

平成 24 年度 物理科学課題演習 A 5 (後) レポート

同種粒子散乱による炭素原子核スピンの同定

足立 景亮 篠田 謙司 田中 秀宣 松野 秀昭 森田 皓之

2013 年 4 月 5 日

物理定数及び用いる記号

本レポートで一貫して用いる物理定数を以下に掲げる [1].

物理定数	数値 [単位]	参照
真空中での光速	$c = 2.99792458 \times 10^8 [\text{m/s}]$	理科年表 p.360
真空中での誘電率	$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$	$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} c^2}$
電気素量	$e = 1.602176487 \times 10^{-19} [\text{C}]$	理科年表 p.360
Avogadro 数	$N_A = 6.02214179 \times 10^{23} [\text{/mol}]$	理科年表 p.361
(換算) Planck 定数	$\hbar = 1.054571628 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$	理科年表 p.360
古典電子半径	$r_e = 2.81777 \times 10^{-15} [\text{m}]$	八木浩輔 p.300
電子質量	$m_e = 9.1091 \times 10^{-31} [\text{kg}]$	八木浩輔 p.301
α 粒子質量	$M_\alpha = 6.6446558 \times 10^{-27} [\text{kg}]$	放射線概論 p.827
原子質量単位	$1\text{u} = 1.66053886 \times 10^{-27} \text{kg}$	†

目次

物理定数及び用いる記号	1
1 抄録	3
2 理論	3
2.1 同種粒子と対称化	3
2.1.1 ボーズ粒子とフェルミ粒子	4
2.1.2 複合粒子の統計性	5
2.1.3 関数の対称化と反対称化	5
2.2 散乱理論	6
2.2.1 微分断面積	6
2.2.2 部分波展開と微分断面積の一般形	6
2.2.3 Coulomb 散乱と Rutherford の公式	9

2.2.4	Mott の公式	11
2.2.5	Blair 模型	13
2.3	運動学	13
3	前実験	17
3.1	概要	17
3.2	目的	18
3.3	実験装置	18
3.4	実験方法	18
3.5	測定原理	19
3.5.1	膜厚と膜面密度	19
3.5.2	Bethe-Bloch の式	20
3.5.3	Am の α 崩壊とエネルギーの測定	20
3.6	結果	21
3.6.1	原点の決定	21
3.6.2	膜厚及び膜面密度の測定	22
4	本実験	24
4.1	概要	24
4.2	目的	24
4.3	実験装置	24
4.4	測定原理	25
4.4.1	微小立体角	25
4.4.2	入射粒子数	25
4.4.3	散乱粒子数	25
4.5	実験方法	25
4.5.1	回路	25
4.5.2	analysis chamber 内のセットアップ	25
4.5.3	微小立体角の測定	26
4.5.4	入射粒子数の測定	26
4.5.5	散乱粒子数の測定	26
5	結果	27
5.1	本実験におけるデータ処理	27
5.2	実験誤差	28
5.3	実験データと理論曲線を比較する際の一般的事項	29
5.3.1	Mott の公式の補正	29
5.3.2	Rutherford の公式の補正	29
5.4	実験データ	30
6	考察	32

6.1	理論曲線との比較	32
6.1.1	$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱	33
6.1.2	$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱	34
6.1.3	$^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱	35
6.2	定数倍補正及び角度補正	35
6.2.1	解析方法の妥当性	36
6.2.2	MCA に関する補正	37
6.2.3	Faraday cup による粒子数の測定	37
6.3	Mott の公式を用いる妥当性	38
6.4	不純物の存在	39
6.4.1	飛来粒子の原因	40
6.4.2	不純物元素の同定方法	40
6.4.3	不純物元素の同定結果	41
7	結論	42
	参考文献	43
	謝辞	43
	付録	44
	表	52

1 抄録

量子力学的粒子は波動関数で記述されるが、散乱現象においてはボーズ粒子とフェルミ粒子で波動関数が対称化あるいは我々はこれらの対称性の違いについて理解を深めるために、タンデム型イオン加速器による ^{12}C , ^{13}C を用いた散乱実験を実施して微分断面積を導出し、Mottの公式と比較することによってスピンの同定を行った。

本稿では先に我々が学んだ散乱実験に必要な理論について説明し、その後に行った実験の結果及び考察について述べる。

2 理論

2.1 同種粒子と対称化

今回の実験に現れる量子的な現象において異なる振る舞いを示す2種類の粒子、ボーズ粒子とフェルミ粒子について述べる。また、その効果を記述するために必要な関数の対称化を補完する。

2.1.1 ボーズ粒子とフェルミ粒子

自然界にはボーズ粒子（あるいはボソン、ボーズ統計に従う粒子）と呼ばれる粒子の入れ替えに関して“対称”な粒子と、フェルミ粒子（あるいはフェルミオン、フェルミ統計に従う粒子）と呼ばれる粒子の入れ替えに関して“反対称”な粒子の2種類が存在する。このことは量子力学及びそれを記述する波動関数の性質によって説明することが可能である。

N 個の粒子が存在する系を考え、各粒子に $1, \dots, N$ と番号をつける。この系を記述する波動関数 ψ は各粒子 i の力学変数を ξ_i として、 $\xi_1 \dots \xi_N$ を変数とする関数で与えられる。

$$\psi = \psi(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad (2.1)$$

粒子の従う統計を考えるにあたって、粒子の入れ替えを行う演算子 \hat{P}_{ij} を導入する。 \hat{P}_{ij} は i 番目の粒子と j 番目の粒子を入れ替える演算子であり

$$\hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) = \psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \quad (2.2)$$

また、粒子を2回入れ替えると元の状態に戻ることから、 \hat{P}_{ij} の2乗は恒等演算子 $\hat{\mathbf{1}}$ である。

$$\hat{P}_{ij}^2 = \hat{\mathbf{1}} \quad (2.3)$$

ここで、今考えている i 番目の粒子と j 番目の粒子が同種粒子とする。量子力学の体系において同種粒子は区別ができないという事実があり、その結果 i 番目の粒子と j 番目の粒子を入れ替えた波動関数が表す状態は元の波動関数が表す状態と同じである。ただし、波動関数の性質として全体の位相因子のみが異なる波動関数が表す状態は同じであることから、ある実数 θ が存在して

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) = e^{i\theta}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \quad (2.4)$$

式 (2.4) の両辺に演算子 \hat{P}_{ij} を作用させる。左辺について、同じ粒子を2回入れ替えるので、式 (2.2) 及び式 (2.3) を用いると

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) &= \hat{P}_{ij}^2\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \\ &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \end{aligned} \quad (2.5)$$

右辺について、式 (2.2) 及び式 (2.4) を用いると

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij}e^{i\theta}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) &= e^{i\theta}\psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \\ &= e^{2i\theta}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \end{aligned} \quad (2.6)$$

よって、式 (2.5) 及び式 (2.6) より

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) = e^{2i\theta}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \quad (2.7)$$

従って

$$e^{2i\theta} = 1 \quad (2.8)$$

$$e^{i\theta} = \pm 1 \quad (2.9)$$

このとき、式 (2.4) より

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) = \pm\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \quad (2.10)$$

であり、粒子の入れ替えに関して“対称”すなわち波動関数が +1 倍される場合と“反対称”すなわち波動関数が -1 倍される場合があることが分かる。粒子の入れ替えに関して対称であるか反対称であるかは入れ替えを行う粒子の種類ごとに決まっており、対称なものがボーズ粒子、反対称なものがフェルミ粒子である。自然界に存在する粒子がボーズ粒子かフェルミ粒子かは粒子のスピンと関係しており、ボーズ粒子はスピンの整数、フェルミ粒子はスピンの半整数である。

2.1.2 複合粒子の統計性

複合粒子とは、複数の粒子から成る粒子のことであり、場合によってはこれを 1 つの粒子とみなして、その粒子が従う統計性を考えることが有用である。これは扱う粒子のエネルギーが励起に必要なエネルギーより十分小さい場合に良い精度で成り立つ近似である。複合粒子が従う統計性はその構成粒子によって決まるが、構成粒子が従う統計性が分かっている、すなわち複合粒子にボーズ粒子とフェルミ粒子がそれぞれ何個含まれているかが分かっている場合、これを計算によって求めることができる。

今、ある複合粒子が N_B 個のボーズ粒子と N_F 個のフェルミ粒子から構成されているとする。この複合粒子の同種粒子、すなわちその構成粒子が全く同じ粒子との入れ替えを考えると、これはその構成粒子を全て入れ替えることに他ならない。ボーズ粒子 1 個を入れ替えると波動関数は +1 倍、フェルミ粒子 1 個を入れ替えると波動関数は -1 倍されることから、複合粒子を入れ替えると波動関数は $(-1)^{N_F}$ 倍されることになる。よって N_F が偶数であれば粒子の入れ替えに関して対称であり、 N_F が奇数であれば粒子の入れ替えに関して反対称である。

従って複合粒子の統計性は複合粒子に含まれるフェルミ粒子の個数のみによって決まり、偶数個のフェルミ粒子が含まれる複合粒子はボーズ粒子であり、奇数個のフェルミ粒子が含まれる複合粒子はフェルミ粒子である。

留意すべきは、複合粒子のスピンの大きさは必ずしもその構成粒子のスピンの代数和にならないことである。スピンの大きさがそれぞれ S_1, S_2 である 2 つの粒子では、その複合粒子のスピンの大きさは、 $S_1 + S_2$ が整数であれば $0, 1, \dots, S_1 + S_2$ の値、 $S_1 + S_2$ が半整数であれば $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, S_1 + S_2$ の値を取り得る。このことは複合粒子を構成する粒子の個数が 3 個以上の場合でも同様に成り立つ。

2.1.3 関数の対称化と反対称化

粒子の持つ統計性を考慮せずに得た波動関数を、対称化あるいは反対称化する方法について述べる。これは 1 粒子問題の解を相互作用のない N 粒子問題の解に拡張する場合や、相互作用のある 2 粒子系の問題を解く際に有効である。

元の波動関数を $\psi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ とすると、これらに対称化あるいは反対称化する演算子 \hat{S} 及び \hat{A} は以下のように表せる。

$$\hat{S}\psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\tau \in S_N} \psi(\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_N}) \quad (2.11)$$

$$\hat{A}\psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\tau \in S_N} \text{sgn}(\tau) \psi(\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_N}) \quad (2.12)$$

ここで S_N は $\{1, \dots, N\}$ の置換全体の集合であり、 sgn は符号関数で

$$\text{sgn}(\tau) = \begin{cases} +1 & (\tau \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\tau \text{ が奇置換}) \end{cases} \quad (2.13)$$

を満たす。例えば 2 粒子系の場合

$$\hat{S}\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(\xi_1, \xi_2) + \psi(\xi_2, \xi_1)) \quad (2.14)$$

$$\hat{A}\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(\xi_1, \xi_2) - \psi(\xi_2, \xi_1)) \quad (2.15)$$

となる。

この対称化あるいは反対称化の方法は波動関数のみならず、例えば後で述べる散乱振幅にも適用可能である。

2.2 散乱理論

原子や原子核の構造、またそのスケールにおいて働く力の性質を調べるときに行われるのが散乱実験であり、ここではその大本となる散乱理論について述べる。特に、今回の実験でも重要な概念である微分散乱断面積や散乱振幅について説明し、Rutherford の公式及び Mott の公式を導出する。また、核力の効果を考慮した Blair 模型についても言及する。

2.2.1 微分散面積

単位時間に単位面積を通過する粒子数のことをフラックスと呼ぶ。ここでは、標的粒子に対して、一定のエネルギーを持った入射フラックスが定常的に存在する状況を考える。このとき入射粒子と標的粒子の相互作用によって粒子は散乱され、ある散乱角 $\Omega = (\theta, \phi)$ 方向の微分散乱断面積（以下、微分散面積と略す）は次の式 (2.16) で定義される。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{dN}{d\Omega} \frac{1}{j_{\text{inc}}} \quad (2.16)$$

ここで、 j_{inc} は入射フラックスであり、 $\frac{dN}{d\Omega}$ は単位時間に単位立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子数である。また、標的粒子からの距離 r が十分大きいところでは散乱フラックスを j_{scat} として

$$\frac{dN}{d\Omega} = r^2 j_{\text{scat}} \quad (2.17)$$

となるので、式 (2.16) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 j_{\text{scat}}}{j_{\text{inc}}} \quad (2.18)$$

とも表すことができる。ここで、式 (2.16) において分子の次元が $[T]$ であり、分母の次元が $[(T \cdot L^2)]$ なので、微分散面積は面積の次元を持つ。

また、微分散面積を全立体角で積分して、全散乱断面積 σ が求められる。

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.19)$$

2.2.2 部分波展開と微分散面積の一般形

今入射波が、波数を k 、進行方向を z 軸とする平面波であると考え、よってそれを ψ_{inc} として

$$\psi_{\text{inc}} = e^{ikz} \quad (2.20)$$

と表せる．ここで実際には時間に依存する振動項 $e^{-i\omega t}$ も因子として必要だが，ここでは記述を簡潔に行うためにそれを明記せずに議論を進める．今，この入射波は

$$|\psi_{\text{inc}}|^2 = 1 \quad (2.21)$$

というように，単位体積あたり 1 粒子の密度を与えるよう波動関数が規格化されている．このとき粒子の集団が速度 v で動けば，入射フラックスは v となる．ここで入射波は， r が十分大きいところで内向き球面波と外向き球面波の重ね合わせとして

$$\psi_{\text{inc}} = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell P_\ell(\cos\theta) \left(e^{i(\delta_\ell kr - \frac{1}{2}\ell\pi)} - e^{-i(\delta_\ell kr - \frac{1}{2}\ell\pi)} \right) \quad (2.22)$$

のように部分波展開できる (Rayleigh の公式)．ここで P_ℓ は ℓ 次の Legendre 多項式である．

今標的粒子はスピンを持たず，かつその有限領域周りで影響を与える球対称ポテンシャルを持つと考える．また系は重心系にあるとする．このとき，内向き部分波はポテンシャルの影響を受けず，外向き部分波のみがポテンシャルの影響を受け，そのときの変化を位相振幅因子 $\eta_\ell e^{2i\delta_\ell}$ で表すと，全体の波動関数 ψ_{tot} は

$$\begin{aligned} \psi_{\text{tot}} &= \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{scat}} \\ &= \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell P_\ell(\cos\theta) \left(\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} e^{i(\delta_\ell kr - \frac{1}{2}\ell\pi)} - e^{-i(\delta_\ell kr - \frac{1}{2}\ell\pi)} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる．ここで δ_ℓ と η_ℓ はそれぞれ位相のずれと弾性率である．

今，式 (2.23) から式 (2.22) を引けば，散乱による波動関数が得られて

$$\begin{aligned} \psi_{\text{scat}} &= \psi_{\text{tot}} - \psi_{\text{inc}} \\ &= \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) (\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} - 1) e^{ikr} \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる．ここで遷移振幅 T_ℓ を

$$T_\ell \equiv \frac{\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} \quad (2.25)$$

と定義すると

$$\psi_{\text{scat}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) T_\ell \quad (2.26)$$

となり，さらに散乱振幅 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) \equiv \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) T_\ell \quad (2.27)$$

と定義すると，散乱による波動関数は

$$\psi_{\text{scat}} = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (2.28)$$

となる．このように散乱振幅 $f(\theta)$ は散乱角 θ における球面波の振幅を表している．

次に，散乱振幅の式 (2.27) を用いて微分断面積を表す．式 (2.28) の両辺の絶対値を 2 乗すると

$$|\psi_{\text{scat}}|^2 = \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \quad (2.29)$$

が得られる。今重心系で考えているので、散乱粒子は全て入射粒子と同じ速度 v と波数 k を持つ。このとき、散乱粒子のフラックスは

$$\begin{aligned} j_{\text{scat}} &= v|\psi_{\text{scat}}|^2 \\ &= \frac{v|f(\theta)|^2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。ここで v が入射フラックスであることから、微分断面積は式 (2.18) より

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r^2 j_{\text{scat}}}{v} \\ &= |f(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。これと先の散乱振幅の定義、式 (2.27) より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos\theta) T_{\ell} \right|^2 \quad (2.32)$$

となる。これが一般的な微分断面積の形である。

ところで全散乱断面積は式 (2.19) より微分断面積を全立体角で積分すると得られて、このとき弾性散乱による散乱断面積を σ_{elastic} とすると

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{elastic}} &= \int |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)^2 |T_{\ell}|^2 \int [P_{\ell}(\cos\theta)]^2 d\Omega \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。また内向き球面波、外向き球面波それぞれの散乱断面積を σ_{out} 及び σ_{in} とすると、標的粒子を中心として球の外側に出ていく粒子数は

$$\begin{aligned} v\sigma_{\text{out}} &= v \int r^2 \left| \frac{1}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} e^{ikr} \right|^2 d\Omega \\ &= \frac{v\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \eta_{\ell}^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

となり、同様に球の内側に入ってくる粒子数は

$$v\sigma_{\text{in}} = \frac{v\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \quad (2.35)$$

となる。ここで非弾性散乱による散乱断面積を $\sigma_{\text{inelastic}}$ とすると、それは式 (2.35) から式 (2.34) を引き、さらに辺々を v で割ることによって得られて

$$\sigma_{\text{inelastic}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (1 - \eta_{\ell}^2) \quad (2.36)$$

となる。式 (2.33) 及び式 (2.25) より、 $\eta_{\ell} = 1$ かつ $\delta_{\ell} = \frac{\pi}{2}$ のとき純粋弾性散乱が生じ σ_{elastic} が最大となる。一方 $\eta_{\ell} = 0$ のとき $\sigma_{\text{inelastic}}$ が最大になる。ただしこのとき、非弾性散乱だけでなく弾性散乱も同時に生じている。全体の散乱断面積 σ_{tot} の最大値は $\eta_{\ell} = 1$ かつ $\delta_{\ell} = \frac{\pi}{2}$ のときに実現される。

2.2.3 Coulomb 散乱と Rutherford の公式

2 粒子の散乱問題を考える．このとき Schrödinger 方程式は重心部分と相対部分に分離できる．今ポテンシャル $V(r)$ として Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.37)$$

を考える．ここで， $Z_1 e, Z_2 e$ はそれぞれの粒子が持つ電荷である．このとき粒子の散乱は相対座標の部分にか影響せず，Schrödinger 方程式は m を換算質量として

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi = E\psi \quad (2.38)$$

となる．ここで E は相対部分のエネルギーで

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.39)$$

また

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v} \quad (2.40)$$

と Sommerfeld パラメータ η を導入すると

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\eta k}{r} \right] \psi = 0 \quad (2.41)$$

であり，さらに

$$\psi = e^{ikz} f(r-z) \quad (2.42)$$

$$u = r - z \quad (2.43)$$

として変数変換を行えば

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \eta k \right] f(u) = 0 \quad (2.44)$$

となる． $v = iku = ik(r-z)$ とおくと

$$\left[v \frac{d^2}{dv^2} + (1 - v) \frac{d}{dv} + i\eta \right] f\left(\frac{v}{ik}\right) = 0 \quad (2.45)$$

となる．これは Laplace 型の微分方程式であり，合流型超幾何微分方程式の一種である．一般に Laplace 型の微分方程式

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (\beta - z) \frac{d}{dz} - \alpha \right] f(z) = 0 \quad (2.46)$$

の原点正則な解は超幾何関数 $F(\alpha|\beta|z)$ で与えられ，また $\beta = b$ (整数) としたとき，その原点で非正則な解として $W_1(\alpha|b|z)$, $W_2(\alpha|b|z)$ とがあり，原点正則な解 F は原点で非正則な解 W_1, W_2 の和として書ける．よって今 Schrödinger 方程式 (2.38) の解について，その正則解を ψ_C ，非正則な解を ψ_i 及び ψ_d とすると

$$\psi_C = \psi_i + \psi_d \quad (2.47)$$

となる。ここで A を規格化定数として

$$\psi_C = Ae^{ikz}F(-i\eta|1|iku) \quad (2.48)$$

$$\psi_i = Ae^{ikz}W_1(-i\eta|1|iku) \quad (2.49)$$

$$\psi_d = Ae^{ikz}W_2(-i\eta|1|iku) \quad (2.50)$$

である。ところで一般に W_1, W_2 は漸近展開できて

$$W_1(\alpha|b|z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(n+\alpha-b+1)}{\Gamma(\alpha-b+1)} \frac{(-z)^{-n}}{n!} \quad (2.51)$$

$$W_2(\alpha|b|z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n+b-\alpha)}{\Gamma(b-\alpha)} \frac{z^{-n}}{n!} \quad (2.52)$$

