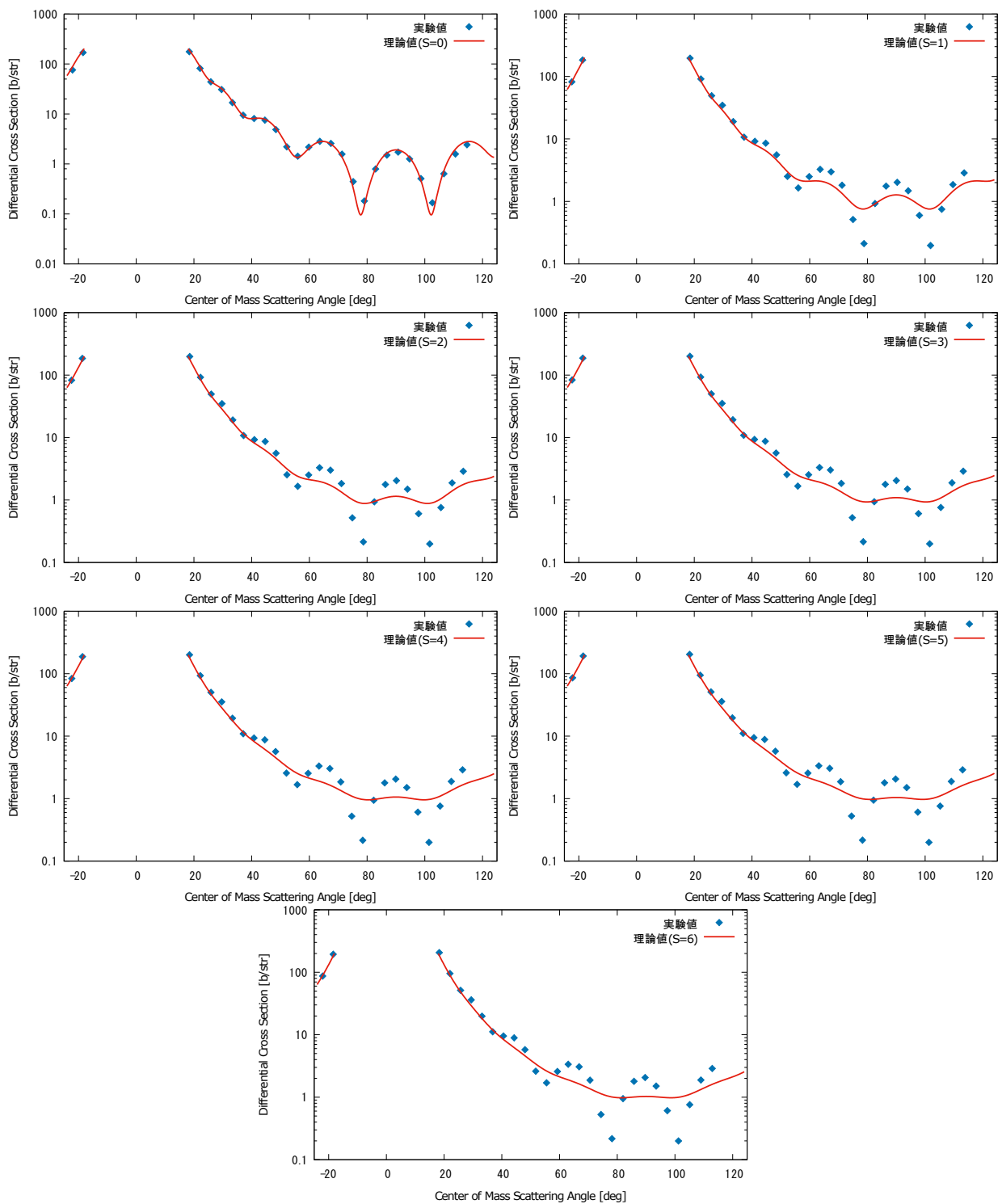


図 13.8 0 から 6 までの整数スピンをパラメータに与えた式 (5.16) の値に、 $^{12}\text{C}$  同士の実験値をフィットさせた結果。 $S = 0$  のとき良い一致が見られる。