となる。ここで Γ はガンマ関数である。これより ψ_i, ψ_d の漸近形が

$$\psi_i \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} Ae^{ikz} \frac{1}{\Gamma(1+i\eta)} e^{i\eta(\ln ku - \frac{\pi}{2}i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \right)^2 \frac{(-iku)^{-n}}{n!} \quad (2.53)$$

$$\psi_d \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} -Ae^{ik(u+z)} \frac{\eta}{ku\Gamma(1-i\eta)} e^{i\eta(\ln ku - \frac{\pi}{2}i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1+i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)} \right)^2 \frac{(iku)^{-n}}{n!} \quad (2.54)$$

となる。ここで $A = \Gamma(1+i\eta)e^{-\frac{\pi}{2}\eta}$ とし、 $u = r - z$ に戻して、無限級数の部分を第2項まで書くと

$$\psi_i \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kz + \eta \ln ku)} \left[1 + \frac{\eta^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \quad (2.55)$$

$$\psi_d \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\eta}{k(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} e^{i(kr - \eta \ln k(r-z))} \left[1 + \frac{(1+i\eta)^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \quad (2.56)$$

となる。ここで ψ_d について $z = r \cos \theta$ であり $r - z = r(1 - \cos \theta) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 、さらに

$$\frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} = e^{2i\delta_0} \quad (2.57)$$

として

$$\psi_d \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{r} \exp[i(kr - \eta \ln 2kr)] f_C(\theta) \quad (2.58)$$

である。ただし

$$f_C(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp \left[-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\delta_0 \right] \quad (2.59)$$

$$\delta_0 = \arg \Gamma(1+i\eta) \quad (2.60)$$

である。 $f_C(\theta)$ は Coulomb 散乱の散乱振幅であり、部分波展開すると

$$f_C(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) e^{2i\delta_{\ell}} \quad (2.61)$$

$$\delta_{\ell} = \arg \Gamma(\ell+1+i\eta) \quad (2.62)$$

と表せる．ところで ψ_i , ψ_d のフラックスをそれぞれ \mathbf{j}_i , \mathbf{j}_d とおくと

$$\mathbf{j}_i \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\hbar k}{m} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{j}_d \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{v |f_C(\theta)|^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.64)$$

となる．これらより ψ_i , ψ_d はそれぞれ入射波及び散乱波であると解釈できるので，Coulomb 散乱の微分断面面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r^2 |\mathbf{j}_d|}{|\mathbf{j}_i|} \\ &= |f_C(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる．よって式 (2.59) より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.66)$$

が得られる．この式 (2.66) が Coulomb 散乱における微分断面面積を与える Rutherford の公式である．

2.2.4 Mott の公式

ここまでスピンを無視した古典的粒子の散乱について議論した．しかし，同種粒子の散乱においてはスピンの起因する量子的な効果が顕著に現れる．以下では，まずスピン $\frac{1}{2}$ を持つ陽子同士の散乱について考察した後，より一般的なスピン S を持つ粒子の場合に拡張する．

陽子はスピン $\frac{1}{2}$ を持つのでフェルミ粒子であり，粒子の入れ替えに対して波動関数全体は反対称である．この場合，全スピンは保存量であるが，スピン波動関数の対称性は 2 粒子の合成スピンの triplet か singlet かによって異なる．合成スピンの triplet のとき，スピン波動関数は粒子の入れ替えに関して対称であり，波動関数の空間部分は反対称である．一方合成スピンの singlet のとき，スピン波動関数は粒子の入れ替えに関して反対称であり，波動関数の空間部分は対称である．よって，triplet の散乱振幅 $f_t(\theta)$ を式 (2.12) に従って反対称化すると

$$\hat{f}_t(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)) \quad (2.67)$$

であり，triplet の微分断面面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_t = 2 |\hat{f}_t(\theta)|^2 = |f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)|^2 \quad (2.68)$$

である．ここに現れる係数 2 は粒子が同種であることの不可弁別性に起因する項である．

一方，singlet の散乱振幅 $f_s(\theta)$ を式 (2.11) に従って対称化すると

$$\hat{f}_s(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)) \quad (2.69)$$

と書け，singlet の微分断面面積は，triplet の場合と同様に係数 2 が必要で

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_s = 2 |\hat{f}_s(\theta)|^2 = |f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)|^2 \quad (2.70)$$

となる。

散乱が起こる際、各粒子のスピンが向く確率が全て等しいとすると、triplet と singlet が現れる比は 3 : 1 であり、全体の微分断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{3}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_t + \frac{1}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_s \\ &= \frac{3}{4} |f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)|^2\end{aligned}\quad (2.71)$$

で与えられる。

ポテンシャル $V(r)$ が完全な Coulomb ポテンシャル (ただし、陽子同士の散乱なので式 (2.37) において $Z_1 = Z_2 = 1$) で与えられるとき、triplet と singlet の散乱振幅 $f_t(\theta), f_s(\theta)$ について

$$f_t(\theta) = f_s(\theta) = f_C(\theta)\quad (2.72)$$

が成り立つので、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \cos \left(\eta \ln \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)\quad (2.73)$$

となる。

続いて、これを一般にスピンが S の場合に拡張する。スピンが S の場合、2つの同種粒子の合成スピンの最大値は $2S$ であり、スピンは $(2S+1)^2$ 通り存在する。合成スピンの最大値 $2S$ の場合、スピン波動関数は粒子の入れ替えに関して対称であり、合成スピンの最大値より 1 小さい $2S-1$ の場合、スピン波動関数は粒子の入れ替えに関して反対称である。以下、同様に合成スピンの最大値より偶数小さい値の場合はスピン波動関数は対称であり、合成スピンの最大値より奇数小さい値の場合はスピン波動関数は反対称である。 S が整数の場合はボーズ粒子なので波動関数全体が対称であり、 S が半整数の場合はフェルミ粒子なので波動関数全体が反対称であることを考慮すると、合成スピンの偶数の場合は波動関数の空間部分が対称であり、合成スピンの奇数の場合は波動関数の空間部分が反対称である。

また、陽子について考察したときと同様に、各粒子のスピンが向く確率が全て等しいとすると、合成スピンの大きさが T である確率は $\frac{2T+1}{(2S+1)^2}$ なので微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{T=0}^{2S} \frac{2T+1}{(2S+1)^2} |f_T(\theta) + (-1)^T f_T(\pi - \theta)|^2\quad (2.74)$$

と書ける。

ポテンシャルを先ほどと同様に完全な Coulomb ポテンシャル (ただし、同種粒子の散乱なので式 (2.37) において $Z_1 = Z_2 = Z$) とみなすと、散乱振幅は $T = 0, 1, \dots, 2S$ に対して $f_T(\theta) = f_C(\theta)$ であり、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + (-1)^{2S} \frac{2}{2S+1} \cos \left(\eta \ln \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)\quad (2.75)$$

$$\eta = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v}\quad (2.76)$$

となる。この式 (2.75) が同種粒子の散乱における微分断面積を与える Mott の公式である。

2.2.5 Blair 模型

Blair 模型とは完全な Coulomb 弾性散乱での散乱振幅, 式 (2.59) 及び式 (2.61)

$$\begin{aligned} f_C(\theta) &= -\frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp\left(-i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\delta_0\right) \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) e^{2i\delta_{\ell}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

において核力の効果が加わり, 非弾性散乱の効果が部分波の消失として見られるという模型である. 消失する成分を $\delta f(\theta)$ とする.

$$\delta f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} C_{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) e^{2i\delta_{\ell}} \quad (2.78)$$

ここで C_{ℓ} は $[0, 1]$ に値を持つパラメータで吸収率を表す. また, ℓ_{\max} は $C_{\ell} \neq 0$ なる最大の ℓ を示すパラメータである. Blair 模型での散乱振幅 $f_B(\theta)$ は

$$f_B(\theta) = f_C(\theta) - \delta f(\theta) \quad (2.79)$$

である. 微分断面積は次の式で与えられる.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Blair}} = \sum_{T=0}^{2S} \frac{2T+1}{(2S+1)^2} |f_B(\theta) + (-1)^T f_B(\pi - \theta)|^2 \quad (2.80)$$

2.3 運動学

ここまでずっと重心系で議論してきた. しかし, 我々が測定できるのは実験室系での値であり, 両者の値についての関係式が必要である.

運動学について以下の図 1 のような散乱過程を実験室系で考える. 散乱前の運動量を

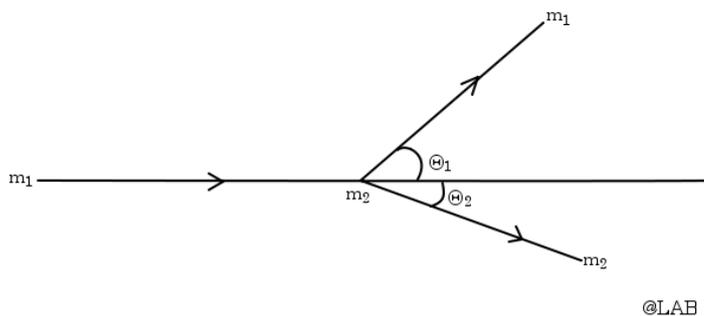


図 1 散乱過程 (実験室系)

$$p_1^{(\text{lab})} = \begin{pmatrix} E_1^{(\text{lab})}/c \\ \mathbf{P}_1^{(\text{lab})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^{(\text{lab})}/c \\ p^{(\text{lab})} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$p_2^{(\text{lab})} = \begin{pmatrix} E_2^{(\text{lab})}/c \\ \mathbf{P}_2^{(\text{lab})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

とおく. \bullet_1 は入射粒子, \bullet_2 は標的粒子の物理量を表し, E, p, m はそれぞれ粒子のエネルギー, 運動量, 質量である. これを重心系で考えた場合は図 2 のようになる. 重心系での運動量は Lorentz 変換によって結ばれ,

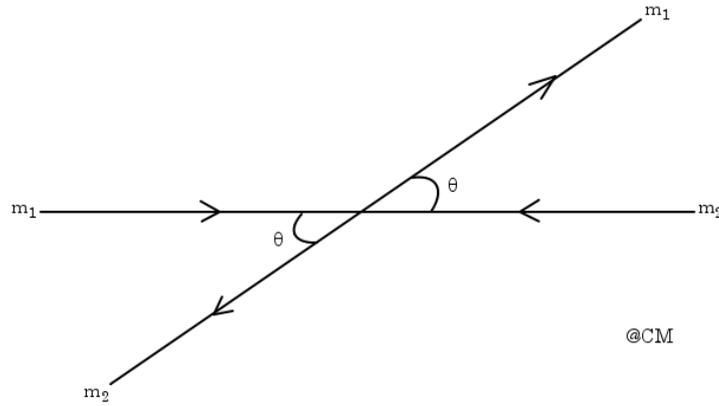


図 2 散乱過程 (重心系)

β パラメータと γ パラメータを次のように求めることができる.

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(\text{lab})}/c \\ p^{(\text{lab})} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(E_1^{(\text{lab})}/c - \beta p^{(\text{lab})}) \\ \gamma(-\beta E_1^{(\text{lab})}/c + p^{(\text{lab})}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^{(\text{cm})}/c \\ \mathbf{P}_1^{(\text{cm})} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_2 c \\ -\beta\gamma m_2 c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2^{(\text{cm})}/c \\ \mathbf{P}_2^{(\text{cm})} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

重心系では運動量の和が 0 なので $\gamma(-\beta E_1^{(\text{lab})}/c + p^{(\text{lab})}) - \beta\gamma m_2 c = 0$ であり

$$\beta = \frac{p^{(\text{lab})} c}{E_1^{(\text{lab})} + m_2 c^2} = \frac{E_{\text{kin}}}{E_1^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})}} \quad (2.85)$$

ここで $E_{\text{kin}} = p^{(\text{lab})} c$ とおいた. γ パラメータについては定義から

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_1^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})}}{\sqrt{(E_1^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})})^2 - E_{\text{kin}}^2}} \quad (2.86)$$

となる. よって, 重心系でのエネルギーは

$$E_1^{(\text{cm})} = \gamma(E_1^{(\text{lab})} - \beta p^{(\text{lab})} c) = \gamma(E_1^{(\text{lab})} - \beta E_{\text{kin}}) \quad (2.87)$$

$$E_2^{(\text{cm})} = \gamma m_2 c^2 = \gamma E_2^{(\text{lab})} \quad (2.88)$$

と表される. Rutherford の公式 (2.66) や Mott の公式 (2.75) に現れるエネルギー E は重心系での値であり, 式 (2.87) と式 (2.88) の和から静止エネルギーを引いて

$$\begin{aligned} E &= E_1^{(\text{cm})} + E_2^{(\text{cm})} - (m_1 + m_2)c^2 \\ &= \gamma(E_1^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})} - \beta E_{\text{kin}}) - (m_1 + m_2)c^2 \end{aligned} \quad (2.89)$$

である.

また, 実験室系と重心系で不変量を比べると

$$(E_1^{(\text{lab})}/c + m_2c)^2 - p^{(\text{lab})2} = (E_1^{(\text{cm})}/c + E_2^{(\text{cm})}/c)^2 - 0^2 \quad (2.90)$$

ここで \bullet' は散乱後の物理量を表す

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E_1^{(\text{lab})2} + 2E_1^{(\text{lab})}m_2c^2 + m_2^2c^4 - p^{(\text{lab})2}c^2 &= E_1'^{(\text{cm})2} + 2E_1'^{(\text{cm})}E_2'^{(\text{cm})} + E_2'^{(\text{cm})2} \\ \Leftrightarrow m_1^2c^4 + 2E_1^{(\text{lab})}m_2c^2 + m_2^2c^4 &= m_1^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2 + 2E_1'^{(\text{cm})}E_2'^{(\text{cm})} + m_2^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2 \\ \Leftrightarrow E_1'^{(\text{cm})}E_2'^{(\text{cm})} &= E_1^{(\text{lab})}m_2c^2 - p'^{(\text{cm})2}c^2 \\ \Leftrightarrow (E_1'^{(\text{cm})}E_2'^{(\text{cm})})^2 &= (m_1^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2)(m_2^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2) \\ &= (E_1^{(\text{lab})}m_2c^2 - p'^{(\text{cm})2}c^2)^2 \\ \Leftrightarrow p'^{(\text{cm})} &= \sqrt{\frac{E_1^{(\text{lab})2}m_2^2c^4 - m_1^2m_2^2c^8}{m_1^2c^6 + 2m_2E_1^{(\text{lab})}c^4 + m_2^2c^6}} \\ &= \sqrt{\frac{p^{(\text{lab})2}E_2^{(\text{lab})2}}{E_1^{(\text{lab})2} - p^{(\text{lab})2}c^2 + 2E_1^{(\text{lab})}E_2^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})2}}}} \\ &= \frac{p^{(\text{lab})}E_2^{(\text{lab})}}{\sqrt{(E_1^{(\text{lab})} + E_2^{(\text{lab})})^2 - p^{(\text{lab})2}c^2}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$E_1'^{(\text{cm})} = \sqrt{m_1^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2} \quad (2.92)$$

$$E_2'^{(\text{cm})} = \sqrt{m_2^2c^4 + p'^{(\text{cm})2}c^2} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{P}'_1^{(\text{cm})} = p'^{(\text{cm})} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{P}'_2^{(\text{cm})} = p'^{(\text{cm})} \begin{pmatrix} \cos(\pi - \theta) \\ \sin(\pi - \theta) \cos(\pi + \phi) \\ \sin(\pi - \theta) \sin(\pi + \phi) \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

ここで実験室系に戻ると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1^{(\text{lab})}/c \\ p_1^{(\text{lab})} \cos \Theta_1 \\ p_1^{(\text{lab})} \sin \Theta_1 \cos \Phi_1 \\ p_1^{(\text{lab})} \sin \Theta_1 \sin \Phi_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(\text{cm})}/c \\ p^{(\text{cm})} \cos \theta \\ p^{(\text{cm})} \sin \theta \cos \phi \\ p^{(\text{cm})} \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \beta\gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta \\ \beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta \\ p^{(\text{cm})} \sin \theta \cos \phi \\ p^{(\text{cm})} \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_2^{(\text{lab})}/c \\ p_2^{(\text{lab})} \cos \Theta_2 \\ p_2^{(\text{lab})} \sin \Theta_2 \cos \Phi_2 \\ p_2^{(\text{lab})} \sin \Theta_2 \sin \Phi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma E_2^{(\text{cm})}/c + \beta\gamma p^{(\text{cm})} \cos(\pi - \theta) \\ \beta\gamma E_2^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos(\pi - \theta) \\ p^{(\text{cm})} \sin(\pi - \theta) \cos(\phi + \pi) \\ p^{(\text{cm})} \sin(\pi - \theta) \sin(\phi + \pi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.97)$$

よって、実験室系における散乱角と重心系における散乱角について

$$\begin{aligned} \cos \Theta_1 &= \frac{p_1^{(\text{lab})} \cos \Theta_1}{p_1^{(\text{lab})}} \\ &= \frac{\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta}{\sqrt{(\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta)^2 + (p^{(\text{cm})} \sin \theta \cos \phi)^2 + (p^{(\text{cm})} \sin \theta \sin \phi)^2}} \\ &= \frac{\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta}{\sqrt{(\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta)^2 + p^{(\text{cm})2} (1 - \cos^2 \theta)}} \\ &= \frac{\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c + \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta}{\sqrt{\beta^2 \gamma^2 p^{(\text{cm})2} \cos^2 \theta + (2\beta\gamma^2 p^{(\text{cm})} E_1^{(\text{cm})}/c) \cos \theta + p^{(\text{cm})2} + (\beta\gamma E_1^{(\text{cm})}/c)^2}} \\ &= \frac{d_1 \cos \theta + e_1}{\sqrt{a_1 \cos^2 \theta + b_1 \cos \theta + c_1}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \cos \Theta_2 &= \frac{\beta\gamma E_2^{(\text{cm})}/c - \gamma p^{(\text{cm})} \cos \theta}{\sqrt{\beta^2 \gamma^2 p^{(\text{cm})2} \cos^2 \theta - (2\beta\gamma^2 p^{(\text{cm})} E_2^{(\text{cm})}/c) \cos \theta + p^{(\text{cm})2} + (\beta\gamma E_2^{(\text{cm})}/c)^2}} \\ &= \frac{-d_2 \cos \theta + e_2}{\sqrt{a_2 \cos^2 \theta - b_2 \cos \theta + c_2}} \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\Phi_1 = \phi \quad (2.100)$$

$$\Phi_2 = \phi + \pi \quad (2.101)$$

ここで $i = 1, 2$ に対して

$$a_i = \beta^2 \gamma^2 p^{(\text{cm})2} \quad (2.102)$$

$$b_i = 2\beta\gamma^2 p^{(\text{cm})} E_i^{(\text{cm})}/c \quad (2.103)$$

$$c_i = p^{(\text{cm})2} + (\beta\gamma E_i^{(\text{cm})}/c)^2 \quad (2.104)$$

$$d_i = \gamma p^{(\text{cm})} \quad (2.105)$$

$$e_i = \beta\gamma E_i^{(\text{cm})}/c \quad (2.106)$$

最後に実験室系における立体角 $d\Omega^{(\text{lab})}$ と重心系における立体角 $d\Omega^{(\text{cm})}$ の関係について

$$\frac{d\Omega^{(\text{lab})}}{d\Omega^{(\text{cm})}} = \frac{\sin \Theta d\Theta d\Phi}{\sin \theta d\theta d\phi} = \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \theta)} \quad (2.107)$$

同様に

$$\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}} = \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \Theta)} \quad (2.108)$$

であり, それぞれ

$$\frac{d(\cos \Theta_1)}{d(\cos \theta)} = \frac{(b_1 d_1/2 - a_1 e_1) \cos \theta + c_1 d_1 - b_1 e_1/2}{(a_1 \cos^2 \theta + b_1 \cos \theta + c_1)^{3/2}} \quad (2.109)$$

$$\frac{d(\cos \Theta_2)}{d(\cos \theta)} = \frac{(b_2 d_2/2 - a_2 e_2) \cos \theta - c_2 d_2 + b_2 e_2/2}{(a_2 \cos^2 \theta - b_2 \cos \theta + c_2)^{3/2}} \quad (2.110)$$

$$A_1 = a_1 \cos^2 \Theta_1 - d_1^2 \leq 0 \quad (2.111)$$

$$B_1 = b_1 \cos^2 \Theta_1 - 2d_1 e_1 \leq 0 \quad (2.112)$$

$$C_1 = c_1 \cos^2 \Theta_1 - e_1^2 \quad (2.113)$$

$$A_2 = a_2 \cos^2 \Theta_2 - d_2^2 \leq 0 \quad (2.114)$$

$$B_2 = -b_2 \cos^2 \Theta_2 + 2d_2 e_2 \geq 0 \quad (2.115)$$

$$C_2 = c_2 \cos^2 \Theta_2 - e_2^2 \quad (2.116)$$

$$A_1 \cos^2 \theta + B_1 \cos \theta + C_1 = 0 \quad (2.117)$$

$$A_2 \cos^2 \theta + B_2 \cos \theta + C_2 = 0 \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} \\ &= \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4A_2 C_2}}{2A_2} \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \Theta_1)} &= -\frac{2a_1 \cos \Theta_1 (-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1})}{2A_1^2} + \frac{-b_1 \cos \Theta_1 - \frac{b_1 B_1 - 2c_1 A_1 - 2a_1 C_1}{\sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}} \cos \Theta_1}{A_1} \\ &= \frac{a_1 (B_1^2 - 2A_1 C_1) - (b_1 B_1 - 2c_1 A_1) A_1 + (a_1 B_1 - b_1 A_1) \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{A_1^2 \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}} \cos \Theta_1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \Theta_2)} = \frac{-a_2 (B_2^2 - 2A_2 C_2) - (b_2 B_2 + 2c_2 A_2) A_2 + (a_2 B_2 + b_2 A_2) \sqrt{B_2^2 - 4A_2 C_2}}{A_2^2 \sqrt{B_2^2 - 4A_2 C_2}} \cos \Theta_2 \quad (2.121)$$

重心系での微分断面積と実験室系での微分断面積は以下の関係になる.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} \frac{d\Omega^{(\text{lab})}}{d\Omega^{(\text{cm})}} \quad (2.122)$$

3 前実験

3.1 概要

第4節で述べる本実験に際して, 我々は用いる炭素薄膜の厚さを知ることが必要である.

通常、我々が物の長さを測るには定規やノギスを用いて直接長さを測定する。しかし、炭素薄膜の厚さは大変薄いため、上記の方法では十分な精度で測定を行うことができない。そこで、我々はアメリシウム (Am) の α 崩壊の際に放出される α 粒子の運動エネルギーの炭素薄膜を通過する前後での減衰量を計測し、得られた値を Bethe-Bloch の式に代入することによって炭素薄膜の厚さを算出した。

3.2 目的

散乱実験（本実験）の結果を解析するために、実験で用いる炭素薄膜の厚さを測定し、炭素薄膜の膜面密度を計算する。

3.3 実験装置

以下のような装置を実験の際に用いた。

- module
 - pulser (ORTEC 480) : 一定の周期, 振幅の信号を発生させる
 - detector bias supply (ORTEC 428) : 半導体検出器に電圧をかける
 - preamplifier (ORTEC 142) : 検出器からの信号を増幅する
 - amplifier (TENNELEC TC245) : 信号を増幅する
 - delay amplifier (ORTEC 427A) : 信号を時間的に遅らせる
 - timing SCA (ORTEC 551) : ある範囲の振幅の信号のみを通過させる
 - linear gate stretcher (ORTEC 542) : gate 信号が入っている時間のみ input 信号を通過させる
 - universal coincidence (ORTEC 418A) : and 回路を作る
 - 8ch visual scaler (N-OR 425) : 入力された論理信号の数をカウントし, 表示する
 - level adapter : nim 信号から ttl 信号に, もしくは ttl 信号から nim 信号に変換する
 - logic fan-in/fan-out (LeCroy 429A) : 信号を 2 つ以上に分ける
 - quad gate/delay generator (Phillips Scientific 794) : 一定の周期の論理信号を発生させる
- 測定器等
 - multichannel analyzer(MCA) (PGT 8000) : 検出器からの信号を元に, ヒストグラムを作る
 - detector (半導体検出器) : 入ってきた粒子のエネルギーを信号に変える
 - oscilloscope (テクトロニクス社 TDS3012) : 信号の波形を可視化する

3.4 実験方法

図 3 は前実験で使用した回路の模式図である。

炭素薄膜は、本課題演習のために用意されているもの (^{12}C は No.3 及び 4, ^{13}C は No.1 及び 6) を使用した。ただし、薄膜を保存していたケースの記述に誤りがあり、 ^{13}C の No.1 は、実際には ^{12}C であった。vacuum chamber 内に放射線源の ^{241}Am 、炭素薄膜、及び半導体検出器をこの順に並べ、 ^{241}Am から放出される α 線を、薄膜を通して検出器で測定した。

以下、回路の説明をする。bias supply によって 100 V 電圧を印加した。まず、vacuum chamber で検出器から得られる信号を preamplifier を通して amplifier に送って増幅し、unipolar 信号と bipolar 信号の 2 つ

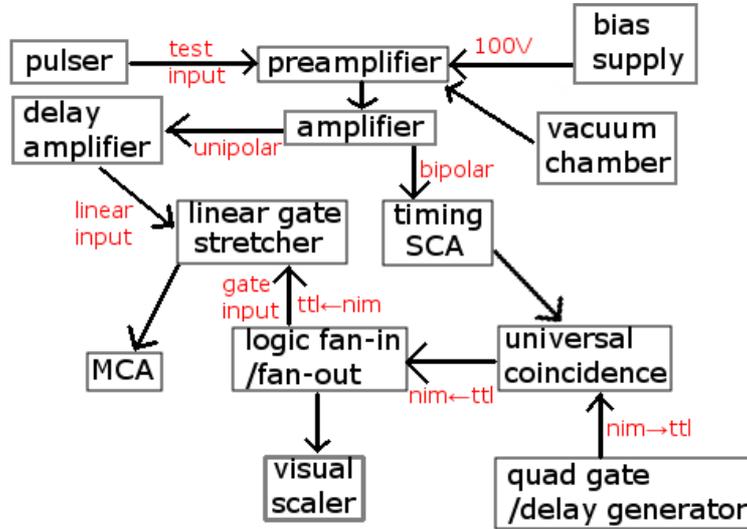


図3 回路図 (炭素膜厚測定)

に分けた。また同時に pulser からの信号を test input として preamplifier に送った。unipolar 信号は delay amplifier を通した後に linear input として linear gate stretcher へ送った。bipolar 信号は timing SCA を通して visual scaler と universal coincidence へ送った。quad gate/delay generator から信号を出し、level adapter を通して nim 信号から ttl 信号に変換し、universal coincidence に送った。それによって gate 信号を作り、level adapter を通して gate input として linear gate stretcher に送ることによって、gate が開いているときに来た信号のみを取り出した。また、gate 信号は logic fan-in/fan-out で 2 つに分け、片方を visual scaler に送って入ってきた論理信号の数を表示させた。

最終的に、その信号を multichannel analyzer (MCA) に送ることで、検出器に到達した α 線のエネルギースペクトルを得た。

得られたスペクトルは Quantum Gold を使って保存し、root^[2] 形式に変換した。

3.5 測定原理

3.5.1 膜厚と膜面密度

ターゲットの膜面密度は以下の式 (3.1) で計算される。

$$N_{\text{target}} = \rho \delta x \frac{N_A}{A} \quad (3.1)$$

ここで ρ , δx , A はそれぞれターゲットの密度、厚さ、原子量である。すなわち膜面密度を計算するには、ターゲットの密度と厚さが必要であるが、それには以下の式 (3.2) で表される Bethe-Bloch の式を用いる。これは、電子より十分質量の大きな粒子が物質中を運動するときの、エネルギーの減衰を表す式である。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A m_e r_e^2 c^2 \rho \frac{Zz^2}{A\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\text{max}}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (3.2)$$

式 (3.2) の左辺は粒子の移動距離に対するエネルギーの減衰率である。右辺に関する説明は次の 3.5.2 節で行うが、今は右辺の量は計算されたものとして話を進める。

このとき、ターゲットの厚さが十分小さければ、入射粒子のターゲット前後でのエネルギー変化量を $-\delta E$ とすると

$$\rho \delta x = \frac{\delta E}{2\pi N_A m_e r_e^2 c^2 \frac{Zz^2}{A\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right]} \quad (3.3)$$

である。従って、エネルギー減少量 δE を測定すればターゲットの密度と厚さ（の積）を計算できる。

3.5.2 Bethe-Bloch の式

ここでは 3.5.1 節の式 (3.2) について説明する。式の導出は本稿の付録にて行う。 N_A , m_e , r_e , c は本稿最初の表に示した物理定数であり、以下ではその他の物理量について説明する。また入射粒子は α 粒子とする。

Z と A 及び z はターゲットの原子番号と原子量及び電気素量 e を単位とした入射粒子の持つ電荷である。 ^{12}C と ^{13}C では Z は共に 6, また α 粒子の場合 $z = 2$ となる。

v , β , γ は入射粒子の速度, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ である。計算は α 粒子の運動エネルギー E_α 及び質量 M_α を用いて

$$\gamma = 1 + \frac{E_\alpha}{M_\alpha c^2} \quad (3.4)$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (3.5)$$

$$v^2 = \beta^2 c^2 \quad (3.6)$$

W_{\max} は 1 回の衝突における最大のエネルギー輸送である。正面衝突の場合に最大のエネルギー輸送が生じることから

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\frac{m_e}{M_\alpha} \sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2} + \left(\frac{m_e}{M_\alpha}\right)^2} \quad (3.7)$$

I は平均励起ポテンシャルと呼ばれ、Bethe-Bloch の式の中でも特に大きな意味を持つ変数である。大まかには Planck 定数に Bohr の公式から導かれる平均軌道周波数 $\bar{\nu}$ をかけた $h\bar{\nu}$ で与えられるが、実際は理論から計算して求めるのが困難であり、ここでは実験から演繹的に求められた経験則である式 (3.8) を用いる。

$$I = \begin{cases} Z \left(12 + \frac{7}{Z}\right) [\text{eV}] & (Z < 13) \\ Z \left(9.76 + 58.8Z^{-1.19}\right) [\text{eV}] & (Z \geq 13) \end{cases} \quad (3.8)$$

今回は $Z = 6$ なので式 (3.8) の上側の式を適用する。

3.5.3 Am の α 崩壊とエネルギーの測定

炭素薄膜に α 粒子を入射するために、Am の α 崩壊を利用する。ここでは Am の α 崩壊について簡単に説明し、薄膜透過前後での α 粒子の運動エネルギーの変化量の測定原理について述べる。

一般に、2 つの異なる原子核 ${}_{Z+2}^{A+4}\text{X}$ と ${}_Z^A\text{Y}$ が存在し、これら 2 つの質量 $M_{{}_{Z+2}^{A+4}\text{X}}$, $M_{{}_Z^A\text{Y}}$ 及び α 粒子の質量 M_α との間に

$$M_{{}_{Z+2}^{A+4}\text{X}} > M_{{}_Z^A\text{Y}} + M_\alpha \quad (3.9)$$

が成り立つとき、原子核 ${}_{Z+2}^{A+4}\text{X}$ は α 粒子を放出して崩壊して原子核 ${}_Z^A\text{Y}$ になる。



また、 α 崩壊によって飛び出した α 粒子は元の原子核 ${}_{Z+2}^{A+4}X$ と新たに生成する原子核 ${}_{Z}^{A}Y$ のエネルギーの差に対応する運動エネルギーを持つ。 ${}_{Z}^{A}Y$ の励起状態は離散的なエネルギー状態を持つことから、 α 粒子の持つ運動エネルギーも離散的なスペクトルを持ち、またその値は原子核の種類によって決まっている。

今回、用いる ${}_{95}^{241}\text{Am}$ は α 崩壊により ${}_{93}^{237}\text{Np}$ になる。



一般に α 崩壊の過程には様々なエネルギースペクトルを持つが、 ${}_{95}^{241}\text{Am}$ には代表的な崩壊過程が 2 つ存在する。そのときに放射される α 粒子のエネルギーのうち、大きなエネルギーを $E_{1\alpha}$ 、小さなエネルギーを $E_{2\alpha}$ とする。

次にエネルギーの測定について述べる。エネルギーの測定には検出器と MCA を用いる。MCA はあるエネルギーを持った α 粒子が検出されたときに、そのエネルギーに対応するチャンネルに粒子数をカウントする。しかし、単位エネルギーに対応するチャンネル数が不明であり、またエネルギーの原点が 0 チャンネルとも限らない。よって、まずはこれらを決定する必要がある。

Am 放射線源と半導体検出器の間に放射線の遮蔽物がない場合、MCA は上で述べた $E_{1\alpha}$ 及び $E_{2\alpha}$ に対応するチャンネルに粒子数をカウントする。それらのチャンネル数をそれぞれ Peak1_{ch} 、 Peak2_{ch} とすると、単位エネルギーに相当するチャンネル数は

$$\frac{\text{Peak1}_{\text{ch}} - \text{Peak2}_{\text{ch}}}{E_{1\alpha} - E_{2\alpha}} \quad (3.12)$$

で与えられる。エネルギー原点のチャンネル数を求めるには小さなエネルギーに対応するチャンネル数 Peak2_{ch} から $E_{2\alpha}$ に相当するチャンネル数を引けば良い。

$$O_{\text{ch}} = \text{Peak2}_{\text{ch}} - E_{2\alpha} \frac{\text{Peak1}_{\text{ch}} - \text{Peak2}_{\text{ch}}}{E_{1\alpha} - E_{2\alpha}} \quad (3.13)$$

続いて、Am 放射線源と半導体検出器の間に炭素薄膜がある場合、 α 粒子の運動エネルギーは Bethe-Bloch の式に従って減衰する。エネルギー $E_{1\alpha}$ を持った α 粒子が薄膜を透過することでエネルギーが $E'_{1\alpha}$ に変化し、このとき MCA で検出されるチャンネル数を $\text{Peak1}'_{\text{ch}}$ とすると、エネルギーの減少量は

$$\begin{aligned} \delta E &= E_{1\alpha} - E'_{1\alpha} \\ &= E_{1\alpha} \frac{\text{Peak1}_{\text{ch}} - \text{Peak1}'_{\text{ch}}}{\text{Peak1}_{\text{ch}} - O_{\text{ch}}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

で与えられる。

3.6 結果

3.6.1 原点の決定

α 粒子の運動エネルギーはある決まった値を持つことから、同じ種類の崩壊過程で放出された α 粒子は MCA で同じチャンネルに検出されるのが理想的である。しかし、実験においては以下の図 4 のようにエネルギースペクトルは複数のチャンネルにまたがっている。そこで、適当な範囲で ROOT の組み込み関数の Gaussian fit を行い、その平均値を Peak1_{ch} 、 Peak2_{ch} とした。

また、 ${}_{95}^{241}\text{Am}$ の崩壊における α 粒子の運動エネルギー $E_{1\alpha}$ 、 $E_{2\alpha}$ の文献値^[3] は表 1 の通りである。

γ 、 I 、 W_{max} の値は表 2 のように計算される。

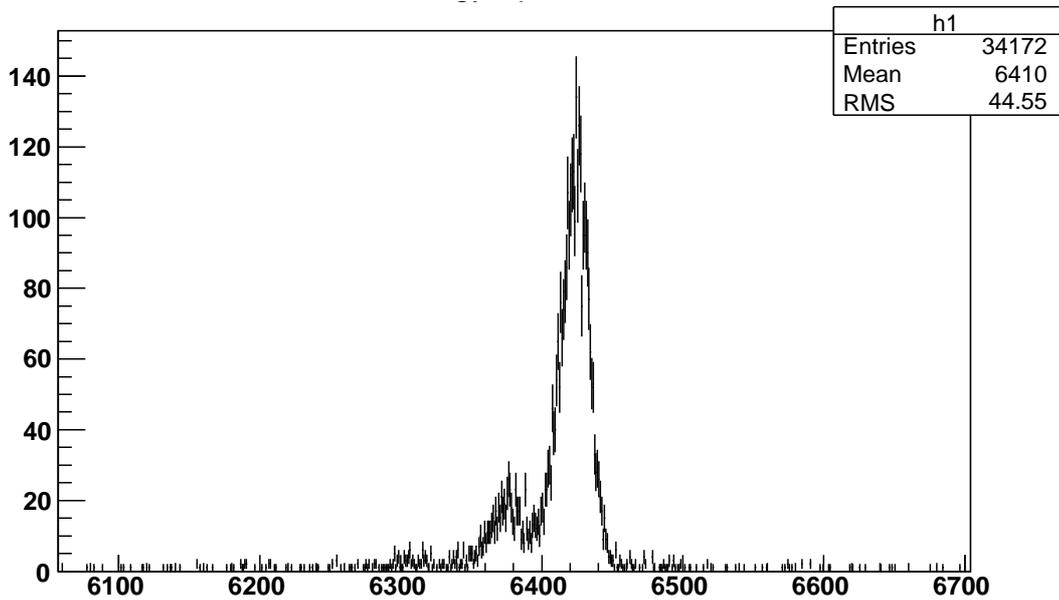


図4 α 粒子のスペクトル

表1 $E_{1\alpha}$, $E_{2\alpha}$ の文献値

	エネルギー [MeV]
$E_{1\alpha}$	5.48556
$E_{2\alpha}$	5.44280

表2 γ , I , W_{\max}

γ	1.0015
$I[\text{J}]$	1.2657×10^{-17}
$W_{\max}[\text{J}]$	4.8220×10^{-16}

測定は9回行い、それぞれの場合で式(3.13)から原点のチャンネルを求め、9回の平均をエネルギーの原点とした。結果を表3に示す。

$\Delta\bullet$ は \bullet に関する誤差を表す。チャンネル数に関する誤差は組み込み関数によって得られる。他の誤差に関する議論は5.2節でまとめて行う。

3.6.2 膜厚及び膜面密度の測定

Am放射線源と半導体検出器の間にそれぞれの炭素薄膜を入れた場合の $\text{Peak1}'_{\text{ch}}$ を上と同様の方法で求め、式(3.14)、式(3.3)及び式(3.1)を用いて、 δE , $\rho\delta x$, N_{target} を計算した。この結果を表4に示す。

表4に示した物理量に関する誤差を表5に示す。

表3 α 粒子の2つのエネルギーピークと原点

	Peak1 _{ch}	Δ Peak1 _{ch}	Peak2 _{ch}	Δ Peak2 _{ch}	O_{ch}	ΔO_{ch}
Data1	6400.5	0.21	6354.3	0.62	477.9	84.0
Data2	6399.2	0.32	6351.8	0.78	321.7	108.3
Data3	6394.7	0.26	6348.7	0.98	494.7	129.4
Data4	6392.6	0.28	6344.8	0.63	262.4	88.3
Data5	6392.1	0.26	6347.0	1.22	612.8	160.4
Data6	6390.7	0.24	6343.3	0.63	304.9	85.8
Data7	6389.8	0.28	6342.9	0.64	380.9	89.5
Data8	6387.6	0.42	6337.3	0.95	-53.8	133.1
Data9	6396.3	0.22	6349.5	0.74	400.7	98.4
平均	6393.7	0.28	6346.6	0.80	355.8	108.6

表4 α 粒子の Peak1'_{ch} と δE , $\rho\delta x$, N_{target}

	Peak1' _{ch}	δE [10^{-15} J]	$\rho\delta x$ [kg/m ²]	N_{target} [10^{22} /m ²]
¹² C : No.3	6348.0	6.66	0.547	2.74
¹² C : No.4	6349.0	6.51	0.535	2.68
¹² C : No.1	6348.6	6.57	0.540	2.70
¹³ C : No.6	6354.7	5.68	0.505	2.34

表5 α 粒子の Peak1'_{ch} と δE , $\rho\delta x$, N_{target} の誤差

	Δ Peak1' _{ch}	$\frac{\Delta\text{Peak1}'_{ch}}{\text{Peak1}'_{ch}}$	$\Delta\delta E$ [10^{-15} J]	$\frac{\Delta\delta E}{\delta E}$
¹² C : No.3	0.41	6.5×10^{-5}	0.14	2.1×10^{-2}
¹² C : No.4	0.39	6.1×10^{-5}	0.14	2.1×10^{-2}
¹² C : No.1	0.34	5.3×10^{-5}	0.13	2.0×10^{-2}
¹³ C : No.6	0.28	4.4×10^{-5}	0.12	2.1×10^{-2}
	$\Delta(\rho\delta x)$ [kg/m ²]	$\frac{\Delta(\rho\delta x)}{\rho\delta x}$	ΔN_{target} [10^{22} /m ²]	$\frac{\Delta N_{\text{target}}}{N_{\text{target}}}$
¹² C : No.3	0.011	2.1×10^{-2}	0.058	2.1×10^{-2}
¹² C : No.4	0.011	2.1×10^{-2}	0.056	2.1×10^{-2}
¹² C : No.1	0.011	2.0×10^{-2}	0.055	2.0×10^{-2}
¹³ C : No.6	0.010	2.1×10^{-2}	0.048	2.1×10^{-2}

4 本実験

4.1 概要

京都大学宇治キャンパスにあるマイクロイオンビーム解析実験装置を使って実験を行った。入射エネルギー 7.5 MeV の C^{3+} ビームを C 薄膜に照射して散乱を起こし、散乱粒子の角度分布を測定した。