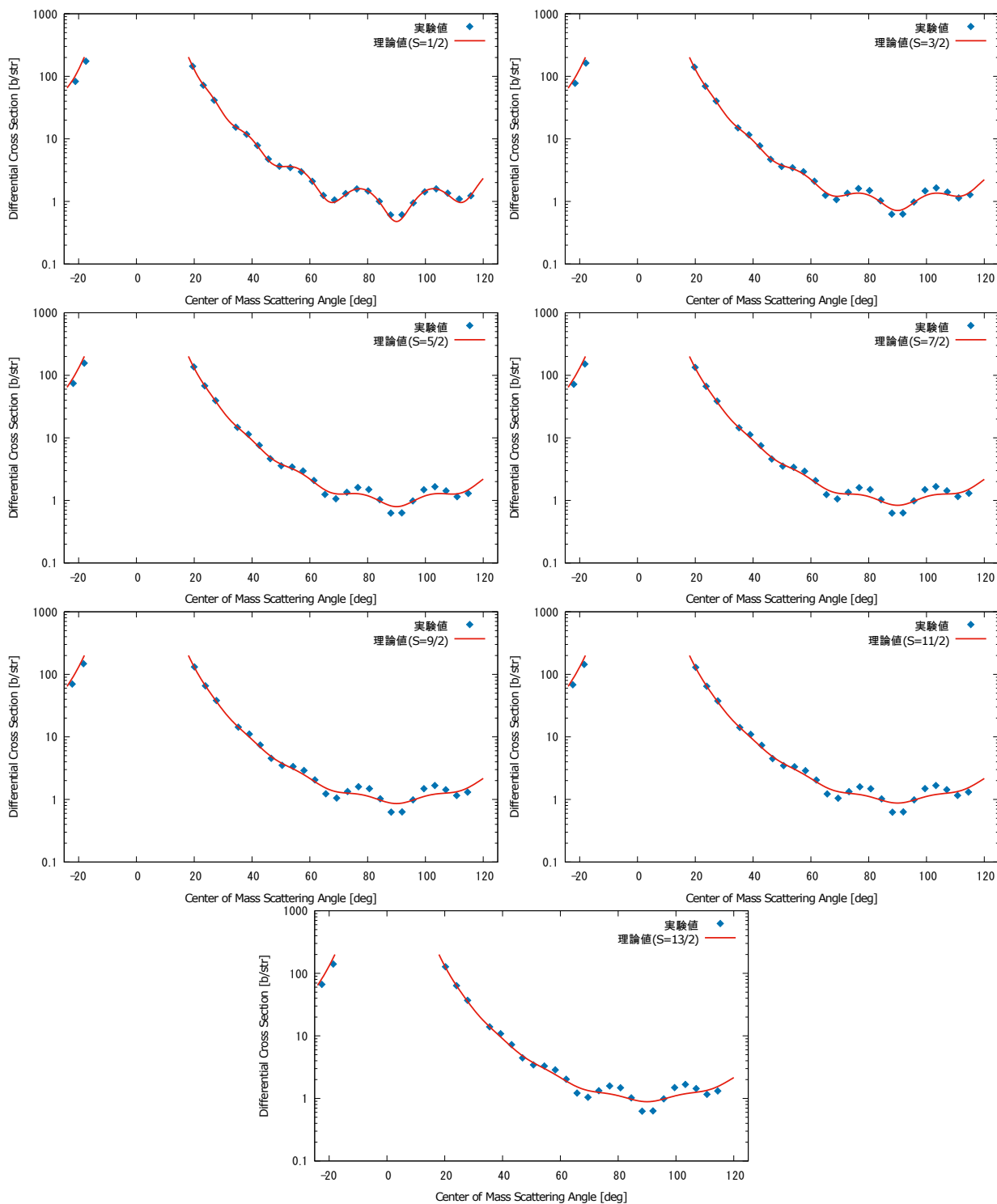


図 13.9  $1/2$  から  $13/2$  までの半整数スピンをパラメータに与えた式 (5.16) の値に、 $^{13}\text{C}$  同士の実験値をフィットさせた結果.  $S = 1/2$  の理論値と最も良く合っている.

いので、検出器の回転中心のずれはこの程度の値であったと推測できる。

以上の解析から、 $O$  と  $O'$  の間のずれを仮定すると、定数倍を除いて実験値は理論値とよく一致していたことが判明した。特に、ピークの位置がうまく一致したので、実際には核力の影響も無視できる程度だったと判る。

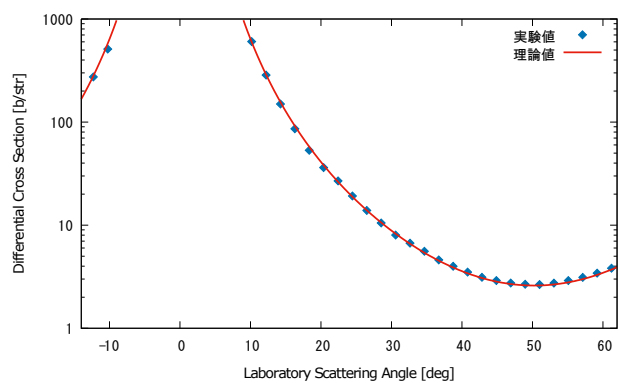


図 13.10 表 13.4 の値を採用した場合の理論値と実験値との比較

# 第 14 章

## 誤差

これまででは誤差を考慮せず議論をすすめてきた。しかし測定に誤差は避けられず、誤差が大きすぎればこれまでの議論は意味を持たない。この章では、行った実験における誤差を解析しこれまでの議論の正当性を確保すると共に、解析において浮上した定数倍の問題を誤差の範囲で説明できるか考察する。

### 14.1 誤差伝播

$N$  個の物理量  $x_i (i = 1, \dots, N)$  がそれぞれ独立かつランダムな誤差  $\delta x_i$  を持つとき、関数  $f(x_i)$  の誤差  $\delta f$  は

$$\delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2} \quad (14.1)$$

で与えられる。[5]

### 14.2 微分断面積の誤差 (求め方)

実験室系での微分断面積  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}$  は測定値を用いて式 (11.1) から計算できるので、その誤差  $\delta \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}$  は式 (14.1) より

$$\frac{\delta \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}}{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}}} = \sqrt{\left( \frac{\delta N_{\text{scatter}}}{N_{\text{scatter}}} \right)^2 + \left( \frac{\delta N_{\text{inc}}}{N_{\text{inc}}} \right)^2 + \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 + \left( \frac{\delta d\Omega}{d\Omega} \right)^2} \quad (14.2)$$

で与えられる。

#### 14.2.1 $\delta N_{\text{scat}}$

$\delta N_{\text{scat}}$  とは散乱粒子数  $N_{\text{scat}}$  の誤差を意味する。散乱は一定の平均確率で起こるランダムな現象であり、その分布はポアソン分布に従うことが予想される。一般に、ポアソン分布に従う事象が時間  $T$  の間に  $\nu$  回起こったとすると、その誤差は  $\sqrt{\nu}$  である。従って

$$\delta N_{\text{scat}} = \sqrt{N_{\text{scat}}} \quad (14.3)$$

となる。

#### 14.2.2 $\delta N_{\text{inc}}$

入射粒子数  $N_{\text{inc}}$  は式 (11.4) より求まるので、その相対誤差は

$$\frac{\delta N_{\text{inc}}}{N_{\text{inc}}} = \sqrt{\left( \frac{\delta Q_{\text{in}}}{Q_{\text{in}}} \right)^2 + \left( \frac{\delta I/i}{I/i} \right)^2} \quad (14.4)$$