当初の予定では、入射ビームとして $^{12}C^{3+}$ を用い、標的として ^{12}C 及び ^{13}C 薄膜を用いることで、 $^{12}C-^{12}C$ 散乱及び $^{12}C-^{13}C$ 散乱を観測した後、入射ビームを $^{13}C^{3+}$ に取り替えて $^{13}C-^{12}C$ 散乱及び $^{13}C-^{13}C$ 散乱を観測するつもりであった。しかし、3.4 節でも述べた通り、 ^{13}C 薄膜だと思っていたもののうち 1 つが実は ^{12}C 薄膜であることが実験途中で判明した。そのため、 $^{12}C^{3+}$ ビームを ^{13}C 薄膜に照射したデータを取ることができず、代わりに $^{12}C^{3+}$ ビームを ^{12}C 薄膜に照射したデータを 2 つ得た。

4.2 目的

散乱粒子の角度分布の測定結果から、微分断面積を求める。 $^{12}C-^{12}C$ 散乱及び $^{13}C-^{13}C$ 散乱の微分断面積を理論曲線と比較し、 ^{12}C 及び ^{13}C のスピンを同定する。また、 $^{12}C-^{13}C$ 散乱を測定し、同種粒子の散乱と異種粒子の散乱を比較する。

4.3 実験装置

以下のような装置を実験の際に用いた。使用した module は前実験のときとほとんど同じである。current digitizer は現地のものを借りて使用した。module 及び測定器等については、3.3 節で説明していないもののみ記す。

- タンデム型静電加速器
 - 加速電圧 2.0 MV
 - 電圧安定度 <1.0 kV
 - 電圧リップル <200 Vrms
 - 最大電流値 300 μ A
 - 絶縁ガス SF_6
 - 真空系 < 5×10^{-6} Pa
 - イオン源 RF 荷電変換型 Cs スパッタ型
 - エネルギー 8.0 MeV (3 価イオン)
 - 分析振分電磁石 $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ$
 - ビーム直径 < 20 μ m
 - 分析手段 RBS, ERD, チャネリング, NRA, PIXE
 - ターゲット駆動 5 軸ゴニオメータ
- module
 - current digitizer (ORTEC) : 電流を論理信号に変換する
- 測定器等
 - Faraday cup : 入射した総電荷の大きさを測定する

4.4 測定原理

微分断面積の定義式 (2.16) より，実験で微分断面積を求めるにはある微小立体角の大きさと微小立体角中に散乱される粒子数，及び入射粒子数を測定する必要がある．ここでは実験で測定可能な量と微分断面積を求めるために必要な物理量の対応について述べる．

4.4.1 微小立体角

この実験では微小立体角として検出器の検出口が占める立体角を測定しなければならない．半径 r の球面で面積が A である図形の立体角は $\frac{A}{r^2}$ で与えられるが， $A \ll r^2$ であれば，球面上の面積を球面に接する平面上の面積で近似できる．検出口は長方形なので，ターゲットと検出器の距離を L ，検出口の長辺と短辺をそれぞれ h , w とすると，検出口の立体角は

$$\delta\Omega = \frac{hw}{L^2} \quad (4.1)$$

4.4.2 入射粒子数

Faraday cup を用いると，ある時間に溜まった総電荷 Q を測定することができる．入射粒子が全て 3 価の陽イオンとすると，入射粒子数は

$$N_{\text{beam}} = \frac{Q}{3e} \quad (4.2)$$

となる．ここで e は電気素量である．

4.4.3 散乱粒子数

微小立体角 $\delta\Omega$ 中に散乱された粒子数は検出器を通して様々なエネルギーを持つ粒子のヒストグラムとして得られる．ただし，ここで得られるヒストグラムには散乱に関係しないノイズも含まれている．このヒストグラムから散乱粒子数を求める方法については 5.1 節で述べる．

4.5 実験方法

4.5.1 回路

本実験で使用した回路は，炭素膜厚測定のとくと大部分は同じである．

以下，基本的には膜厚測定のとくと異なる部分について説明する．膜厚測定の際に vacuum chamber 内の検出器から得ていた信号が，加速器を用いた本実験では analysis chamber 内の検出器からの信号に置き換わっている．また，slit 及び Faraday cup に到達した電流を current digitizer を通し，ttl 信号から nim 信号に変換後，visual scaler に送った．また膜厚測定のとくと同様に，検出器からの信号は最終的に MCA に送り，散乱粒子のエネルギースペクトルを測定した．

4.5.2 analysis chamber 内のセットアップ

analysis chamber の内部は図 6 のようになっている．

7.5 MeV のエネルギーを持った C^{3+} ビームをイオン加速器によって生成し，slit を通した後 analysis chamber に入射させた．analysis chamber 内にはターゲット及び検出器を設置した．2 種類の薄膜 (^{12}C 及

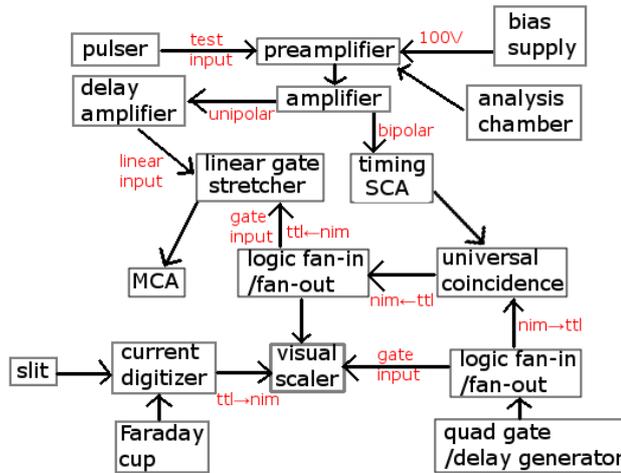


図 5 回路図 (本実験)

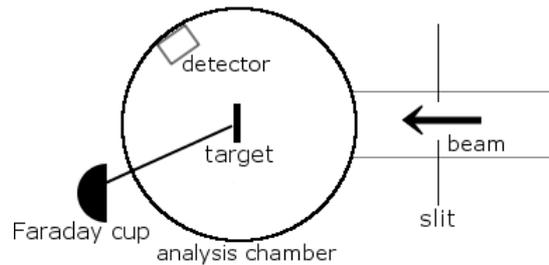


図 6 analysis chamber

び ^{13}C) は両方とも analysis chamber 内に入れておき、コンピュータ操作によってどちらをターゲットとするか選択した。検出器は膜厚測定に用いたものを使用した。

4.5.3 微小立体角の測定

図 6 における検出器-ターゲット間の距離 L 、及び検出器の検出口の長辺 h と短辺 w を計測した。計測は施設のノギスと定規を用いて行った。

4.5.4 入射粒子数の測定

Faraday cup を炭素薄膜に接続し、薄膜を通過してくる入射ビームの総電荷を計測した。visual scaler の表示について、Faraday cup に蓄積された総電荷 10^{-10} C に対してカウントが 1 増えるように設定した。

4.5.5 散乱粒子数の測定

◇ $^{12}\text{C}^{3+}$ ビーム

4.1 節でも述べたように、結果的にターゲットとして 2 種類の ^{12}C (No.3 と No.1) 薄膜に対する散乱を測定した。検出器の角度を変えながら散乱粒子のエネルギースペクトルを測定した。検出器の角度は、 -10° 、及び 10° から 60° まで 2° 刻みに変化させて測定した。1 つの角度に対し、2 種類のターゲットそれぞれについ

てスペクトルを得た。スペクトルは Quantum Gold で記録し、また同時に visual scaler に表示させた 3 種類の値（ノイズ及び pulser からの信号に対応する数，slit に到達した粒子数に対応する数，Faraday cup に到達した粒子数に対応する数）を記録した。これらをそれぞれ scaler1,2,3 とする。

◇ $^{13}\text{C}^{3+}$ ビーム

$^{12}\text{C}^{3+}$ ビームのときとは異なり，ターゲットは $^{12}\text{C}:\text{No.3}$ 及び $^{13}\text{C}:\text{No.6}$ の 2 種類を用いた。検出器の角度の換え方や得られたデータの記録方法は $^{12}\text{C}^{3+}$ ビームのときと同様である。

5 結果

5.1 本実験におけるデータ処理

検出器-ターゲット間距離 L 及び検出口の長辺 h ，短辺 w の大きさは表 6 の通り。

表 6 検出器に関する各距離の値

測定対象	距離 [mm]
検出器-ターゲット間距離 L	67.65
検出口の長辺 h	7.25
検出口の短辺 w	0.75

散乱領域の大きさ $\delta\Omega$ は式 (4.1) より，表 6 の値を用いて

$$\delta\Omega = \frac{hw}{L^2} = 1.19 \times 10^{-3}[\text{str}] \quad (5.1)$$

と計算できる。

Faraday cup で検出された総電荷は実験時に visual scaler の scaler3 で示す値として得られたが，それを current と書く。4.5.4 節で述べた通り，visual scaler の 1 カウントが 10^{-10}C に対応するので $Q = \text{current} \times 10^{-10}[\text{C}]$ になる。従って，式 (4.2) より，ターゲットへと入射してきた粒子数は

$$N_{\text{beam}} = \frac{\text{current} \times 10^{-10}}{3e} \quad (5.2)$$

となる。

次に，実験により得たデータに対して，データ解析用ソフトウェアである ROOT を用いて解析を行い，散乱された粒子数を求める。この解析の手順は以下の通りである。

1. 弾性散乱された粒子に関する角度についてのヒストグラムに対して，その下限がピーク値の $\frac{1}{30}$ になる範囲で ROOT の組み込み関数を用いて Gaussian fit を行う。
2. Gaussian fit 時に得た標準偏差から，その 3 倍の範囲に入った粒子数を弾性散乱粒子数とし，それを N_{elastic} とする。

この解析の妥当性については 6.2.1 節において議論する。

さらに，先の式 (5.2) から求めた N_{beam} と実験データの解析より求めた弾性散乱粒子数 N_{elastic} ，及び前実

験で求めた膜面密度 N_{target} から、実験室系の微分断面積 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{lab})}$ は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{lab})} = \frac{N_{\text{elastic}}}{\delta\Omega N_{\text{beam}} N_{\text{target}}} \quad (5.3)$$

として求めることができる。

最後に式 (2.122) より重心系での微分断面積は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})} &= \frac{N_{\text{elastic}}}{\delta\Omega N_{\text{beam}} N_{\text{target}}} \frac{d\Omega^{(\text{lab})}}{d\Omega^{(\text{cm})}} \\ &= \frac{\frac{N_{\text{elastic}}}{\delta\Omega N_{\text{beam}} N_{\text{target}}}}{\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2 実験誤差

N 個の物理量 $x_i (i = 1, \dots, N)$ がそれぞれ独立な誤差 Δx_i を持つとき、関数 $f(x_i)$ の持つ誤差は誤差伝搬の式 [5] より

$$\Delta(f(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2} \quad (5.5)$$

である。この式から $\delta\Omega$, N_{beam} , N_{target} に関する誤差は

$$\Delta\delta\Omega = \delta\Omega \sqrt{\left(\frac{2\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2} \quad (5.6)$$

$$\Delta N_{\text{beam}} = N_{\text{beam}} \sqrt{\left(\frac{\Delta \text{current}}{\text{current}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta e}{e}\right)^2} \quad (5.7)$$

$$\Delta N_{\text{target}} = N_{\text{target}} \sqrt{\left(\frac{\Delta(\rho\delta x)}{\rho\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N_A}{N_A}\right)^2} \quad (5.8)$$

を用いて得られる。また scaler と距離測定については、目測可能な目盛りの最小の桁に対して ± 0.5 の誤差、物理定数については文献値の最小の桁に対して ± 0.5 の誤差がつくと考えた。尚、この方法で計算される ΔN_{beam} は e の相対誤差が current の相対誤差に比べて小さいので current の値によらずほぼ一定である。 N_{target} に関する誤差は 3.6.2 節の表 5 で示した通りであり、 $\delta\Omega$ と N_{beam} に関する誤差の値を表 7 にまとめる。 N_{beam} の相対誤差は後で個別に計算する。

表 7 $\delta\Omega$, N_{beam} の誤差

物理量	誤差	相対誤差
$\delta\Omega$	$8.0 \times 10^{-6} \text{ str}$	6.7×10^{-3}
N_{beam}	1.0×10^8	

最後に N_{elastic} に関する誤差は、ROOT による解析で組み込み関数により Gaussian fit を行った際に得られる。

各物理量 $\delta\Omega$, N_{beam} , N_{target} , N_{elastic} がそれぞれ互いに独立なので、それらの誤差を用いて誤差伝搬の式 (5.5) より、式 (5.3) 及び式 (5.4) を用いて計算した微分断面積の誤差は

$$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} \sqrt{\left(\frac{\Delta\delta\Omega}{\delta\Omega} \right)^2 + \left(\frac{\Delta N_{\text{beam}}}{N_{\text{beam}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta N_{\text{target}}}{N_{\text{target}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta N_{\text{elastic}}}{N_{\text{elastic}}} \right)^2} \quad (5.9)$$

$$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})} \sqrt{\left(\frac{\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \left(\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}} \right)}{\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}} \right)^2} \quad (5.10)$$

となる。

5.3 実験データと理論曲線を比較する際の一般的事項

6.1 節において示す通り、先の式 (5.3) 及び式 (5.4) より求めた角度対微分断面積により描かれる実験データと、2.2 節において議論した式 (2.66) の Rutherford の公式及び式 (2.75) の Mott の公式を用いて描いた理論曲線を比較するが、このとき定数倍補正と角度補正を行った。ここでは補正の方法についてのみを説明し、補正の原因については 6.2 節で議論する。

また、プログラムの都合で定数倍補正や角度補正の値は理論曲線を動かすパラメータとして求めるが、結果をグラフに示すときは実験データに補正を加えるので、その方法についても述べる。

実験データと理論曲線の比較は、理論曲線に補正を施し、ROOT の組み込み関数である χ^2 検定を行って最適なパラメータを決定した。このとき理論曲線に施す補正が Rutherford の公式と Mott の公式で異なるので、個別に述べる。以下 θ が重心系の角度、 Θ が実験室系における角度を表す。微分断面積の実験値は下に“exp”をつけて区別する。

誤差に関しては、 χ^2 検定を行う際に現れる誤差に対して、誤差伝搬の式 (5.5) を用いた。

5.3.1 Mott の公式の補正

Mott の公式は同種粒子の散乱で用い、これは重心系で比較する。しかし、補正に関しては式 (2.75) に対して

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})}(\theta) \xrightarrow[\Theta \rightarrow \Theta - \delta\Theta]{\lambda \text{倍}} \lambda \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})}(\theta(\Theta(\theta) - \delta\Theta)) \frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}(\Theta(\theta) - \delta\Theta) \frac{d\Omega^{(\text{lab})}}{d\Omega^{(\text{cm})}}(\theta) \quad (5.11)$$

の式を用いて、重心系のまま平行移動をするのではなく、一度重心系から実験室系に移行して平行移動した後、再び重心系に移行するというを行った。

また、実験データの補正は上で求めた λ と $\delta\Theta$ から

$$\theta(\Theta) \rightarrow \theta(\Theta - \delta\Theta) \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}^{(\text{cm})} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}^{(\text{cm})} \quad (5.13)$$

5.3.2 Rutherford の公式の補正

Rutherford の公式は異種粒子の散乱で用い、これは実験室系で比較する。ただし、検出される粒子が ^{12}C の場合と ^{13}C の場合があるため、理論曲線も ^{12}C と ^{13}C の両方を考慮した式でなければならないので、式

(2.66) に対して

$$\lambda \left[\left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})}(\theta(\Theta - \delta\Theta)) \frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}(\Theta - \delta\Theta) \right)_{^{12}\text{C}} + \left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{cm})}(\theta(\Theta - \delta\Theta)) \frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}(\Theta - \delta\Theta) \right)_{^{13}\text{C}} \right] \quad (5.14)$$

また、実験データの補正は上で求めた λ と $\delta\Theta$ から

$$\Theta \rightarrow \Theta - \delta\Theta \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}^{(\text{lab})} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}^{(\text{lab})} \quad (5.16)$$

5.4 実験データ

実験で得た visual scaler の値は本稿末尾の表 17 から表 19 に示す。また、5.1 節及び 5.2 節で述べた方法によって得た微分断面積の値とその誤差を表 20 から表 27 に示す。尚、 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱については 2 種類の実験データが存在するが、以下では No.3 の ^{12}C 薄膜をターゲットとしたデータを用いる。 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱では重心系に移行せず、実験室系でのデータを示している。

これらの結果から散乱角と微分断面積の関係は以下の図 7 から図 9 のようになる。

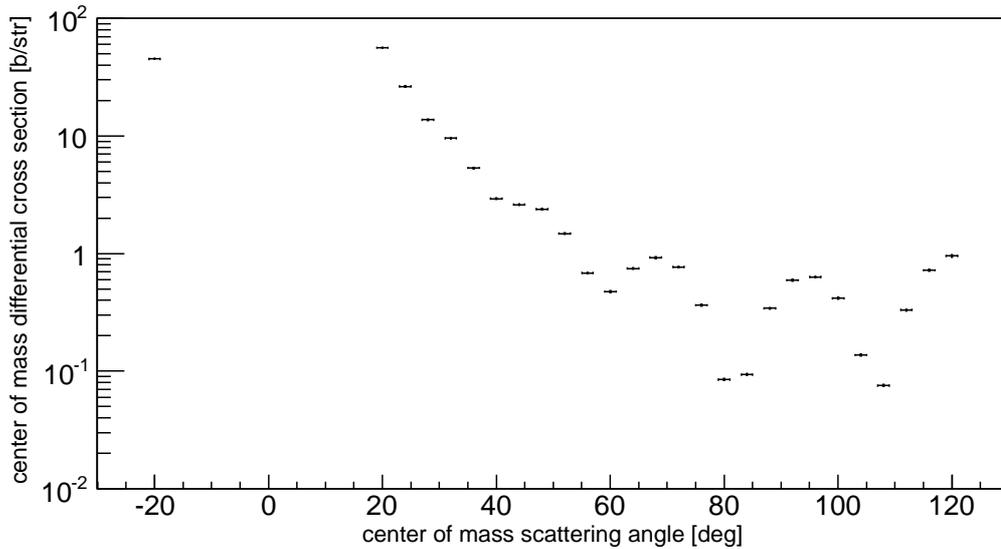


図 7 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の微分断面積

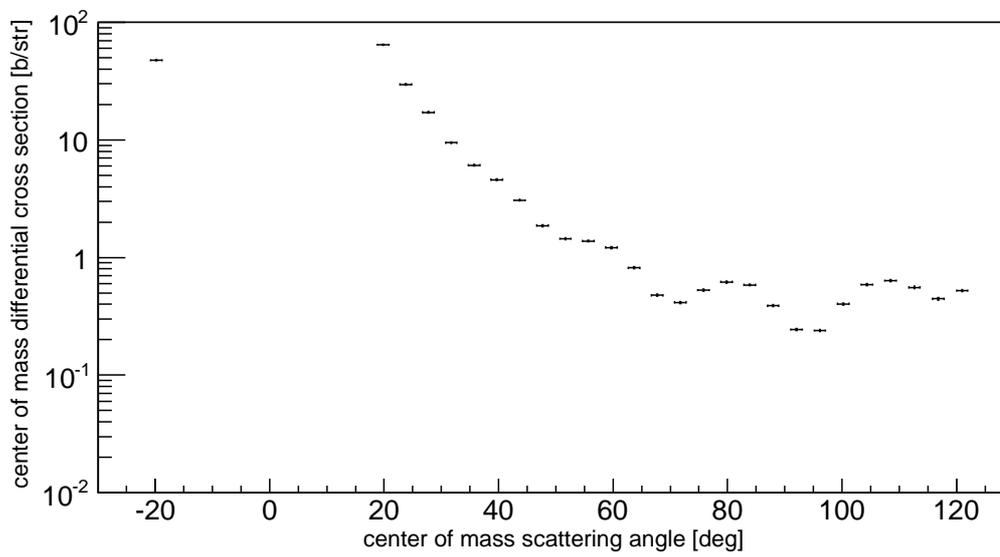


図 8 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積

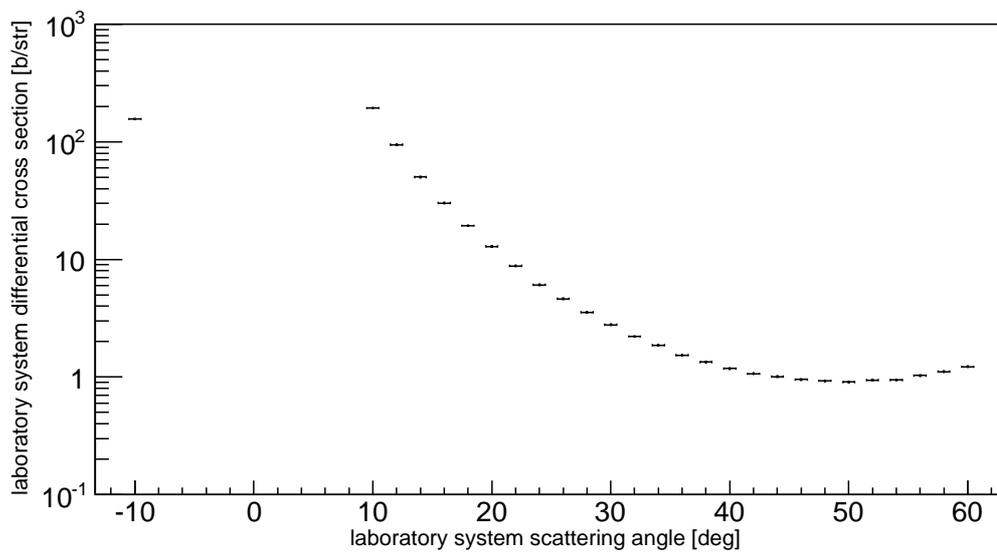


図 9 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積

6 考察

6.1 理論曲線との比較

計算に用いた ^{12}C 及び ^{13}C の質量は表 8 の通り [4].

表 8 炭素質量の文献値

	質量 [u]
^{12}C	12.0000000000
^{13}C	13.0033548378

その他, 計算に必要な物理量の値を表 9 に示す.

表 9 各散乱における物理量

入射エネルギー [MeV]	7.5		
入射エネルギー [J]	1.20×10^{-12}		
物理量 \diagdown 散乱	$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$	$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$	$^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$
	m_1 [kg]	1.99×10^{-26}	2.16×10^{-26}
m_2 [kg]	1.99×10^{-26}	2.16×10^{-26}	2.16×10^{-26}
$E_1^{(\text{lab})}$ [J]	1.79×10^{-9}	1.94×10^{-9}	1.79×10^{-9}
$E_2^{(\text{lab})}$ [J]	1.79×10^{-9}	1.94×10^{-9}	1.94×10^{-9}
$p^{(\text{lab})}$ [kg·m/s]	2.19×10^{-19}	2.28×10^{-19}	2.19×10^{-19}
β	1.83×10^{-2}	1.76×10^{-2}	1.76×10^{-2}
γ	1.00	1.00	1.00
$E_1^{(\text{cm})}$ [J]	1.79×10^{-9}	1.94×10^{-9}	1.79×10^{-9}
$E_2^{(\text{cm})}$ [J]	1.79×10^{-9}	1.94×10^{-9}	1.94×10^{-9}
E [J]	6.01×10^{-13}	6.01×10^{-13}	6.25×10^{-13}
$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ [kg]	9.96×10^{-27}	1.08×10^{-26}	1.04×10^{-26}
v [m/s]	1.10×10^7	1.05×10^7	1.10×10^7
η	7.17	7.47	7.17

6.1.1 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱

同種粒子の散乱なので理論曲線は Mott の公式を用いる。 ^{12}C 原子核はスピンの大きさが $\frac{1}{2}$ である核子 12 個の複合粒子なのでスピンの大きさとして $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の値が考えられる。 ^{12}C の持つスピンの大きさを同定する方法として、補正を加えた理論曲線と実験データで χ^2 検定を行い、その上で最も χ^2/n 値が小さい理論曲線を与える S を ^{12}C が持つスピンの大きさであるとする。ここで n は χ^2 検定における自由度の数である。以下の表 10 に $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の Mott の公式に対して最適な補正とそのときの χ^2/n 値を示す。

表 10 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の補正と χ^2/n 値

S	0	1	2	3	4	5	6
λ	0.3184	0.3315	0.2767	0.3347	0.2969	0.2599	0.2434
$\Delta\lambda$	0.0035	0.0027	0.0034	0.0039	0.0032	0.0024	0.0019
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	0.0110	0.0081	0.0124	0.0116	0.0107	0.0091	0.0079
$\delta\theta$ [rad]	0.0314	-0.0004	0.2915	0.0534	0.0548	0.0552	0.0542
$\Delta\delta\theta$ [rad]	0.0013	0.0004	0.0010	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004
$\left \frac{\Delta\delta\theta}{\delta\theta}\right $	0.0411	1.0899	0.0036	0.0032	0.0041	0.0057	0.0082
χ^2/n 値	1.2	79.3	81.1	209.8	256.5	294.2	313.0

これより、 ^{12}C のスピンの大きさは 0 とするのが適当である。

次に、上で計算した補正の値を逆に用いて実験データに補正を加え、 $S = 0$ の場合の Mott の公式と比較する。以下の図 10 において赤の実線で表されているものが理論曲線である。

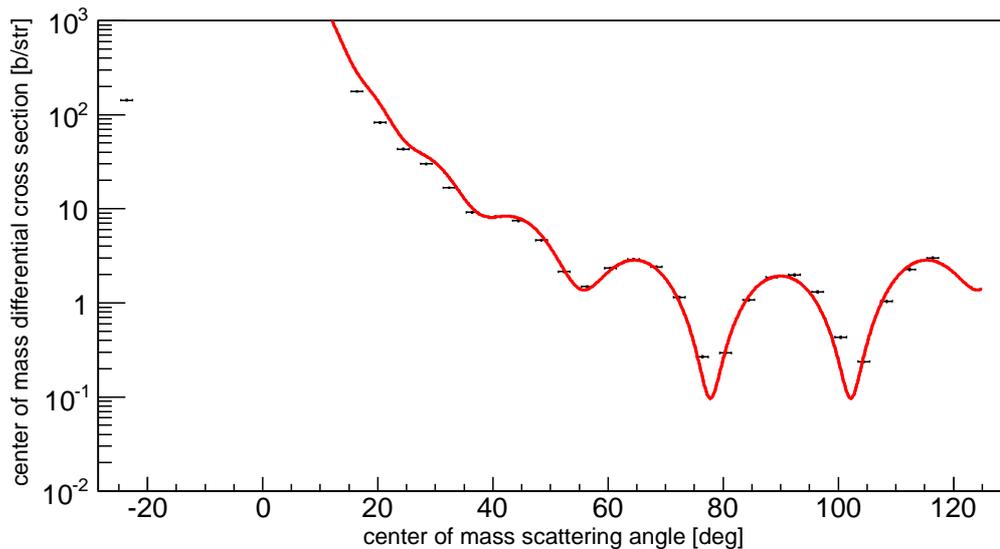


図 10 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の微分断面積と理論曲線

6.1.2 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱

$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱と同様に同種粒子の散乱なので Mott の公式を用いる。ただし、 ^{13}C 原子核はスピンの大きさが $\frac{1}{2}$ である核子 13 個の複合粒子なのでスピンの大きさとして $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ の値が考えられる。以下 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱と同様に χ^2 検定を行い、 ^{13}C の持つスピンの大きさを同定する。

表 11 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の補正と χ^2/n 値

S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$
λ	0.3827	0.3993	0.4031	0.3964	0.3882	0.4099	0.4108
$\Delta\lambda$	0.0038	0.0039	0.0035	0.0034	0.0033	0.0039	0.0040
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	0.0098	0.0098	0.0088	0.0086	0.0086	0.0095	0.0098
$\delta\theta$ [rad]	0.0283	0.0358	0.0351	0.0349	0.0348	-0.0002	-0.0015
$\Delta\delta\theta$ [rad]	0.0011	0.0012	0.0010	0.0010	0.0010	0.0012	0.0013
$\frac{\Delta\delta\theta}{\delta\theta}$	0.0390	0.0349	0.0298	0.0277	0.0285	5.2246	0.8538
χ^2/n 値	2.2	9.6	19.4	27.8	34.9	41.0	44.7

これより、 ^{13}C のスピンの大きさは $S = \frac{1}{2}$ とするのが適当である。

$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱と同様の補正を行った実験データとスピンの大きさが $S = \frac{1}{2}$ である場合の Mott の公式のグラフは以下の図 11 である。

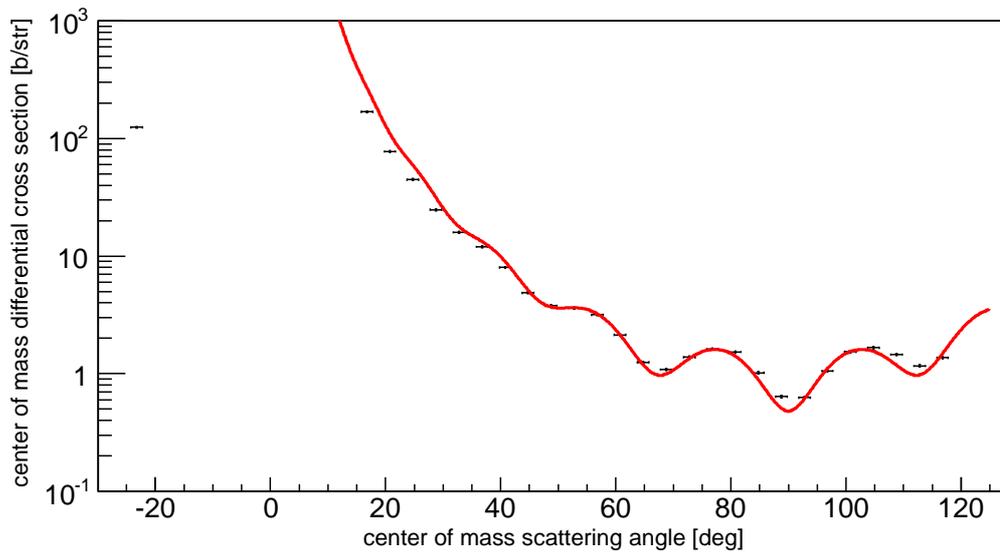


図 11 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積と理論曲線

6.1.3 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱

異種粒子の散乱なので Rutherford の公式を用いる。 χ^2/n 値を最も小さくする補正值と、補正を加えた実験データと理論曲線のグラフを以下の表 12 及び図 12 に示す。

表 12 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の χ^2/n 値

λ	0.3247
$\Delta\lambda$	0.0021
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	0.0065
$\delta\theta[\text{rad}]$	0.0252
$\Delta\delta\theta[\text{rad}]$	0.0025
$\frac{\Delta\delta\theta}{\delta\theta}$	0.0972
χ^2/n 値	1.8

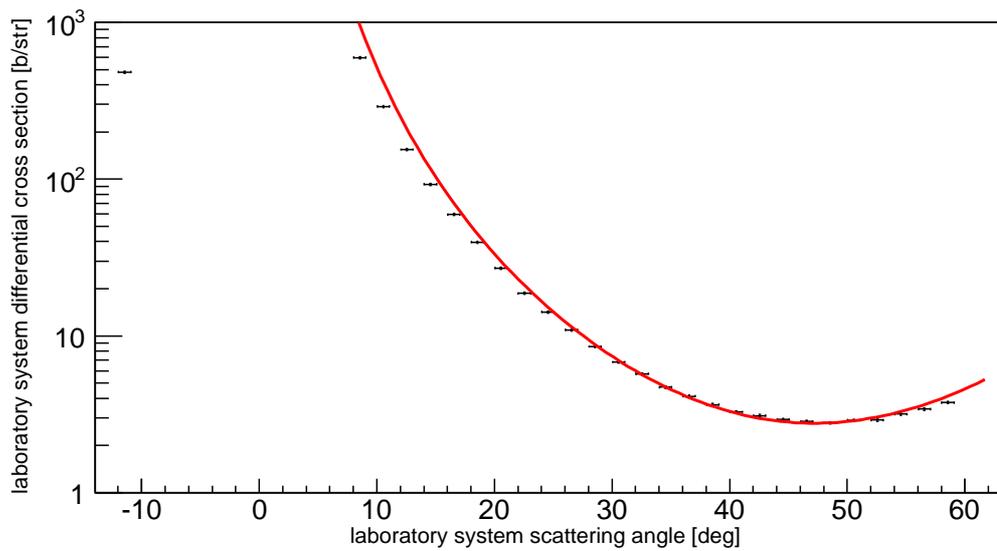


図 12 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積と理論曲線

また、全ての散乱に共通して、実験データに対する定数倍の補正 $\frac{1}{\lambda}$ が 3 倍程度であること、実験室系での角度補正が 0.03 rad 程度であることが言える。

6.2 定数倍補正及び角度補正

ここでは、実験データに対する補正と、実験室系での角度補正が必要である理由を考察する。このうち、実験室系での角度補正については器具の目盛りの不具合であると考えられるので、以下では定数倍補正のみについて考えることにする。

6.2.1 解析方法の妥当性

今回、弾性散乱された粒子に関するものと思われるヒストグラムに対して Gaussian fit を行い、そのとき得られた標準偏差と Gauss 中心値の値を利用して N_{elastic} を算定した。これはヒストグラムが Gaussian になっているという仮定の下では妥当な解析方法であるが、実際に Gaussian fit を行うと図 13 のようにヒストグラムのすその部分とピークの部分とで Gaussian と一致していないものが散見された。図 13 の青色で表示されたものが実際のヒストグラムで、赤色で表示されたものが Gaussian fit による曲線である。このとき散乱粒子数を十分に勘定しきれていない可能性がある。

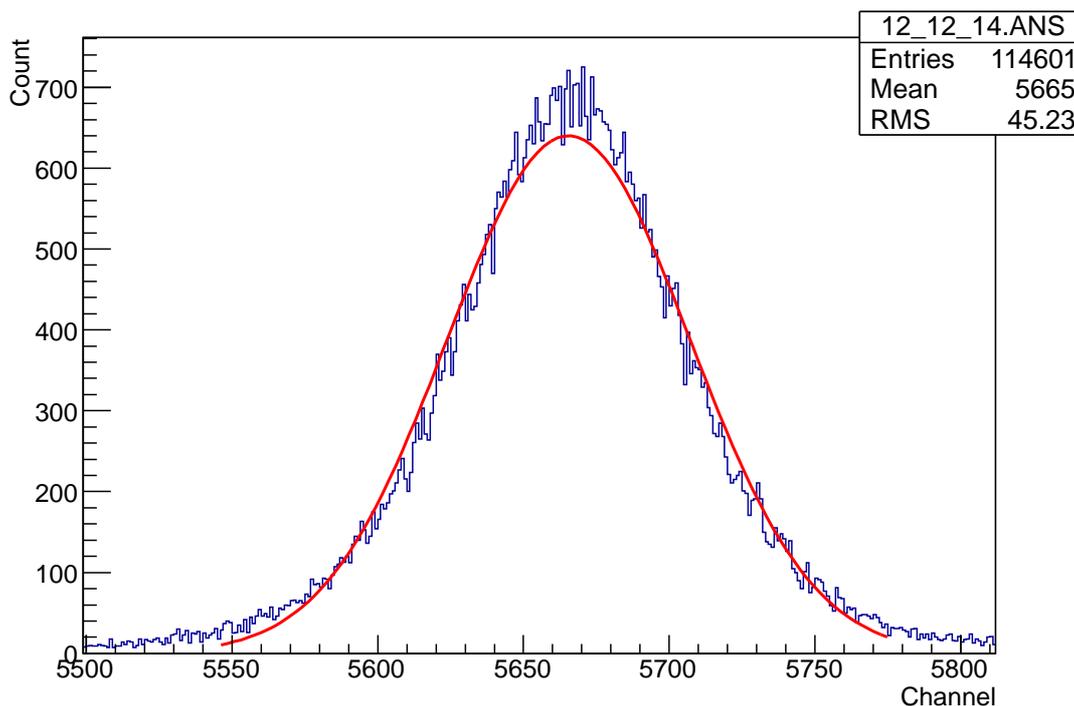


図 13 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の散乱角 14° でのヒストグラム

そこでヒストグラムが Gaussian でないと考えて解析を行ったとき、Gaussian と仮定したものに対してどれぐらい微分断面積が変化するかを見ることで、用いた解析の妥当性を調べた。今回妥当性の確認のために行った方法は以下の通りである。

1. 弾性散乱された粒子に関するヒストグラムについて、そのすそのが十分減衰するところまで範囲をとる。
2. その範囲に入っている粒子の総数を N'_{elastic} とし、Gaussian fit 時に得られた N_{elastic} との比をとる。この比を R_{elastic} とする。

$$R_{\text{elastic}} \equiv \frac{N'_{\text{elastic}}}{N_{\text{elastic}}} \quad (6.1)$$

N_{elastic} が微分断面積に線形に効くため、 R_{elastic} が解析方法を変更した際の微分断面積の倍率に相当することになる。これを各散乱過程において行い、それをまとめると表 13 のようになる。ただし、これは典型的

に Gaussian からヒストグラムがずれていると思われるものについて R_{elastic} を調べ、それを平均したものである。

表 13 各散乱過程における R_{elastic} の値

散乱過程	R_{elastic}
$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱	1.04
$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱	1.05
$^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱	1.05

表 13 より、 R_{elastic} は高々 1.05 倍程度になることが分かった。この補正は十分小さく、決定的なものではない。よって散乱粒子数に関するヒストグラムを Gaussian と仮定して解析を行っても支障はないことが分かる。以上より、 N_{elastic} を算出する際の解析方法に関して妥当性が言えた。

6.2.2 MCA に関する補正

我々が用いた MCA は散乱粒子を 1 つずつ解析するため、複数の粒子の情報がほとんど時間差なく MCA に入力された場合、MCA の解析が間に合わない場合がある。つまり、ある粒子を解析している最中の一定時間は MCA が停止してしまい、その時間に入射する粒子は MCA でカウントされない。その結果、検出された全粒子数 N_{elastic} には数え漏れが存在することが懸念される。しかし、MCA は停止していた時間を dead time として記録する機能がついているので、その機能を利用して MCA が停止していたことによりどれだけの数え漏れが存在したのか検討することができる。

まず MCA が停止していたとみなせる時間 dead time を t_{dead} 、MCA が動いていたとみなせる時間 live time を t_{live} とし、さらに全計測時間を $t_{\text{total}} (=t_{\text{dead}} + t_{\text{live}})$ とすると、より正確な散乱粒子数は

$$N_{\text{elastic}} \rightarrow N_{\text{elastic}} \frac{t_{\text{total}}}{t_{\text{live}}} \quad (6.2)$$

と推測できる。つまり $\frac{t_{\text{total}}}{t_{\text{live}}}$ は N_{elastic} に対する補正項である。例えば $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱を角度 10° で観測した場合の結果を見ると、 t_{total} が 132.0 秒、 t_{live} が 127.2 秒なので補正項は 1.04 程度となる。他の角度についても、この補正項がそれぞれのデータについてどのような値になるか見ると 1.00~1.04 程度でしかない。微分断面積は N_{elastic} に比例するので、この MCA に関する補正項は微分断面積に対して 1.00~1.04 倍程度であることが考えられる。

6.2.3 Faraday cup による粒子数の測定

今回の実験ではターゲットに到達する入射粒子は全て 3 価の陽イオンであり、それら全てが Faraday cup で検出されることを仮定した。しかし、この仮定が誤っている可能性があるため、別の方法で入射粒子数を計算する。

$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱において、あらかじめ slit に蓄積される電荷 Q_s と slit を透過する電荷 Q_F の比を計測しておいた。計測の方法は前に述べた方法と同じである。その結果は表 14 の通り。

実験では slit に蓄積される電荷は scaler2 に対応しており、これに上の比をかけることでターゲットに入射する粒子数を評価することができる。

本稿末の表 28 で示す通り、この方法で計算される粒子数は実験方法で説明した手順で測定した粒子数に対して平均して 0.63 倍程度であり、計算される微分断面積に 1.6 倍程度の補正が加わる。

表 14 slit に蓄積される電荷と透過する電荷

$Q_s [10^{-10} \text{ C}]$	2928
$Q_F [10^{-10} \text{ C}]$	36817
$\frac{Q_F}{Q_s}$	12.57

今回の実験では、slit に蓄積される電荷と透過する電荷の比を ^{12}C ビームを入射したときのみしか測定しなかったため、 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱及び $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱においては同様の検証を行うことができないが、これらの散乱についても同様の補正が加わることが予測される。

6.3 Mott の公式を用いる妥当性

2.2 節において、同種粒子の散乱における微分断面積を表す Mott の公式と Blair 模型について説明したが、6.1 節では理論曲線として Mott の公式を用いた。ここではその妥当性について検証する。

2.2.5 節で述べた通り、Blair 模型は粒子間に働く核力の効果を考慮したものである。しかし、一般に核力ポテンシャルは強力であるが有効距離 r_{nuc} は非常に小さく、粒子間距離が有効距離以下でなければほとんど働かない。一方、Coulomb ポテンシャルは $\frac{1}{r}$ 、遠心力ポテンシャルは $\frac{1}{r^2}$ に比例し、その有効距離は無限大である。

よって、核力の効果の有無を議論するには、 ℓ 次の部分波に対して $r < r_{\text{nuc}}$ では核力のみが深さ V_0 の井戸型ポテンシャルのように働き、 $r \geq r_{\text{nuc}}$ では核力が働かないとする、以下の式 (6.3) で表されるモデルで近似して良い。

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < r_{\text{nuc}}) \\ \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} & (r \geq r_{\text{nuc}}) \end{cases} \quad (6.3)$$

ここで m は 2 粒子の換算質量である。

式 (6.3) で表されるポテンシャルを持つ標的粒子に対して、無限遠方から重心系でのエネルギー E 、角運動量 ℓ の粒子が入射する場合を考える。古典的に考えれば外部のポテンシャル障壁を乗り越えて核力の有効範囲に到達するには

$$E_\ell^{(\text{min})} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{nuc}}} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr_{\text{nuc}}^2} \quad (6.4)$$

のエネルギーが必要であり、 $E < E_\ell^{(\text{min})}$ のとき最近接距離は

$$r_\ell = \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 \ell(\ell+1) E}{(Z^2 e^2)^2 m}} \right] \quad (6.5)$$

で与えられる。式 (6.5) より、最近接距離が最も小さくなるのは $\ell = 0$ の場合であり、このとき

$$r_0 = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \quad (6.6)$$

となる。式 (6.6) の値から、核力の効果の有無を評価することができる。

今, ^{12}C 及び ^{13}C の原子核において, 核力ポテンシャルの有効距離が原子核半径に等しいとする. また, 原子核半径 R の値については R と質量数 A に関する経験的な式

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (6.7)$$

$$R_0 = 1.2[\text{fm}] \quad (6.8)$$

[6] を用いると, ^{12}C の場合, 核力ポテンシャルの有効距離は $r_{\text{nuc}} = 2.7 \text{ fm}$ であり, 式 (6.4) より 0 次の部分波が $r = r_{\text{nuc}}$ に到達するのに必要なエネルギーは $E_0^{(\text{min})} = 18.9 \text{ MeV}$ である. 今回の実験では $E = \frac{7.5}{2} \text{ MeV}$ であり, $E < E_0^{(\text{min})}$ なので古典的には入射粒子は核力ポテンシャルの有効範囲に到達せず, $\ell = 0$ である粒子の最近接距離は式 (6.6) より $r_0 = 13.8 \text{ fm}$ である.