で与えられる。入射ビーム量が一定ならば  $Q_{\text{in}}$  はポアソン分布に従うはずであるので

$$\delta Q_{\text{in}} = \sqrt{Q_{\text{in}}} \quad (14.5)$$

がなりたつ。また  $\delta I/i$  としては、複数回測定した  $I/i$  の標準偏差を用いる。

#### 14.2.3 $\delta n$

ターゲットの粒子数面密度  $n$  は式 (11.1) よりターゲットの質量面密度  $\rho t_{\text{target}}$  から求まり、 $\rho t_{\text{target}}$  は Bethe-Bloch の式 (9.1) より求まるので、その相対誤差は

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \rho t_{\text{target}}}{\rho t_{\text{target}}} = \left| \frac{\delta dE}{dE} \right| \quad (14.6)$$

で与えられる。また第 9 章より、膜厚測定において膜のないときとあるときのエネルギーを  $E_0, E_1 [\text{KeV}]$ , Channel を  $X_0, X_1$  とそれぞれおくと、式 (9.5) の  $B$  を用いて

$$\begin{aligned} -dE &= E_0 - E_1 \\ &= (X_0 - X_1) \times \frac{E_0}{X_0 - B} \end{aligned} \quad (14.7)$$

となるので、式 (14.1) より

$$\left| \frac{\delta dE}{dE} \right| = \sqrt{\left( \frac{(X_1 - B)\delta X_0}{(X_0 - B)(X_0 - X_1)} \right)^2 + \left( \frac{\delta X_1}{X_0 - X_1} \right)^2 + \left( \frac{\delta B}{X_0 - B} \right)^2} \quad (14.8)$$

がなりたつ。ここで  $\delta X_0, \delta X_1$  にはそれぞれ膜のないときとあるときの  $\alpha$  粒子のスペクトルの標準偏差を用い、 $\delta B$  は式 (9.6)(9.7) より

$$\delta B = \frac{\sqrt{\left( \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2 \sum \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)^2 - \left( \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \sum \left( \frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \frac{x_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (14.9)$$

から求まる。

#### 14.2.4 $\delta d\Omega$

ターゲットから検出器に対する立体角  $d\Omega$  は式 (11.3) より求まるので、その相対誤差は

$$\frac{\delta d\Omega}{d\Omega} = \sqrt{\left( \frac{\delta h}{h} \right)^2 + \left( \frac{\delta w}{w} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta l}{l+d} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta d}{l+d} \right)^2} \quad (14.10)$$

で与えられる。

14.3 微分断面積の誤差 (データ)

以上の誤差は、微分断面積の測定値に対して角度毎に異なる影響を与えるものと、全ての角度で一定の影響を与えるものに分けられる。角度毎に測定を行った  $N_{\text{scat}}$ ,  $Q_{\text{in}}$  の誤差、また角度自身の誤差は前者であり、計算において全ての角度で同じ値を用いる  $I/i$ ,  $n(dE)$ ,  $d\Omega$  の誤差は後者である。散乱角に対する微分断面積のグラフに対し、前者はその形を変化させるが、後者は上下移動をさせるだけで形は変えない。

14.3.1 角度毎の誤差

以下の表 14.2, 14.3, 14.4 に、それぞれ  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱,  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における、散乱角に対する  $N_{\text{scat}}$  と  $Q_{\text{in}}$  の値, 誤差, 相対誤差の値を示す。さらに、PC 表示の角度と視認した角度の関係を表す最適直線の標準偏差から求めた、それぞれの散乱における角度の誤差を表 14.1 に示す。それらの結果をエラーバーとして図 14.1, 14.2, 14.3 に表す。

表 14.1 角度の誤差

	誤差 [°]
$^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	0.7
$^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	0.2
$^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$ 散乱	0.3

図 14.1, 14.2, 14.3 より、角度毎に影響を与える誤差は実験値と理論値の一致を保証するのに十分小さいといえる。

14.3.2 角度に依らない誤差

以下の表 14.5, 14.6, 14.7 に、それぞれ  $I/i$ ,  $dE$ ,  $d\Omega$  に関する値, 誤差, 相対誤差の値を示す。

表 14.5  $^{12}\text{C}$  beam,  $^{13}\text{C}$  beam に対する  $I/i$  の値と誤差

	値	誤差	相対誤差 (%)
$I/i(^{12}\text{C beam})$	3.71	0.08	2.1
$I/i(^{13}\text{C beam})$	2.34	0.06	2.3

表 14.6  $^{12}\text{C}$  膜,  $^{13}\text{C}$  膜に対する  $dE$  に関する値と誤差

		値	誤差	相対誤差 (%)
$^{12}\text{C}$ 膜	$X_0$	5805	10	0.18
	$X_1$	5776	13	0.23
	$B$	68	6	8.0
	$dE[\text{KeV}]$	28	17	58
$^{13}\text{C}$ 膜 (厚)	$X_0$	5809	10	0.18
	$X_1$	5745	24	0.42
	$B$	68	6	8.0
	$dE[\text{KeV}]$	61	25	41
$^{13}\text{C}$ 膜 (薄)	$X_0$	5805	10	0.18
	$X_1$	5778	8.6	0.15
	$B$	68	6	8.0
	$dE[\text{KeV}]$	29	13	44

表 14.7  $d\Omega$  に関する値と誤差

	値	誤差	相対誤差 (%)
$h[\text{mm}]$	8.40	0.005	$6.0 \times 10^{-2}$
$w[\text{mm}]$	0.85	0.005	$5.9 \times 10^{-1}$
$l[\text{mm}]$	66.0	0.05	$7.6 \times 10^{-2}$
$d[\text{mm}]$	1.2	0.05	$4.2 \times 10^0$
$d\Omega[\text{str}]$	$1.6 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$6.3 \times 10^{-1}$