次に, 量子的なトンネル効果によって入射粒子が核力ポテンシャルの有効範囲に到達する確率を計算する. 一般の緩やかなポテンシャルにおける透過率 T の近似計算を行う式として「Gamov の透過因子」があり, これを今の問題に適用すると

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{r_{\text{nuc}}}^{r_0} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr \right] \quad (6.9)$$

[7] となる. $V(r) = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ の場合は積分が解析的に実行できて

$$\begin{aligned} T &\approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{r_{\text{nuc}}}^{r_0} \sqrt{2m \left(\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr \right] \\ &= \exp \left[-\frac{Ze}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{\pi\epsilon_0}} \int_{r_{\text{nuc}}}^{r_0} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} dr \right] \\ &= \exp \left[-\frac{Ze}{\hbar} \sqrt{\frac{2mr_0}{\pi\epsilon_0}} \left(\cos^{-1} \sqrt{\frac{r_{\text{nuc}}}{r_0}} - \sqrt{\frac{r_{\text{nuc}}}{r_0} - \left(\frac{r_{\text{nuc}}}{r_0} \right)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

諸々の値を代入すると $T = 1 \times 10^{-9}$ であり, 0 次の部分波の透過率は非常に小さい. また, 高次の部分波に対する透過率は T より小さいので, 入射粒子が核力ポテンシャルの有効範囲に到達する確率は極めて低いと結論される. また, ^{13}C についても同様に計算すると $r_{\text{nuc}} = 2.8 \text{ fm}$, $E_0^{(\text{min})} = 18.4 \text{ MeV}$, となり, 透過率 $T = 9 \times 10^{-10}$ である. 従って, ^{13}C の場合も ^{12}C と同様, 入射粒子が核力ポテンシャルの有効範囲に到達する確率は極めて低いので, 今回用いる理論曲線は Mott の公式で十分である.

無論, χ^2/n 値を最小にする吸収率 C_ℓ を適当に選ぶと, Mott の公式よりも今回の実験データに一致する理論曲線が得られる可能性がある. しかし, これは Mott の公式が Blair 模型の特別な場合 (全ての ℓ に対して $C_\ell = 0$) であり, 加えて Blair 模型が Mott の公式より多くのパラメータを持つことを考えると当然である. 今回の実験において Blair 模型を用いるこれ以上の積極的な理由は存在しない.

6.4 不純物の存在

本実験で散乱粒子のエネルギースペクトルを得た. このスペクトルを見ると, 散乱粒子と考えられるピーク以外にもいくつか, ピークと思われる部分が見られた. これらは散乱粒子以外で detector に飛来した粒子のピークもしくは, 炭素以外によって散乱された入射ビームのピークであると考えられる. ところで, スペクトルの解析では, ヒストグラムを積分することによって散乱粒子数 N_{elastic} を求めた. この積分範囲内に C-C 散乱以外の飛来粒子のピークが入っていた場合, 積分値は実際の散乱粒子数 N_{elastic} よりも大きくなってしま

い、積分値を散乱粒子数 N_{elastic} とみなすことができなくなる可能性がある。しかし、これらの飛来粒子を同定し、その粒子数を見積もることができれば、積分値から飛来粒子の影響を取り除くことができる。よって、飛来粒子の原因を考え、同定することは重要である。ただし、6.2.1 で述べたように、飛来粒子によるものと思われるピークを含めてヒストグラムを積分しても、最終的に得られる微分断面積には大きく寄与しないことが分かっているので、ここでは飛来粒子数を見積もることはしない。

今回は ROOT を用いてこれらの飛来粒子を同定した。以下では、このような炭素以外の飛来粒子の発生原因、これらの粒子を同定した方法、及びその結果について述べる。

6.4.1 飛来粒子の原因

飛来粒子の発生原因としては、本実験で使用した入射ビーム、及びターゲットとして用いた炭素薄膜が挙げられる。使用した入射ビームは純粋に C^{3+} だったと考え、飛来粒子の発生原因は炭素薄膜内に存在する不純物だと考えた。すなわち、入射ビームが薄膜に照射されたときに、炭素と共に不純物も散乱され、detector に飛来したと推定した。炭素薄膜を作製する際には、 H_2O や $NaCl$ が用いられていたことから、薄膜内に特に多く存在する不純物元素としては、 H 、 O 、 Na 、及び Cl が予想される。

6.4.2 不純物元素の同定方法

炭素以外の飛来粒子は薄膜中の不純物だと考えられることが分かったので、炭素薄膜中の不純物原子の質量が、元素の種類によって異なることを利用して解析した。以下では具体的に不純物元素の同定方法について説明する。

まず、本実験の際にとっておいた、pulser のみを入力したヒストグラム図 14 からエネルギー原点のチャンネルの値 O_{ch} を求めた。この方法は、3.5.3 節で述べた方法と基本的に同じである。3.5.3 節では α 粒子のエネルギーピークから求めたが、ここでは pulser のピークから原点を求めている。pulser は電圧を 3 種類に変えて計測したので、最小二乗法を用いてチャンネル対電圧のグラフを直線で fit した。

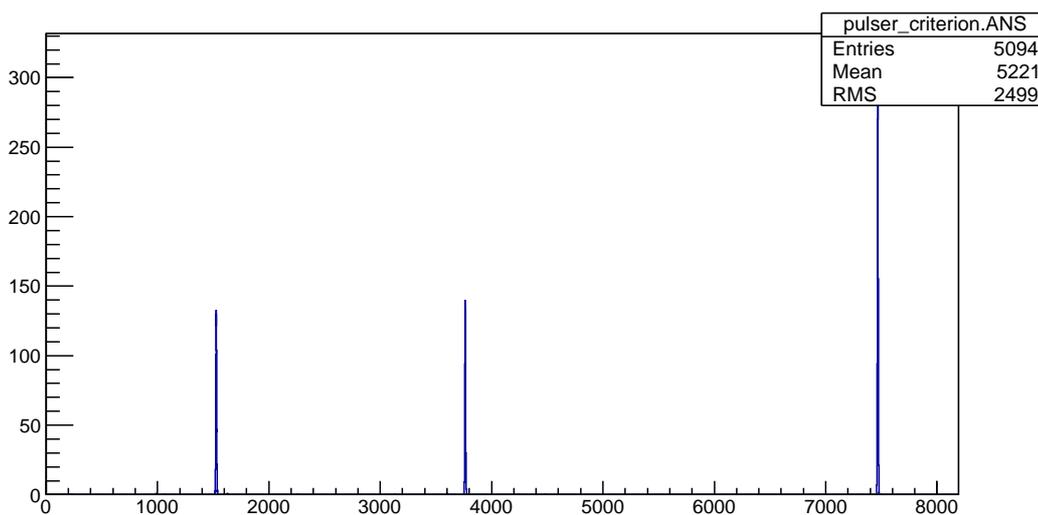


図 14 pulser のヒストグラム

また、1 チャンネルあたりのエネルギー δE は散乱された炭素のピークのチャンネルの値 $\text{Peak}_{\text{ch}}^C$ と対応するエ

エネルギーの理論値 E_C を比較することによって求めた.

$$\delta E = \frac{E_C}{\text{Peak}_{\text{ch}}^C - O_{\text{ch}}} \quad (6.11)$$

次に, いくつかのエネルギースペクトルのヒストグラム内に存在する, 不純物原子-炭素散乱のピークの周辺と考えられる部分に対して, ROOT の組み込み関数を用いて Gaussian fit を行った. fit によって得られた mean の値を, 不純物原子-炭素散乱によるエネルギーピークに対応するチャンネルの値とした. fit が不可能な領域については, ピークと見られる部分の付近でカウント数が最大値をとっているチャンネルを, エネルギーピークに対応するチャンネルの値とした. このエネルギーピークに対応するチャンネルの値を $\text{Peak}_{\text{ch}}^{\text{imp}}$ とおき, 次のように不純物原子-炭素散乱のエネルギーピーク E_{imp} を求めた.

$$E_{\text{imp}} = (\text{Peak}_{\text{ch}}^{\text{imp}} - O_{\text{ch}})\delta E \quad (6.12)$$

ここで, 2.3 節で述べた運動学の結果から, 入射粒子の質量 m_1 と標的粒子の質量 m_2 と散乱された粒子のエネルギー $E_1^{\prime(\text{lab})}$ (もしくは $E_2^{\prime(\text{lab})}$) の関係式を求めた.

$$E_1^{\prime(\text{lab})} = \gamma E_1^{\prime(\text{cm})} + c\beta\gamma p^{\prime(\text{cm})} \cos \theta \quad (6.13)$$

$$E_2^{\prime(\text{lab})} = \gamma E_2^{\prime(\text{cm})} + c\beta\gamma p^{\prime(\text{cm})} \cos(\pi - \theta) \quad (6.14)$$

各パラメータは 2.3 で定義された通りである. $E_1^{\prime(\text{lab})}$ (もしくは $E_2^{\prime(\text{lab})}$) に E_{imp} を代入し, m_2 を不純物原子の質量 m_{imp} に置き換えることによって m_{imp} を求めた. $E_1^{\prime(\text{lab})}$ を E_{imp} に置き換えることは, 入射ビームが不純物によって散乱された場合に対応し, $E_2^{\prime(\text{lab})}$ を E_{imp} に置き換えることは, 不純物が入射ビームによって散乱された場合に対応する. m_2 を $E_1^{\prime(\text{lab})}$ (もしくは $E_2^{\prime(\text{lab})}$) について陽に解くことは難しいので, ある E_{imp} に対して適当な範囲の m_2 を式 (6.13) 及び式 (6.14) に代入して最適な値を返すものを m_{imp} とした.

次に, 得られた m_{imp} の値に N_A をかけることによって不純物原子の原子量と考えられる値 A_{imp} を得た. 最後に, いくつかの原子の原子量と A_{imp} を比較して不純物元素を同定した.

6.4.3 不純物元素の同定結果

前の小節で述べた方法によって, 不純物元素の同定を行った結果について述べる. 初めに, pulser のみを入力したヒストグラムからエネルギー原点のチャンネルの値 O_{ch} を求めたところ, 次のようになった.

$$O_{\text{ch}} = 47.44 \pm 0.12 \quad (6.15)$$

不純物原子のピークを解析するヒストグラムとしては, ピークが見えやすい, $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱における 30° の結果を利用した.

ヒストグラムにおいて判断できる不純物原子によるものと思われるピークは, 4 個存在した. それぞれについて Gaussian fit を行おうとしたが, その中で C のピーク付近にある 3 個は fit することはできなかった. よって 1 個のピークのみに対して fit を行い, mean の値を求めた. 3 個のピークに関しては, ピークと見られる部分の付近でカウント数が最大値をとっているチャンネルをエネルギーピークに対応するチャンネルの値とした. その結果, エネルギーピークに対応するチャンネルの値 $\text{Peak}_{\text{ch}}^{\text{imp}(n)}$ ($n=1,2,3,4$; n はピークに対応する番号) は表 15 のようになった.

次に, 不純物原子の質量 $m_{\text{imp}(n)}$ 及び原子量 $A_{\text{imp}(n)}$ を求めたところ, 表 16^[8] のようになった.

これらの結果から, 6.4.1 節で予想したように炭素薄膜中に存在した不純物元素は, H, O, Na, 及び Cl だったと推定される.

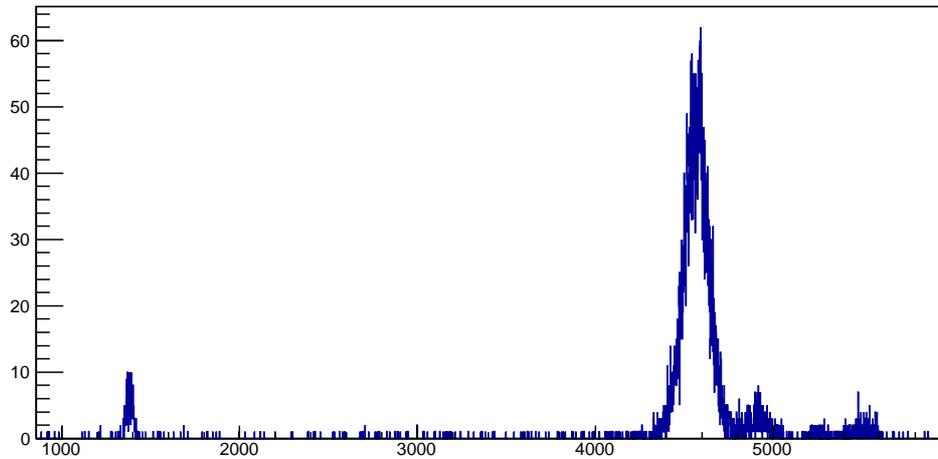


図 15 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の散乱角 30° でのヒストグラム

表 15 チャネルの値

Peak _{ch} ^{imp}	チャネルの値
Peak _{ch} ^{imp(1)}	1378
Peak _{ch} ^{imp(2)}	4916
Peak _{ch} ^{imp(3)}	5253
Peak _{ch} ^{imp(4)}	5478

表 16 原子量

Peak 番号	原子量	原子量の文献値	原子
1	1.03	1.00794	H
2	15.4	15.9994	O
3	23.1	22.98976928	Na
4	34.6	35.453	Cl

7 結論

我々は今回、 ^{12}C 及び ^{13}C の炭素膜とイオンビームを用いた散乱実験を通して以下のことを結論づけた。すなわち

- 7.5 MeV 程度のエネルギースケールによる散乱実験によって得られる微分断面積は、異種粒子間の散乱に関しては Rutherford の公式に従い、同種粒子間の散乱に関しては Mott の公式に従う。
- ^{12}C 原子核のスピンは 0, ^{13}C 原子核のスピンは $\frac{1}{2}$ である。

以上により、我々は同種粒子間に存在する対称性を確かめ、ひいては自然の中の対称性を実感することができた。

参考文献

- [1] 理科年表：国立天文台編「理科年表 平成 22 年」丸善株式会社（2009 年）
八木浩輔：八木浩輔「原子核物理学」朝倉書店（1971 年）
放射線概論：柴田徳思編「放射線概論」通商産業研究社（1989 年）
†：WWW Table of Nuclear Structure Glossary
<http://ie.lbl.gov/toi2003/NSGlossary.htm#UUU>
- [2] ROOT
<http://root.cern.ch/drupal/>
- [3] LBNL Isotopes Project - LUNDS Universitet WWW Table Radioactive Isotopes
Alpha energy search
<http://ie.lbl.gov/toi/Alpha.asp?sql=&Min=0&Max=10005.49&Min2=0&Max2=10005.44>
- [4] WWW Table of Atomic Masses
<http://ie.lbl.gov/toi2003/MassSearch.asp>
- [5] John R.Taylor “An Introduction to Error Analysis” University ScienceBooks（1997 年）p.79
- [6] 高田健次郎・池田清美「原子核構造論」朝倉書店（2002 年）p.5
- [7] 猪木慶治・川合光「量子力学 I」講談社サイエンティフィク（1994 年）p.63
- [8] 前掲「理科年表 平成 22 年」p.364

また、本稿を作成するにあたって以下の資料も参考にした。

猪木慶治・川合光「量子力学 II」講談社サイエンティフィク（1994 年）第 11 章

ヴェーベレステツキー・イエリフシツ・エリピタエフスキー 井上健男訳「相対論的量子力学」東京図書（1969 年）

物理学課題演習 A5 配付資料

謝辞

本演習を行うにあたって、散乱に関する理論やその他物理一般に関する理論については京都大学理学研究科准教授の菅沼秀夫先生に、実際の散乱実験やデータ解析については同研究科講師の村上哲也先生に厚いご指導を頂きました。また、宇治キャンパスにおけるタンデム型イオン加速器を用いた実験においては、量子理工学教育研究センターの皆様にご指導を頂き、回路の組み方や機器の使い方等については TA の天野さんにサポートを頂きました。これらの皆様への深い感謝の気持ちを申し上げます、謝辞にかえさせていただきます。

付録

3.5.2 節で説明した Bethe-Bloch の式を導出する．この導出においては自然単位系を採用する．

$$M_{fi}^{(n)} = \begin{array}{c} p' \\ \nearrow \\ \gamma \\ \searrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ -iD_{\mu\nu} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \psi_n \\ \nearrow \\ \gamma \\ \searrow \\ p_0 \end{array} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i} (-ie) (-ize) (\bar{u}_{p'} \gamma^\mu u_p) (-iD_{\mu\nu}(q)) (\bar{\psi}_n \gamma^\nu \psi_0) \\ &= ze^2 J_{p'p}^\nu(q) D_{\mu\nu}(q) J_{n0}^\mu(-q) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{i}{2m} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\psi_0 \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_0) d^3\mathbf{x} \quad (7.3)$$

これを部分積分することによって次式を得る

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{1}{2} \langle n | \mathbf{v} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{v} | 0 \rangle \quad (7.4)$$

一方, $\mathbf{J}_{p'p}$ について, $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}|$ を仮定すると

$$\mathbf{J}_{p'p}(q) \approx \mathbf{J}_{pp}(0) \quad (7.5)$$

Dirac 方程式は

$$(\gamma \hat{p} - m) \psi = 0 \quad (7.6)$$

ここで \hat{p} は演算子であり

$$\hat{p}_0 = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.7)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = -i \nabla \quad (7.8)$$

によって定義される．平面波 u_p についての Dirac 方程式は

$$(\gamma p - m) u_p = 0 \quad (7.9)$$

で与えられる ($\psi = \psi_p = u_p e^{-ipx}$ とおいてみるとよい)．ただし u_p の規格化は

$$\bar{u}_p u_p = 2m \quad (7.10)$$

とする。Dirac 方程式に左から \bar{u}_p をかけると

$$\begin{aligned}\bar{u}_p \gamma^\mu u_p p_\mu &= m \bar{u}_p u_p \\ &= 2m^2 \\ &= 2p^2\end{aligned}\tag{7.11}$$

従って

$$\bar{u}_p \gamma^\mu u_p = 2p^\mu\tag{7.12}$$

よって

$$\mathbf{J}_{p'p}(q) \approx 2\mathbf{p}\tag{7.13}$$

$|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}|$ の条件から、入射粒子は古典的な直線運動とみなすことができ、電流の横波条件 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{q} = 0$ が成立するので、 \mathbf{p} 方向に第 1 軸をとると

$$\begin{aligned}j^\mu q_\mu &= 2p^\mu q_\mu \\ &= 2p^0 \omega_{n0} - 2p^1 q_1 = 0\end{aligned}\tag{7.14}$$

従って

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= p_1 q_1 \\ &= -p^1 q_1 \\ &= -p^0 \omega_{n0}\end{aligned}\tag{7.15}$$

運動量表示での伝播関数は一般に

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2)\tag{7.16}$$

という形に書ける。

ここで、次のような変換を考える。

$$D_{\mu\nu} \rightarrow D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu\tag{7.17}$$

この変換は物理を変えない変換である。まず、伝播関数が $(j^\mu)_{12} D_{\mu\nu} (j^\nu)_{34}$ の形でしか現れないことに注意する。遷移電流 j^μ について、電流の横波条件 (\Leftrightarrow 電流の保存則) から

$$j^\mu k_\mu = 0\tag{7.18}$$

が成立する。すると、

$$(j^\mu)_{12} \chi_\nu k_\mu (j^\nu)_{34} = 0\tag{7.19}$$

となり、この変換は物理量の計算に関係しないことが分かる。ここで χ を次のようにとる。

$$\chi_\mu = -\frac{1}{2} D^{(l)}(k^2) k_\mu\tag{7.20}$$

すると、 $D_{\mu\nu}$ は次の形を仮定してよいことになる (Feynman ゲージ)

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) g_{\mu\nu}\tag{7.21}$$

この場合の $D(k^2)$ を求める. $D_{\mu\nu}$ は k^2 のみによるので, k の空間成分が第 3 軸方向のみ 0 でない場合を考えればよい.

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k_0, 0, 0, k'_3) \quad (7.22)$$

(ここで k'_3 は k の空間成分を第 3 軸方向に回転したベクトルの第 3 成分である) ここで 11 成分のみを考え, Coulomb ゲージに移ると

$$D_{11}(k_0, 0, 0, k'_3) \rightarrow D_{11}(k_0, 0, 0, k'_3) + 2\chi_1^{\text{Coulomb}} 0 = D_{11}(k_0, 0, 0, k'_3) \quad (7.23)$$

となる. Coulomb ゲージでは \mathbf{A} を生成消滅演算子で展開できる.

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \left(c_{\mathbf{k}\alpha} e^{(\alpha)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger e^{(\alpha)*} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \quad (7.24)$$

$D_{11}(x-x')$ を計算する.

$$\begin{aligned} D_{11}(x-x') &= i\langle 0|T A_1(x) A_1(x')|0\rangle \\ &= i\theta(x^0-x'^0)\langle 0|A_1(x) A_1(x')|0\rangle + i\theta(x'^0-x^0)\langle 0|A_1(x') A_1(x)|0\rangle \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{2\pi}{\omega} e_1^{(\alpha)} e_1^{(\alpha)*} \left(\theta(x^0-x'^0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \theta(x'^0-x^0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \right) \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha=1,2} \left| e_1^{(\alpha)} \right|^2 e^{-i\omega|x^0-x'^0|} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\omega} e^{-i\omega|x^0-x'^0|+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ - \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{4\pi}{k^2+i\epsilon} e^{-ik_0(x^0-x'^0)} \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \end{aligned} \quad (7.25)$$

従って

$$\begin{aligned} D_{11}(k) &= -\frac{4\pi}{k^2+i\epsilon} \\ &= D(k^2) g_{11} = -D(k^2) \end{aligned} \quad (7.26)$$

故に

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2+i\epsilon} g_{\mu\nu} \quad (7.27)$$

ここで次のような χ を用いて変換を行う.

$$\chi_0 = -\frac{2\pi\omega}{k^2\omega^2} \quad (7.28)$$

$$\chi_i = \frac{2\pi k_i}{k^2\omega^2} \quad (7.29)$$

すると、伝播関数 $D_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} D_{ij} &= -\frac{4\pi}{k^2}\delta_{ij} + \chi_i k_j + \chi_j k_i \\ &= -\frac{4\pi}{k^2}\delta_{ij} + \frac{2\pi k_i k_j}{k^2 \omega^2} + \frac{2\pi k_j k_i}{k^2 \omega^2} \\ &= -\frac{4\pi}{k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} D_{i0} &= \chi_i k_0 + \chi_0 k_i \\ &= \frac{2\pi k_i \omega}{k^2 \omega^2} - \frac{2\pi \omega k_i}{k^2 \omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} D_{00} &= \frac{4\pi}{k^2} + 2\chi_0 k_0 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} - \frac{4\pi \omega^2}{k^2 \omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

となる。以上の結果から $M_{fi}^{(n)}$ の具体的な表式は

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(n)} &= -\frac{4\pi z e^2}{q^2} \left\langle n \left| \frac{\epsilon}{\omega_{n0}} (\mathbf{q} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \mathbf{q} \mathbf{v}) + (\mathbf{p} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \mathbf{p} \mathbf{v}) \right| 0 \right\rangle \\ &= -\frac{4\pi z e^2}{q^2} \left\langle n \left| 2i \frac{\epsilon}{\omega_{n0}} \frac{d}{dt} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + (\mathbf{p} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \mathbf{p} \mathbf{v}) \right| 0 \right\rangle \\ &= -\frac{4\pi z e^2}{q^2} (2\epsilon (e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0} + \langle n | (\mathbf{p} \mathbf{v} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \mathbf{p} \mathbf{v}) | 0 \rangle) \\ &\approx -\frac{8\pi z e^2}{q^2} (\epsilon (e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0} - i \mathbf{p} \mathbf{r}_{n0} \omega_{n0}) \end{aligned} \quad (7.33)$$

ここで $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \approx 1$ の近似を行った。

$$\left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 = \frac{64\pi^2 z^2 e^4}{(q^2)^2} \left(\epsilon^2 |(e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0}|^2 + 2(\mathbf{q} \mathbf{r}_{n0})(\mathbf{p} \mathbf{r}_{n0}) \epsilon \omega_{n0} + (\mathbf{p} \mathbf{r}_{n0})^2 \omega_{n0}^2 \right) \quad (7.34)$$

ここで $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \approx 1 - i\mathbf{q}\mathbf{r}$ の近似を行った。(実験室系での) 微分断面積は

$$d\sigma_n = 2\pi \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega_{n0}) \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2 |\mathbf{p}'| 2\epsilon' (2\pi)^2} \quad (7.35)$$

従って、入射粒子のエネルギー損失 (有効制動, エネルギー損失の断面積) は

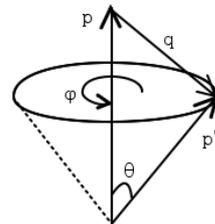
$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_n \int \omega_{n0} d\sigma_n \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_n \int \omega_{n0} \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 d\omega' \end{aligned} \quad (7.36)$$

この積分を求めよう。方位角について平均をとる操作を行うには

$$\mathbf{q} \mathbf{r}_{n0} \rightarrow q_{\parallel} x_{n0} \quad (7.37)$$

という変換を行えばよい。ここで方位角というのは右の図のように定義される角 φ を意味する。 $q_{\parallel} \approx -\frac{\omega_{n0}}{v}$ (v は散乱前の入射粒子の速度) だから上の置換は

$$\mathbf{q} \mathbf{r}_{n0} \rightarrow -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0} \quad (7.38)$$



となる. 一方 q_{\perp} は θ が微小のとき

$$q_{\perp} \approx |\mathbf{p}|\theta \quad (7.39)$$

と近似できるので

$$\begin{aligned} q^2 &= \omega_{n0}^2 - \mathbf{p}^2 \approx \omega_{n0}^2 - \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} - \mathbf{p}^2\theta^2 \\ &= -\frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\mathbf{p}^2} - \mathbf{p}^2\theta^2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

従って $2\theta d\theta$ の具体的な表式は

$$2\theta d\theta = \frac{d|q^2|}{\mathbf{p}^2} \quad (7.41)$$

となる.

$$\kappa = 4\pi z^2 e^4 \sum_n \int \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \left\{ |(e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 x_{n0}^2 \left(\frac{M^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \quad (7.42)$$

散乱角 θ は微小なので積分区間を $\theta \in [0, \pi]$ とする必要はない. その代わりに $|q^2|$ の下限を

$$|q^2|_{\min} = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\mathbf{p}^2} \quad (7.43)$$

とし, 上限を

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m_e} \ll m_e \quad (7.44)$$

という条件で決まる $|q^2|_1$ で決めておく. I は平均原子エネルギー (原子の電離ポテンシャル) である. ここで, 積分区間 $[|q^2|_{\min}, |q^2|_1]$ を $[|q^2|_{\min}, |q^2|_0]$ と $[|q^2|_0, |q^2|_1]$ に分割する. ここで $|q^2|_0$ は以下の条件を満たすようにとる.

$$\left(\sqrt{|q^2|_{\min}} \lesssim \right) \frac{IM}{|\mathbf{p}|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m_e \alpha \left(\lesssim \sqrt{Im_e} \ll \sqrt{|q^2|_1} \right) \quad (7.45)$$

ここで1つ目の \lesssim は電離に必要なエネルギーと励起に必要なエネルギーの比較から分かり, 2つ目の \lesssim は Rydberg エネルギー $\frac{1}{2}m_e\alpha^2 = 13.6[\text{eV}]$ と I の一般的な値を比べることによって分かる. $[|q^2|_{\min}, |q^2|_0]$ での κ を求めよう. この領域では $|q^2| \approx \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\mathbf{p}^2}$ とみなせるから κ への寄与は

$$\begin{aligned} &4\pi z^2 e^4 \sum_n \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} d|q^2| \left\{ \frac{\omega_{n0}}{v^2} x_{n0}^2 \frac{1}{|q^2|} - \omega_{n0}^3 x_{n0}^2 \frac{M^2}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{|q^2|^2} \right\} \\ &\approx 4\pi z^2 e^4 \sum_n \left\{ \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \frac{\omega_{n0}}{v^2} x_{n0}^2 \frac{1}{|q^2|} d|q^2| - \int_{|q^2|_{\min}}^{\infty} \omega_{n0}^3 x_{n0}^2 \frac{M^2}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{|q^2|^2} d|q^2| \right\} \\ &= \frac{4\pi z^2 e^4}{v^2} \sum_n \omega_{n0} x_{n0}^2 \left(\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right) \end{aligned} \quad (7.46)$$

となる. 2行目で $|q^2|_{\min} \ll |q^2|_0$ であることを反映して積分区間を $[|q^2|_{\min}, \infty)$ に変更した. ここで総和則

$$\sum_n \omega_{n0} x_{n0}^2 = \frac{Z}{2m_e} \quad (7.47)$$

を思い出すと上の和が一部求まるが，さらに ω_{n0} の“相乗平均”として I を

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} x_{n0}^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} x_{n0}^2} \quad (7.48)$$

に従って導入すると，和は

$$\frac{2\pi z^2 e^4 Z}{m_e v^2} \left(\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 I^2} - v^2 \right) \quad (7.49)$$

となる．続いて領域 $[|q^2|_0, |q^2|_1]$ での積分を考える．この領域では $|q^2| \approx \mathbf{p}^2 \theta^2$ とみなせて， $|q^2|$ は n によらない．従って，積分の前に和を求めることができる．総和則

$$\sum_n |(e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z\mathbf{q}^2}{2m_e} \quad (7.50)$$

を用いると κ への寄与は

$$\begin{aligned} & 4\pi z^2 e^4 \int_{|q^2|_0}^{|q^2|_1} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \left\{ \frac{Z\mathbf{q}^2}{2m_e v^2} - \sum_n \omega_{n0}^3 x_{n0}^2 \left(\frac{M^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \\ &= 4\pi z^2 e^4 \int_{|q^2|_0}^{|q^2|_1} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \left\{ \frac{Z(|q^2| - \omega_{n0})}{2m_e v^2} - \sum_n \omega_{n0}^3 x_{n0}^2 \left(\frac{M^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \\ &= \frac{2\pi z^2 e^4 Z}{m_e v^2} \ln \left(\frac{|q^2|_1}{|q^2|_0} \right) + O\left(\frac{1}{|q^2|_0}\right) + O\left(\frac{1}{|q^2|_1}\right) \\ &\approx \frac{2\pi z^2 e^4 Z}{m_e v^2} \ln \left(\frac{|q^2|_1}{|q^2|_0} \right) \end{aligned} \quad (7.51)$$

となる．2つの積分領域を足すことによって領域 $\mathbf{q}^2 \ll m_e^2$ での電離損失を次の形で得る．

$$\frac{2\pi z^2 e^4 Z}{m_e v^2} \left(\ln \frac{|q^2|_1 \mathbf{p}^2}{M^2 I^2} - v^2 \right) \quad (7.52)$$

続いて運動量の変化が大きいとき ($\mathbf{q}^2 \gg Im_e$) の電離損失を求める．この領域では原子内電子の結合エネルギーは無視できて自由電子と考えることができる．また入射粒子のエネルギーとは大きいので，原子内電子ははじめ静止しているとみなせる．入射粒子から原子内電子へ $m_e \Delta$ だけエネルギーが渡されるとき微分断面積を $d\sigma_\Delta$ とすると有効制動の微分量は

$$d\kappa = Z m_e \Delta d\sigma_\Delta \quad (7.53)$$

である．静止電子により大きな質量の粒子を衝突させるとき，電子に与えられるエネルギーの最大値 $W_{\max} = m_e \Delta_{\max}$ は

$$\begin{aligned} W_{\max} &= m_e \Delta_{\max} \\ &= \frac{2m_e \mathbf{p}^2}{m_e^2 + M^2 + 2m_e \epsilon} \\ &\approx \frac{2m_e \mathbf{p}^2}{M^2 + 2m_e \epsilon} \\ &\approx \frac{2m_e \mathbf{p}^2}{M^2} \\ &= 2m_e v^2 \gamma^2 \end{aligned} \quad (7.54)$$

2行目の \approx は $M \ll m_e$ の条件から、3行目の \approx は $\epsilon \ll \frac{M^2}{m_e}$ の仮定から導かれる。ここで導かれた最大転移エネルギーは入射粒子の運動エネルギー $\epsilon - M$ と比べて十分小さいので、入射粒子の運動は近似的に不変と考えるべく、入射粒子を無限に重いとみなす近似が良く成り立っている。従って電子を静止している粒子に入射する問題を考えれば微分断面積 $d\sigma_\Delta$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} d\sigma_\Delta &= \frac{4(z e^2)^2 \epsilon^2}{\mathbf{q}^4} \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\epsilon^2}\right) do \\ &= \frac{4\pi(z e^2)^2}{v^2} \left(1 - \frac{|q^2|}{4m_e^2 \gamma^2}\right) \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \end{aligned} \quad (7.55)$$

ここで条件 $Im_e \ll \mathbf{q}^2$ と $\theta \ll 1$ とから分かる近似

$$\begin{aligned} |q^2| &\approx \mathbf{q}^2 \\ &\approx 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (7.56)$$

を用いて、さらに do を以下のように計算した。

$$do = \frac{\pi d|q^2|}{\mathbf{p}^2} \quad (7.57)$$

一方

$$\begin{aligned} |q^2| &= -(p' - p)^2 \\ &= -(p'_e - p_e)^2 \\ &= -2m_e^2 + 2p'_e p_e \\ &= 2m_e^2 \Delta \end{aligned} \quad (7.58)$$

なので

$$\begin{aligned} |q^2|_{\max} &= 2m_e^2 \Delta_{\max} \\ &= \frac{4m_e^2 \mathbf{p}^2}{M^2} \\ &= 4m_e^2 v^2 \gamma^2 \end{aligned} \quad (7.59)$$

である。 $d\kappa$ を区間 $[|q^2|_1, |q^2|_{\max}]$ で積分することによって次式を得る

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi(z e^2)^2 Z}{m_e v^2} \left(\ln \frac{|q^2|_{\max}}{|q^2|_1} - v^2 \left(1 - \frac{|q^2|_1}{|q^2|_{\max}}\right) \right) \\ &\approx \frac{2\pi(z e^2)^2 Z}{m_e v^2} \left(\ln \frac{|q^2|_{\max}}{|q^2|_1} - v^2 \right) \end{aligned} \quad (7.60)$$

ここで条件 $|q^2|_1 \ll m_e^2$ から分かる不等式

$$\frac{|q^2|_1}{|q^2|_{\max}} \ll \frac{M^2}{4\mathbf{p}^2} \leq 1 \quad (7.61)$$

を用いて第2項を近似した。

区間 $[|q^2|_{\min}, |q^2|_1]$ と区間 $[|q^2|_1, |q^2|_{\max}]$ での結果を足し合わせることで Bethe-Bloch の式を得る.

$$\frac{4\pi (ze^2)^2 Z}{m_e v^2} \left(\ln \frac{2mv^2\gamma^2}{I} - v^2 \right) \quad (7.62)$$

この式を別の形で表記すると,

$$\frac{2\pi m_e z^2 r_e^2 Z}{v^2} \left(\ln \frac{2mv^2\gamma^2 W_{\max}}{I^2} - 2v^2 \right) \quad (7.63)$$

さらに多数個の原子との相互作用を考慮して $Z \rightarrow \frac{N_A Z \rho dx}{A}$ の置き換えを行うと進行距離 dx あたりの損失エネルギーが

$$\frac{2\pi m_e z^2 r_e^2 N_A Z \rho dx}{v^2 A} \left(\ln \frac{2mv^2\gamma^2 W_{\max}}{I^2} - 2v^2 \right) \quad (7.64)$$

となる. 自然単位系から戻ると, 通常の Bethe-Bloch の式を得る.