以上より、微分断面積に対する角度に依らない相対誤差はそれぞれの散乱において以下の表 14.8 に示す通りとなる。なお  $^{13}\text{C}$  膜に関しては、厚い部分と薄い部分の誤差を合わせたためより大きな誤差となった。

表 14.8 角度に依らない誤差

	相対誤差 [%]
$^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	58
$^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$ 散乱	58
$^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$ 散乱	71

14.4 定数倍

全角度で一定の影響を与える誤差はかなり大きなものとなったが、解析の途上で現れた定数倍の問題を説明するまでには至らなかった。このことは何らかの系統誤差の存在を示唆している。特に、少し特殊な測定方法をとったことから、入射粒子数  $N_{\text{inc}}$  を求めるときに用いた比例定数  $I/i$  に系統誤差があったことなどが考えられる。

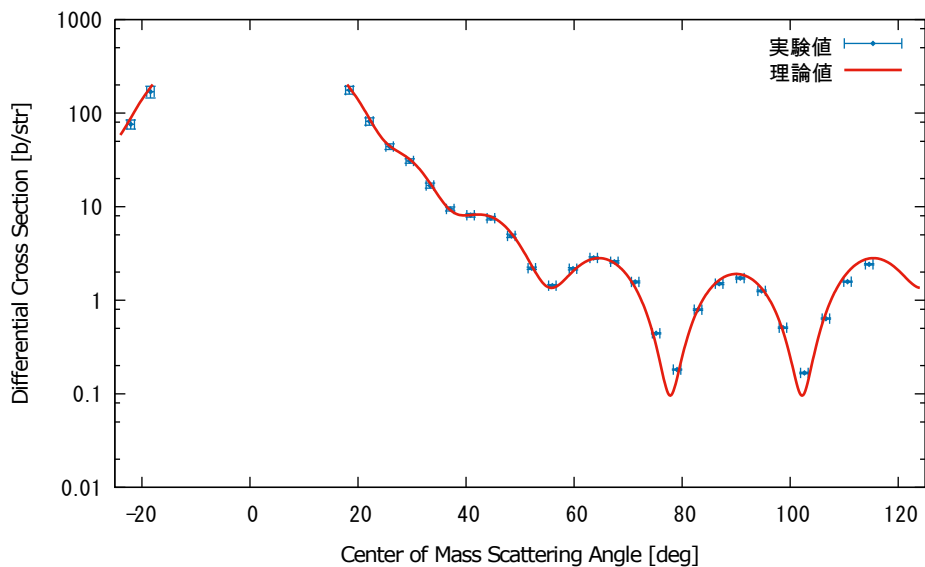


図 14.1  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における角度毎の誤差

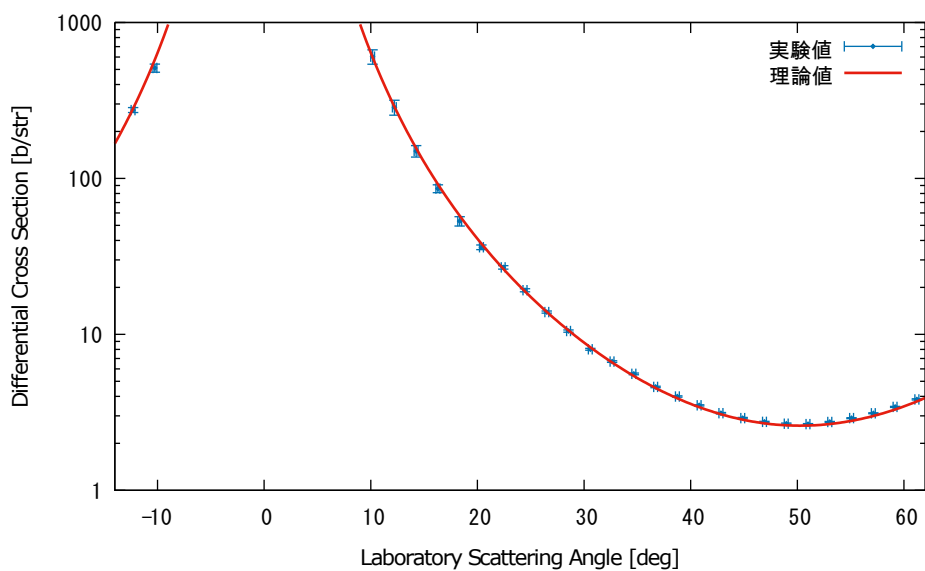


図 14.2  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における角度毎の誤差

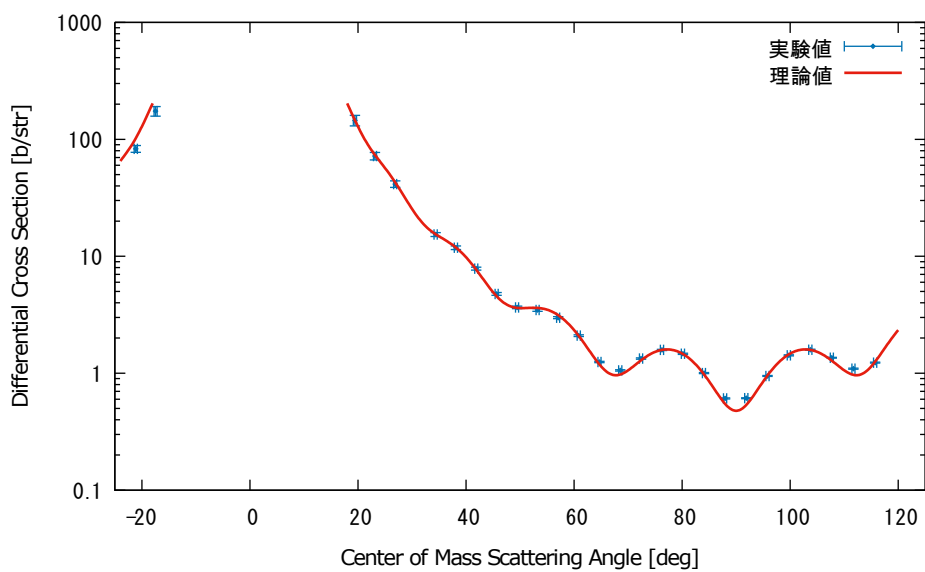


図 14.3  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における角度毎の誤差

表 14.2  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における  $N_{\text{scat}}$  と  $Q_{\text{in}}$  の値と誤差

$\theta^* [^\circ]$	$N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}/N_{\text{scat}}(\%)$	$Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}/Q_{\text{in}}(\%)$
115.1	19663	140	0.7	4842	70	1.4
111.1	23472	153	0.7	8487	92	1.1
107.1	10535	103	1.0	9077	95	1.0
103.1	4566	68	1.5	14447	120	0.8
99.1	7191	85	1.2	7220	85	1.2
95.2	8899	94	1.1	3502	59	1.7
91.2	9003	95	1.1	2511	50	2.0
87.3	8875	94	1.1	2772	53	1.9
83.4	8098	90	1.1	4681	68	1.5
79.5	8668	93	1.1	21424	146	0.7
75.6	11103	105	0.9	11038	105	1.0
71.8	7938	89	1.1	2186	47	2.1
67.9	9064	95	1.1	1497	39	2.6
64.1	8642	93	1.1	1280	36	2.8
60.3	8213	91	1.1	1565	40	2.5
56.5	6852	83	1.2	1953	44	2.3
52.7	7777	88	1.1	1429	38	2.6
48.9	7201	85	1.2	591	24	4.1
45.1	10250	101	1.0	540	23	4.3
41.3	10205	101	1.0	497	22	4.5
37.6	9373	97	1.0	388	20	5.1
33.8	10491	102	1.0	243	16	6.4
30.1	24765	157	0.6	312	18	5.7
26.4	21111	145	0.7	186	14	7.3
22.6	23926	155	0.6	113	11	9.4
18.9	46677	216	0.5	102	10	9.9
-17.9	16603	129	0.8	39	6	16.0
-21.5	12120	110	0.9	64	8	12.5

表 14.3  $^{13}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱における  $N_{\text{scat}}$  と  $Q_{\text{in}}$  の値と誤差

$\theta$ [°]	$N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}/N_{\text{scat}}$ (%)	$Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}/Q_{\text{in}}$ (%)
61.2	45702	214	0.5	20526	143	0.7
59.2	38404	196	0.5	19276	139	0.7
57.1	48930	221	0.5	26981	164	0.6
55.1	42047	205	0.5	24926	158	0.6
53.0	52666	229	0.4	33019	182	0.6
51.0	25001	158	0.6	16196	127	0.8
49.0	29586	172	0.6	19034	138	0.7
46.9	29764	173	0.6	18645	137	0.7
44.9	25706	160	0.6	15219	123	0.8
42.8	23000	152	0.7	12671	113	0.9
40.8	31022	176	0.6	15218	123	0.8
38.8	31621	178	0.6	13612	117	0.9
36.7	28953	170	0.6	10821	104	1.0
34.7	24812	158	0.6	7649	87	1.1
32.6	36066	190	0.5	9266	96	1.0
30.6	28939	170	0.6	6203	79	1.3
28.5	23335	153	0.7	3819	62	1.6
26.5	32188	179	0.6	3982	63	1.6
24.5	22434	150	0.7	2011	45	2.2
22.4	23355	153	0.7	1494	39	2.6
20.4	17468	132	0.8	830	29	3.5
18.3	6158	78	1.3	199	14	7.1
16.3	13458	116	0.9	269	16	6.1
14.3	11317	106	0.9	130	11	8.8
12.2	12626	112	0.9	76	9	11.5
10.2	28800	170	0.6	82	9	11.0
-10.2	75145	274	0.4	253	16	6.3
-12.3	110920	333	0.3	695	26	3.8

表 14.4  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱における  $N_{\text{scat}}$  と  $Q_{\text{in}}$  の値と誤差

$\theta^* [^\circ]$	$N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}$	$\delta N_{\text{scat}}/N_{\text{scat}}(\%)$	$Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}$	$\delta Q_{\text{in}}/Q_{\text{in}}(\%)$
115.7	33882	184	0.5	17638	133	0.8
111.7	26019	161	0.6	14582	121	0.8
107.7	45462	213	0.5	19699	140	0.7
103.7	35771	189	0.5	12755	113	0.9
99.8	32657	181	0.6	12549	112	0.9
95.8	31085	176	0.6	17381	132	0.8
91.9	22052	148	0.7	18563	136	0.7
87.9	21388	146	0.7	17600	133	0.8
84.0	28065	168	0.6	13697	117	0.9
80.1	30529	175	0.6	9960	100	1.0
76.3	28632	169	0.6	8477	92	1.1
72.4	22615	150	0.7	7788	88	1.1
68.5	20556	143	0.7	8789	94	1.1
64.7	19615	140	0.7	7008	84	1.2
60.9	18559	136	0.7	3888	62	1.6
57.1	21055	145	0.7	3058	55	1.8
53.2	13231	115	0.9	1634	40	2.5
49.4	15202	123	0.8	1766	42	2.4
45.7	15395	124	0.8	1360	37	2.7
41.9	22651	151	0.7	1205	35	2.9
38.1	21188	146	0.7	743	27	3.7
34.4	24348	156	0.6	654	26	3.9
26.9	23534	153	0.7	232	15	6.6
23.2	30838	176	0.6	175	13	7.6
19.4	32451	180	0.6	91	10	10.5
-17.5	36197	190	0.5	87	9	10.7
-21.1	33824	184	0.5	172	13	7.6



# 第 15 章

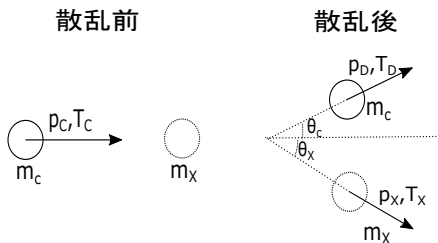
## 不純物解析

### 15.1 不純物解析をする理由

本実験において、 $^{12}\text{C}$  の膜及び  $^{13}\text{C}$  の膜を用いてきたが、その膜の作り方の性質上、微量の不純物が膜に含まれてしまうことが考えられる。したがって、以下では  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$  それぞれの膜に含まれる不純物を特定するための理論、考察、及び結果を説明する。

### 15.2 運動学

ここでは、運動学の観点から不純物の解析を試みる。本実験においては、いずれの実験も C 同士の衝突を考えていたが、ここでは衝突される側の粒子を不純物 X として計算する。また、ここで考えておかねばならないことは、検出器は不純物自体を検出するだけでなく、不純物と衝突した C も検出するため、この C から不純物を特定することができるということである。したがって、以下では不純物そのものを検出する場合と、不純物と衝突した C を検出した場合の二通りを考察する。以下では、非相対論的、実験室系で考え、下図のように炭素原子の原子量を  $m_C$ 、不純物の原子量を  $m_X$ 、入射する炭素原子、散乱された炭素原子、散乱された不純物のエネルギーをそれぞれ  $T_C$ ,  $T_D$ ,  $T_X$ 、運動量をそれぞれ  $p_C$ ,  $p_D$ ,  $p_X$  とする。また、入射粒子と散乱された炭素原子のなす角を  $\theta_C$ 、入射粒子と散乱された不純物のなす角を  $\theta_X$  とする。



#### 15.2.1 不純物自体を検出した場合

運動量保存則より、

$$p_D^2 = p_C^2 + p_X^2 - 2p_C p_X \cos \theta_X \quad (15.1)$$

となる。ここで、運動量とエネルギーには、 $p^2 = 2mT$  という関係があるので、これを使うと、

$$m_C T_D = m_C T_C + m_X T_X - 2(m_C m_X T_C T_X)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_X \quad (15.2)$$

また、エネルギー保存則

$$T_D = T_C - T_X \quad (15.3)$$

より  $T_D$  を消去して整理すると、

$$(m_C + m_X) T_X = 2(m_C m_X T_C T_X)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_X \quad (15.4)$$

ここで、両辺を二乗し、さらに  $n = m_X/m_C$  とおくと、

$$(1+n)^2 T_X^2 = 4n T_C T_X \cos^2 \theta_X \quad (15.5)$$

これを  $n$  について解くと、

$$n = \frac{-(T_X - 2T_C \cos^2 \theta_X) \pm \sqrt{(T_X - 2T_C \cos \theta_X)^2 - T_X^2}}{T_X} \quad (15.6)$$

となる。 $n$  をもとに戻すと、

$$m_X = \frac{-(T_X - 2T_C \cos^2 \theta_X) \pm \sqrt{(T_X - 2T_C \cos \theta_X)^2 - T_X^2}}{T_X} \times m_C \quad (15.7)$$

となる。したがって、 $T_C = 7500(\text{KeV})$  であることはわかっているから、ある角度  $\theta_X$  での不純物のピーク  $T_X$  を代入すれば不純物の原子量  $m_X$  を求めることができる。

また、補足として (15.4) を変形して、

$$\sqrt{\frac{T_X}{T_C}} = \frac{2 \cos \theta_X}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \quad (15.8)$$

を得る。(ここで  $n = m_X/m_C$  とした。) ある角度  $\theta_X$  でのヒストグラムをみているとすると、 $\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}$  を  $n$  の関数としてみたときこの関数は  $n = 1$  で最小値をとる。したがって、 $n = 1$  のとき  $T_X$  は最大値をとる。しかし、 $n = 1$  とは、標的粒子が C であるときである。これよりわかることは、不純物のエネルギーは必ず炭素原子のエネルギーよりも低くなるため、ヒストグラムを見ているとき、不純物のピークは炭素のピークよりも低いエネルギーに現れる。さらに不純物のピーク

クは不純物の原子量  $m_X$  が入射粒子の原子量  $m_C$  に近いほど炭素のピークに近くなる。したがって、(15.7) の値が二つあるのは不純物の原子量  $m_X$  が  $m_C$  より大きい原子と小さい原子がともに同じエネルギーに現われるからである。

15.2.2 不純物と反応した C を検出した場合

次に、不純物と反応した C を検出した場合を考える。この場合も前と同様にして、運動量保存則より、

$$p_X^2 = p_C^2 + p_D^2 - 2p_C p_D \cos \theta_C \quad (15.9)$$

となる。運動量とエネルギーの関係より、

$$m_X T_X = m_C T_C + m_D T_D - 2m_C \sqrt{T_C T_D} \cos \theta_C \quad (15.10)$$

ここで、 $n = m_X/m_C$  として、整理すると、

$$n = \frac{T_C + T_D - 2\sqrt{T_C T_D} \cos \theta_C}{T_X} \quad (15.11)$$

さらにエネルギー保存則より、 $T_X = T_C - T_D$  を代入すると、

$$n = \frac{T_C + T_D - 2\sqrt{T_C T_D} \cos \theta_C}{T_C - T_D} \quad (15.12)$$

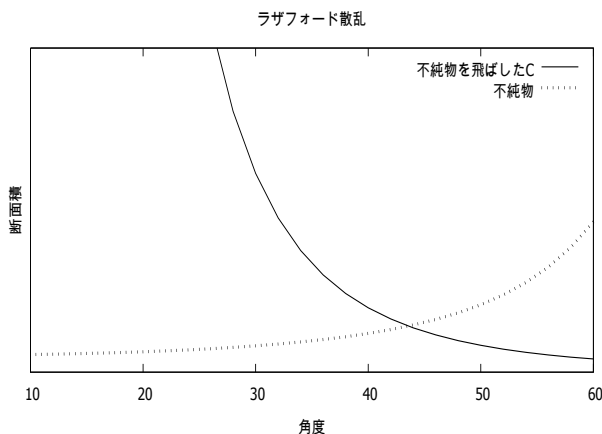
となる。 $n$  をもとに戻すと、

$$m_X = \frac{T_C + T_D - 2\sqrt{T_C T_D} \cos \theta_C}{T_C - T_D} \times m_C \quad (15.13)$$

したがって、(15.13) により、不純物の原子量  $m_X$  を求めることができる。

15.3 ラザフォード散乱

今までは、運動学の視点で不純物解析の計算をしてきた。運動学ではある角度に散乱されてきた粒子のエネルギーを用いて原子量を求めてきたが、実際にそのエネルギーに明白にみとれるピークが現れるとは限らない。なぜならその不純物が実際にその角度に散乱される割合が小さいことがあるからである。ある角度に散乱される割合を求めるには断面積を求めればよいのでラザフォード散乱を用いる。実際に計算すると、下図のようになる。これを見ると、角度が小さいところでは不純物と反応した C が多く散乱され、角度が大きいところでは不純物が多く散乱されることがわかる。

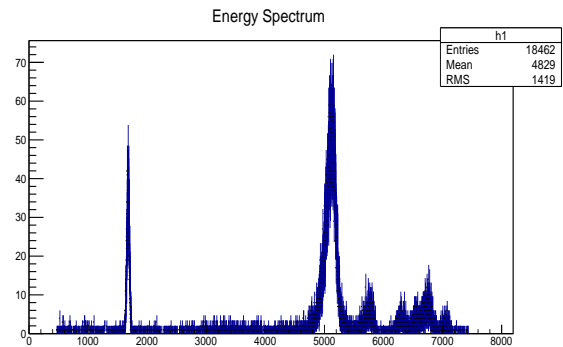


15.4 解析と結果

以上の理論に基づいて、実際の膜について不純物解析を行う。まず、運動学の観点から考えると、不純物がある一定量含まれている場合、C とは異なるところにエネルギーピークが現れる。このエネルギーピークの値をもとに不純物を特定する。また、不純物は膜の製作の性質上含まれてしまうであろう H,O,Na,Cl に絞ってまず考え、この4つとは考えられないとき、自然界に多く存在するであろう他の原子を探すとと

15.4.1 <sup>12</sup>C の膜

まず、<sup>12</sup>C の膜について不純物の解析を行う。<sup>12</sup>C の膜は、<sup>12</sup>C-<sup>12</sup>C 散乱、<sup>13</sup>C-<sup>12</sup>C 散乱の二つで用いたが、<sup>13</sup>C-<sup>12</sup>C においては、ヒストグラムに <sup>13</sup>C のピークと <sup>12</sup>C のピークと二つ現れ、C の現れるエネルギーの範囲が広いため不純物のピークを見つけにくく、かつ膜の不純物を調べるには片方の実験結果で十分であるため、今回の不純物解析には <sup>12</sup>C-<sup>12</sup>C 散乱の実験結果を用いた。ラザフォード散乱による計算より、あまり極端な角度では不純物と不純物と反応した C のピークが見えなくなるので今回は 40° の実験結果を用いた。そのヒストグラムが次の図である。



ヒストグラムを見ると、大きく分けて以下の 6 つのピークが現れていることが分かる。

peak	ch
peak1	1677
peak2	5101
peak3	5752
peak4	6309
peak5	6732
peak6	7045

(15.13) に  $m_C = 12$  を代入すると、C の理論上のピークは 5104(ch) である。したがって、これに一番近い peak2 が C であることがわかる。

次に、C の左側にある peak1 に注目する。この peak1 は他の角度のヒストグラムを見ると、10° では小さく、60° では大きくなっていることがわかる。したがってラザフォード散

乱の理論より、この peak1 は不純物を飛ばした C ではなく、不純物そのものと推測できる。したがってこれを不純物と考え、(15.7) を用いて計算すると、 $m_X = 1.14$  となる。したがって、peak1 は H だと推測できる。

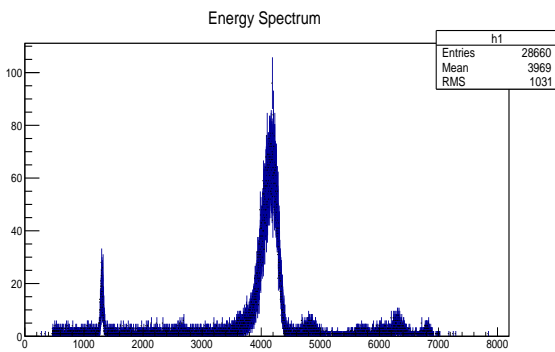
今度は、C の右側にある 4 つのピークに注目する。前で述べた運動学より、C の右側にピークがくるのは不純物そのものではなく、不純物を飛ばした C である。したがって、(15.13) により、不純物の原子量、 $m_X$  を求める。すると、peak3 は  $m_X = 17.0$ 、peak4 は  $m_X = 24.0$ 、peak5 は  $m_X = 34.4$  となった。したがって、これらはそれぞれ O( $m = 16$ )、Na( $m = 23$ )、Cl( $m = 35.5$ ) に対応すると考えられる。最後に、peak6 であるがこれも同様に計算すると  $m_X = 50.1$  となった。これに一番近く、自然界にもそれなりに存在している元素は V( $m = 51$ ) (バナジウム) である。しかし、後の補足で示すように、本実験ではアンプの調子が悪く、そのことも踏まえると少し強引ではあるが、peak6 は Fe( $m = 56$ ) (鉄) であるとも考えることができる。

以上をまとめると次の表のようになる。

peak	元素
peak1	H
peak2	C
peak3	O
peak4	Na
peak5	Cl
peak6	V or Fe

### 15.4.2 $^{13}\text{C}$ の膜

次に、 $^{13}\text{C}$  の膜の不純物の解析を行う。、 $^{13}\text{C}$  の膜を用いたのは  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱実験においてであるのでこのときの実験結果を用い、今回は  $46^\circ$  の実験結果を用いた。そのヒストグラムが次の図である。



ヒストグラムを見ると、 $^{12}\text{C}$  の膜と同様に大きく分けて以下の 6 つのピークが現れていることが分かる。

peak	ch
peak1	1308
peak2	4150
peak3	4831
peak4	5718
peak5	6316
peak6	6814

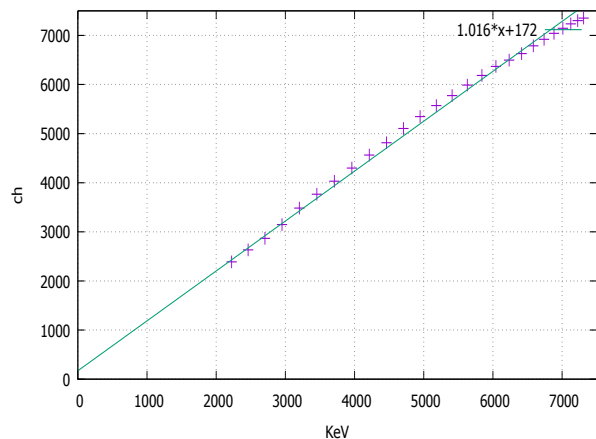
$^{13}\text{C}$  の膜の不純物の解析は  $^{12}\text{C}$  の膜の解析と全く同じである。そのため、以下に結果を記す。

peak	計算による原子量	元素
peak1	1.11	H
peak2	(不純物でない)	C
peak3	17.0	O
peak4	26.0	Na
peak5	39.6	Cl
peak6	67.7	Cu

$^{13}\text{C}$  の膜が  $^{12}\text{C}$  の膜と違うのは peak6 の元素が Cu であると考えられることであり、その他は全て同じ不純物が含まれていたと考えられる。

### 15.4.3 補足

今まで、上記のように不純物の解析を行ってきたが、本実験ではアンプの調子が悪かったため、MCA に現れるチャンネル数とエネルギーの対応が正確ではなかったと思われる。そのため、本来 MCA に現れるチャンネル数とエネルギーの対応はパルサーを用いて計算するが、今回は (15.13) で  $m_C = 12$  とすると計算できる理論上の C のピークのエネルギーと、ヒストグラムで確認できる C のピークのチャンネルを各角度でグラフにプロットし、それをもとに MCA に現れるチャンネル数とエネルギーの対応を計算した。その結果が下図の通りである。下では  $^{12}\text{C}$ - $^{12}\text{C}$  散乱の場合を示してある。



図を見ればわかるように, 本来線形であるはずのグラフが, エネルギーの高いところでは線形ではなかった. そのため, このグラフが線形であるとして近似し, このグラフを MCA に現れるチャンネル数とエネルギーの対応とした. 図中の直線はこの近似直線である. また  $^{13}\text{C}$ - $^{13}\text{C}$  散乱の方も線形ではなかったため, 同様に近似した.

## 結論

今回の解析結果より, 異種粒子の散乱は Rutherford の公式, 同種粒子の散乱は Mott の公式に従い,  $^{12}\text{C}$  のスピンは 0,  $^{13}\text{C}$  のスピンは  $1/2$  であることが確かめられた. この結果から, 古典論では説明できない量子力学の対称性について体感することができたといえる.

今回は実験結果から検出器のずれと定数倍を考慮することにより理論とほぼ一致することが出来た. しかし実際に検出器がずれているのかについては確かめられておらず, また定数倍の原因についても完全に説明するまでには至らなかった. このようなことが今後の課題になるだろう.

## 謝辞

本演習を行うにあたり,主に理論面では京都大学理学研究科准教授の菅沼秀夫先生に,主に実験・解析の面では同研究科講師の村上哲也先生に厚いご指導を頂きました.また,宇治キャンパス内のイオンビーム加速器を用いての実験においては京都大学大学院工学研究科附属量子理工学教育研究センター助教の間嶋拓也先生をはじめ施設の皆様にご協力頂き,機器の使い方や発表のやり方などについてはTAの阪上朱音さんにサポートして頂きました.協力していただいた皆様へ心から感謝の気持ちと御礼を申し上げたく,謝辞にかえさせていただきます.

# 参考文献

- [1] A. メシア. 量子力学, 第 2 卷. 東京図書, 1971.
- [2] E.Almqvist D.A.Bromley, J.A.Kuehner. Heavy-ion reaction mechanisms. elastic scattering data. In F.T.Howard A.Zucker, E.C.Halbert, editor, *Proc.Conf.On Reactions between Complex Nuclei, 2nd, Gatlinburg*, 1960.
- [3] William R. Leo. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*. Springer, 1994.
- [4] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*, Vol. II. Elsevier, 1981.
- [5] John R. Taylor. 計測における誤差解析入門. 東京化学同人, 2000. 林茂雄, 馬場涼 訳.
- [6] 森口繁一, 一松信, 宇田川かね久. 特殊函数, 岩波 数学公式 (新装版), 第 III 卷. 岩波書店, 1987.
- [7] 猪木慶治・川合光. 量子力学, 第 II 卷. 講談社, 2011.