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi m_e c^2 z^2 r_e^2 N_A Z \rho}{\beta^2 A} \left(\ln \frac{2mv^2\gamma^2 W_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 \right) \quad (7.65)$$

表

本文中にまとめるにはやや大きな表を，ここに掲載する．

p.30:実験データ $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱 scaler の値

表 17 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の scaler

Θ [deg]	scaler1	scaler2	scaler3
-10	295740	100	2135
10	445888	100	2044
12	235120	100	2050
14	130795	100	1979
16	64282	100	1987
18	30961	100	1975
20	17743	100	1966
22	13960	100	1819
24	13214	106	1935
26	11814	150	2874
28	10368	254	4888
30	10646	356	7002
32	17130	418	8451
34	12882	279	5510
36	12821	331	6670
38	11747	518	11394
40	18486	2329	46261
42	13434	1725	34196
44	13477	797	15859
46	12760	498	9964
48	18885	714	14361
50	12666	712	14148
52	12491	1477	29433
54	14862	2304	45620
56	25043	1803	35806
58	21698	875	17507
60	25275	850	16618

p.30:実験データ $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱 scaler の値

表 18 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の scaler

Θ [deg]	scaler1	scaler2	scaler3
-10	256861	100	2191
10	532275	100	2180
12	297600	101	2147
14	195861	101	2161
16	54887	104	2180
18	30711	103	2114
20	30419	129	2792
22	19877	123	2692
24	11561	113	2468
26	10411	128	2830
28	11747	157	3521
30	11516	176	4002
32	10975	241	5544
34	10843	368	8442
36	10271	398	9106
38	10879	362	8356
40	10357	324	7337
42	14329	467	10854
44	10227	445	10509
46	10672	628	14730
48	10082	607	14456
50	10111	455	11012
52	11071	398	9661
54	10247	360	8700
56	11043	427	10472
58	10828	486	11981
60	9893	412	10017

p.30:実験データ $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱 scaler の値

表 19 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の scaler

Θ [deg]	scaler1	scaler2	scaler3
-10	255727	100	2257
10	497498	100	2182
12	295506	100	2201
14	203905	112	2481
16	59161	102	2246
18	32714	106	2289
20	22793	106	2342
22	16194	106	2387
24	11704	104	2347
26	11227	132	2997
28	10392	155	3538
30	10322	196	4587
32	10666	246	5770
34	12495	335	7887
36	10360	325	7595
38	11295	388	9199
40	12020	453	10846
42	10443	425	10197
44	10875	456	11023
46	10869	478	11393
48	10194	458	10974
50	10871	487	11658
52	10455	447	11032
54	10119	421	10449
56	10550	409	10166
58	11497	410	10372
60	10197	331	8424

表 20 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の微分断面積

$N_{\text{target}} [/\text{m}^2]$	2.74×10^{22}					
$\Theta [\text{deg}]$	N_{beam}	N_{elastic}	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$	$\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}$	$\theta [\text{deg}]$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{(\text{cm})} [\text{m}^2]$
-10	4.44×10^{11}	244400	1.69×10^{-26}	3.94	-20.0	4.28×10^{-27}
10	4.25×10^{11}	290800	2.10×10^{-26}	3.94	20.0	5.32×10^{-27}
12	4.27×10^{11}	135300	9.73×10^{-27}	3.91	24.0	2.49×10^{-27}
14	4.12×10^{11}	67690	5.04×10^{-27}	3.88	28.0	1.30×10^{-27}
16	4.13×10^{11}	46950	3.48×10^{-27}	3.85	32.0	9.06×10^{-28}
18	4.11×10^{11}	25720	1.92×10^{-27}	3.81	36.0	5.05×10^{-28}
20	4.09×10^{11}	13850	1.04×10^{-27}	3.76	40.0	2.76×10^{-28}
22	3.78×10^{11}	11250	9.12×10^{-28}	3.71	44.0	2.46×10^{-28}
24	4.03×10^{11}	10810	8.24×10^{-28}	3.66	48.0	2.25×10^{-28}
26	5.98×10^{11}	9785	5.02×10^{-28}	3.60	52.0	1.40×10^{-28}
28	1.01×10^{12}	7568	2.28×10^{-28}	3.53	56.0	6.46×10^{-29}
30	1.45×10^{12}	7381	1.55×10^{-28}	3.46	60.0	4.49×10^{-29}
32	1.75×10^{12}	13700	2.39×10^{-28}	3.39	64.0	7.05×10^{-29}
34	1.14×10^{12}	10820	2.90×10^{-28}	3.32	68.0	8.73×10^{-29}
36	1.38×10^{12}	10630	2.35×10^{-28}	3.24	72.0	7.26×10^{-29}
38	2.37×10^{12}	8400	1.09×10^{-28}	3.15	76.0	3.45×10^{-29}
40	9.62×10^{12}	7715	2.46×10^{-29}	3.06	80.0	8.02×10^{-30}
42	7.11×10^{12}	6086	2.62×10^{-29}	2.97	84.0	8.83×10^{-30}
44	3.29×10^{12}	10010	9.31×10^{-29}	2.88	88.0	3.23×10^{-29}
46	2.07×10^{12}	10550	1.56×10^{-28}	2.78	92.0	5.62×10^{-29}
48	2.98×10^{12}	15570	1.60×10^{-28}	2.68	96.0	5.97×10^{-29}
50	2.94×10^{12}	9713	1.01×10^{-28}	2.57	100.0	3.94×10^{-29}
52	6.12×10^{12}	6382	3.20×10^{-29}	2.46	104.0	1.30×10^{-29}
54	9.49×10^{12}	5191	1.68×10^{-29}	2.35	108.0	7.14×10^{-30}
56	7.44×10^{12}	17010	7.00×10^{-29}	2.24	112.0	3.13×10^{-29}
58	3.64×10^{12}	17170	1.45×10^{-28}	2.12	116.0	6.82×10^{-29}
60	3.45×10^{12}	20330	1.80×10^{-28}	2.00	120.0	9.02×10^{-29}

表 21 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の微分断面積の誤差 1

$\Delta N_{\text{target}} [/\text{m}^2]$	5.8×10^{20}	$\frac{\Delta N_{\text{target}}}{N_{\text{target}}}$	2.1×10^{-2}	ΔN_{beam}	1.0×10^8
$\Theta [\text{deg}]$	$\frac{\Delta N_{\text{beam}}}{N_{\text{beam}}}$	$\Delta N_{\text{elastic}}$	$\frac{\Delta N_{\text{elastic}}}{N_{\text{elastic}}}$	$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$	$\frac{\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}$
-10	2.3×10^{-4}	494.5	2.0×10^{-3}	3.7×10^{-28}	2.2×10^{-2}
10	2.4×10^{-4}	539.1	1.9×10^{-3}	4.6×10^{-28}	2.2×10^{-2}
12	2.4×10^{-4}	367.8	2.7×10^{-3}	2.2×10^{-28}	2.2×10^{-2}
14	2.5×10^{-4}	260.2	3.8×10^{-3}	1.1×10^{-28}	2.2×10^{-2}
16	2.5×10^{-4}	216.7	4.6×10^{-3}	7.9×10^{-29}	2.3×10^{-2}
18	2.5×10^{-4}	160.4	6.2×10^{-3}	4.4×10^{-29}	2.3×10^{-2}
20	2.5×10^{-4}	117.7	8.5×10^{-3}	2.5×10^{-29}	2.4×10^{-2}
22	2.7×10^{-4}	106.1	9.4×10^{-3}	2.2×10^{-29}	2.4×10^{-2}
24	2.6×10^{-4}	104.0	9.6×10^{-3}	2.0×10^{-29}	2.4×10^{-2}
26	1.7×10^{-4}	98.9	1.0×10^{-2}	1.2×10^{-29}	2.4×10^{-2}
28	1.0×10^{-4}	87.0	1.1×10^{-2}	5.7×10^{-30}	2.5×10^{-2}
30	7.1×10^{-5}	85.9	1.2×10^{-2}	3.9×10^{-30}	2.5×10^{-2}
32	5.9×10^{-5}	117.0	8.5×10^{-3}	5.7×10^{-30}	2.4×10^{-2}
34	9.1×10^{-5}	104.0	9.6×10^{-3}	7.0×10^{-30}	2.4×10^{-2}
36	7.5×10^{-5}	103.1	9.7×10^{-3}	5.7×10^{-30}	2.4×10^{-2}
38	4.4×10^{-5}	93.4	1.1×10^{-2}	2.7×10^{-30}	2.5×10^{-2}
40	1.1×10^{-5}	87.8	1.1×10^{-2}	6.1×10^{-31}	2.5×10^{-2}
42	1.5×10^{-5}	78.0	1.3×10^{-2}	6.7×10^{-31}	2.6×10^{-2}
44	3.2×10^{-5}	100.1	1.0×10^{-2}	2.3×10^{-30}	2.4×10^{-2}
46	5.0×10^{-5}	102.7	9.7×10^{-3}	3.8×10^{-30}	2.4×10^{-2}
48	3.5×10^{-5}	124.8	8.0×10^{-3}	3.8×10^{-30}	2.3×10^{-2}
50	3.5×10^{-5}	98.6	1.0×10^{-2}	2.5×10^{-30}	2.4×10^{-2}
52	1.7×10^{-5}	79.9	1.3×10^{-2}	8.1×10^{-31}	2.5×10^{-2}
54	1.1×10^{-5}	72.1	1.4×10^{-2}	4.4×10^{-31}	2.6×10^{-2}
56	1.4×10^{-5}	130.4	7.7×10^{-3}	1.6×10^{-30}	2.3×10^{-2}
58	2.9×10^{-5}	131.0	7.6×10^{-3}	3.4×10^{-30}	2.3×10^{-2}
60	3.0×10^{-5}	142.6	7.0×10^{-3}	4.2×10^{-30}	2.3×10^{-2}

表 22 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱の微分断面積の誤差 2

$\Delta\theta$ [deg]	0.5	$\Delta\theta$ [deg]	1.0	
θ [deg]	$\Delta\left(\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}\right)$	$\frac{\Delta\left(\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}\right)}{\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}}$	$\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})} [\text{m}^2]$	$\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})}}$
-10	6.1×10^{-3}	1.5×10^{-3}	9.5×10^{-29}	2.2×10^{-2}
10	6.1×10^{-3}	1.5×10^{-3}	1.1×10^{-28}	2.2×10^{-2}
12	7.3×10^{-3}	1.9×10^{-3}	5.5×10^{-29}	2.2×10^{-2}
14	8.5×10^{-3}	2.2×10^{-3}	2.9×10^{-29}	2.2×10^{-2}
16	9.6×10^{-3}	2.5×10^{-3}	2.0×10^{-29}	2.3×10^{-2}
18	1.1×10^{-2}	2.8×10^{-3}	1.1×10^{-29}	2.3×10^{-2}
20	1.2×10^{-2}	3.2×10^{-3}	6.5×10^{-30}	2.4×10^{-2}
22	1.3×10^{-2}	3.5×10^{-3}	5.9×10^{-30}	2.4×10^{-2}
24	1.4×10^{-2}	3.9×10^{-3}	5.4×10^{-30}	2.4×10^{-2}
26	1.5×10^{-2}	4.3×10^{-3}	3.4×10^{-30}	2.5×10^{-2}
28	1.6×10^{-2}	4.6×10^{-3}	1.6×10^{-30}	2.5×10^{-2}
30	1.7×10^{-2}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-30}	2.5×10^{-2}
32	1.9×10^{-2}	5.5×10^{-3}	1.7×10^{-30}	2.4×10^{-2}
34	2.0×10^{-2}	5.9×10^{-3}	2.1×10^{-30}	2.5×10^{-2}
36	2.1×10^{-2}	6.3×10^{-3}	1.8×10^{-30}	2.5×10^{-2}
38	2.2×10^{-2}	6.8×10^{-3}	8.8×10^{-31}	2.6×10^{-2}
40	2.2×10^{-2}	7.3×10^{-3}	2.0×10^{-31}	2.6×10^{-2}
42	2.3×10^{-2}	7.9×10^{-3}	2.3×10^{-31}	2.7×10^{-2}
44	2.4×10^{-2}	8.4×10^{-3}	8.2×10^{-31}	2.6×10^{-2}
46	2.5×10^{-2}	9.0×10^{-3}	1.4×10^{-30}	2.6×10^{-2}
48	2.6×10^{-2}	9.7×10^{-3}	1.5×10^{-30}	2.5×10^{-2}
50	2.7×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-30}	2.6×10^{-2}
52	2.8×10^{-2}	1.1×10^{-2}	3.6×10^{-31}	2.8×10^{-2}
54	2.8×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.0×10^{-31}	2.9×10^{-2}
56	2.9×10^{-2}	1.3×10^{-2}	8.3×10^{-31}	2.7×10^{-2}
58	3.0×10^{-2}	1.4×10^{-2}	1.8×10^{-30}	2.7×10^{-2}
60	3.0×10^{-2}	1.5×10^{-2}	2.4×10^{-30}	2.8×10^{-2}

表 23 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積

$N_{\text{target}} [/\text{m}^2]$	2.34×10^{22}					
$\Theta [\text{deg}]$	N_{beam}	N_{elastic}	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$	$\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}$	$\theta [\text{deg}]$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{(\text{cm})} [\text{m}^2]$
-10	4.56×10^{11}	224800	1.77×10^{-26}	3.94	-19.8	4.50×10^{-27}
10	4.54×10^{11}	303100	2.40×10^{-26}	3.94	19.8	6.10×10^{-27}
12	4.47×10^{11}	136200	1.10×10^{-26}	3.91	23.8	2.80×10^{-27}
14	4.50×10^{11}	78590	6.29×10^{-27}	3.88	27.8	1.62×10^{-27}
16	4.54×10^{11}	43430	3.44×10^{-27}	3.85	31.7	8.95×10^{-28}
18	4.40×10^{11}	26800	2.19×10^{-27}	3.81	35.7	5.76×10^{-28}
20	5.81×10^{11}	26340	1.63×10^{-27}	3.76	39.7	4.34×10^{-28}
22	5.60×10^{11}	16730	1.07×10^{-27}	3.71	43.7	2.90×10^{-28}
24	5.13×10^{11}	9196	6.44×10^{-28}	3.65	47.7	1.76×10^{-28}
26	5.89×10^{11}	8029	4.90×10^{-28}	3.60	51.7	1.36×10^{-28}
28	7.33×10^{11}	9387	4.61×10^{-28}	3.53	55.7	1.30×10^{-28}
30	8.33×10^{11}	9195	3.97×10^{-28}	3.46	59.7	1.15×10^{-28}
32	1.15×10^{12}	8416	2.62×10^{-28}	3.39	63.7	7.74×10^{-29}
34	1.76×10^{12}	7320	1.50×10^{-28}	3.32	67.7	4.52×10^{-29}
36	1.89×10^{12}	6684	1.27×10^{-28}	3.24	71.8	3.92×10^{-29}
38	1.74×10^{12}	7600	1.57×10^{-28}	3.15	75.8	4.99×10^{-29}
40	1.53×10^{12}	7608	1.79×10^{-28}	3.06	79.8	5.85×10^{-29}
42	2.26×10^{12}	10310	1.64×10^{-28}	2.97	83.9	5.52×10^{-29}
44	2.19×10^{12}	6437	1.06×10^{-28}	2.88	88.0	3.68×10^{-29}
46	3.06×10^{12}	5466	6.42×10^{-29}	2.78	92.0	2.31×10^{-29}
48	3.01×10^{12}	5063	6.05×10^{-29}	2.68	96.1	2.26×10^{-29}
50	2.29×10^{12}	6242	9.80×10^{-29}	2.57	100.2	3.81×10^{-29}
52	2.01×10^{12}	7650	1.37×10^{-28}	2.46	104.4	5.56×10^{-29}
54	1.81×10^{12}	7116	1.41×10^{-28}	2.35	108.5	6.01×10^{-29}
56	2.18×10^{12}	7126	1.18×10^{-28}	2.24	112.6	5.26×10^{-29}
58	2.49×10^{12}	6180	8.92×10^{-29}	2.12	116.8	4.21×10^{-29}
60	2.08×10^{12}	5728	9.89×10^{-29}	2.00	121.0	4.94×10^{-29}

表 24 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積の誤差 1

$\Delta N_{\text{target}} [/\text{m}^2]$	4.8×10^{20}	$\frac{\Delta N_{\text{target}}}{N_{\text{target}}}$	2.1×10^{-2}	ΔN_{beam}	1.0×10^8
$\Theta [\text{deg}]$	$\frac{\Delta N_{\text{beam}}}{N_{\text{beam}}}$	$\Delta N_{\text{elastic}}$	$\frac{\Delta N_{\text{elastic}}}{N_{\text{elastic}}}$	$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$	$\frac{\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}$
-10	2.3×10^{-4}	474.1	2.1×10^{-3}	3.9×10^{-28}	2.2×10^{-2}
10	2.3×10^{-4}	550.5	1.8×10^{-3}	5.2×10^{-28}	2.2×10^{-2}
12	2.3×10^{-4}	369.0	2.7×10^{-3}	2.4×10^{-28}	2.2×10^{-2}
14	2.3×10^{-4}	280.4	3.6×10^{-3}	1.4×10^{-28}	2.2×10^{-2}
16	2.3×10^{-4}	208.4	4.8×10^{-3}	7.6×10^{-29}	2.2×10^{-2}
18	2.4×10^{-4}	163.7	6.1×10^{-3}	4.9×10^{-29}	2.3×10^{-2}
20	1.8×10^{-4}	162.3	6.2×10^{-3}	3.7×10^{-29}	2.3×10^{-2}
22	1.9×10^{-4}	129.3	7.7×10^{-3}	2.5×10^{-29}	2.3×10^{-2}
24	2.0×10^{-4}	95.9	1.0×10^{-2}	1.5×10^{-29}	2.4×10^{-2}
26	1.8×10^{-4}	89.6	1.1×10^{-2}	1.2×10^{-29}	2.4×10^{-2}
28	1.4×10^{-4}	96.9	1.0×10^{-2}	1.1×10^{-29}	2.4×10^{-2}
30	1.2×10^{-4}	95.9	1.0×10^{-2}	9.6×10^{-30}	2.4×10^{-2}
32	9.0×10^{-5}	91.7	1.1×10^{-2}	6.4×10^{-30}	2.4×10^{-2}
34	5.9×10^{-5}	85.6	1.2×10^{-2}	3.7×10^{-30}	2.5×10^{-2}
36	5.5×10^{-5}	81.8	1.2×10^{-2}	3.2×10^{-30}	2.5×10^{-2}
38	6.0×10^{-5}	87.2	1.1×10^{-2}	3.9×10^{-30}	2.5×10^{-2}
40	6.8×10^{-5}	87.2	1.1×10^{-2}	4.4×10^{-30}	2.5×10^{-2}
42	4.6×10^{-5}	101.5	9.8×10^{-3}	3.9×10^{-30}	2.4×10^{-2}
44	4.8×10^{-5}	80.2	1.2×10^{-2}	2.6×10^{-30}	2.5×10^{-2}
46	3.4×10^{-5}	73.9	1.4×10^{-2}	1.6×10^{-30}	2.6×10^{-2}
48	3.5×10^{-5}	72.1	1.4×10^{-2}	1.6×10^{-30}	2.6×10^{-2}
50	4.5×10^{-5}	79.0	1.3×10^{-2}	2.5×10^{-30}	2.5×10^{-2}
52	5.2×10^{-5}	87.5	1.1×10^{-2}	3.4×10^{-30}	2.5×10^{-2}
54	5.7×10^{-5}	84.4	1.2×10^{-2}	3.5×10^{-30}	2.5×10^{-2}
56	4.8×10^{-5}	84.4	1.2×10^{-2}	2.9×10^{-30}	2.5×10^{-2}
58	4.2×10^{-5}	78.6	1.3×10^{-2}	2.2×10^{-30}	2.5×10^{-2}
60	5.0×10^{-5}	75.7	1.3×10^{-2}	2.5×10^{-30}	2.5×10^{-2}

表 25 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積の誤差 2

$\Delta\theta$ [deg]	0.5	$\Delta\theta$ [deg]	1.0	
θ [deg]	$\Delta\left(\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}\right)$	$\frac{\Delta\left(\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}\right)}{\frac{d\Omega^{(\text{cm})}}{d\Omega^{(\text{lab})}}}$	$\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})} [\text{m}^2]$	$\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(\text{cm})}}$
-10	6.1×10^{-3}	6.1×10^{-3}	9.8×10^{-29}	2.2×10^{-2}
10	6.1×10^{-3}	6.1×10^{-3}	1.3×10^{-28}	2.2×10^{-2}
12	7.3×10^{-3}	7.3×10^{-3}	6.1×10^{-29}	2.2×10^{-2}
14	8.5×10^{-3}	8.5×10^{-3}	3.5×10^{-29}	2.2×10^{-2}
16	9.6×10^{-3}	9.6×10^{-3}	2.0×10^{-29}	2.2×10^{-2}
18	1.1×10^{-2}	1.1×10^{-2}	1.3×10^{-29}	2.3×10^{-2}
20	1.2×10^{-2}	1.2×10^{-2}	9.8×10^{-30}	2.3×10^{-2}
22	1.3×10^{-2}	1.3×10^{-2}	6.7×10^{-30}	2.3×10^{-2}
24	1.4×10^{-2}	1.4×10^{-2}	4.2×10^{-30}	2.4×10^{-2}
26	1.5×10^{-2}	1.5×10^{-2}	3.3×10^{-30}	2.5×10^{-2}
28	1.6×10^{-2}	1.6×10^{-2}	3.1×10^{-30}	2.4×10^{-2}
30	1.7×10^{-2}	1.7×10^{-2}	2.8×10^{-30}	2.5×10^{-2}
32	1.9×10^{-2}	1.9×10^{-2}	1.9×10^{-30}	2.5×10^{-2}
34	2.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	1.1×10^{-30}	2.5×10^{-2}
36	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	1.0×10^{-30}	2.6×10^{-2}
38	2.2×10^{-2}	2.2×10^{-2}	1.2×10^{-30}	2.5×10^{-2}
40	2.2×10^{-2}	2.2×10^{-2}	1.5×10^{-30}	2.6×10^{-2}
42	2.3×10^{-2}	2.3×10^{-2}	1.3×10^{-30}	2.5×10^{-2}
44	2.4×10^{-2}	2.4×10^{-2}	9.7×10^{-31}	2.6×10^{-2}
46	2.5×10^{-2}	2.5×10^{-2}	6.2×10^{-31}	2.7×10^{-2}
48	2.6×10^{-2}	2.6×10^{-2}	6.2×10^{-31}	2.8×10^{-2}
50	2.7×10^{-2}	2.7×10^{-2}	1.0×10^{-30}	2.7×10^{-2}
52	2.8×10^{-2}	2.8×10^{-2}	1.5×10^{-30}	2.7×10^{-2}
54	2.8×10^{-2}	2.8×10^{-2}	1.6×10^{-30}	2.7×10^{-2}
56	2.9×10^{-2}	2.9×10^{-2}	1.4×10^{-30}	2.8×10^{-2}
58	3.0×10^{-2}	3.0×10^{-2}	1.2×10^{-30}	2.9×10^{-2}
60	3.0×10^{-2}	3.0×10^{-2}	1.4×10^{-30}	3.0×10^{-2}

表 26 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積

$N_{\text{target}}[\text{m}^2]$	2.74×10^{22}		
$\Theta[\text{deg}]$	N_{beam}	N_{elastic}	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$
-10	4.54×10^{11}	218900	1.48×10^{-26}
10	4.70×10^{11}	280400	1.83×10^{-26}
12	4.58×10^{11}	133400	8.94×10^{-27}
14	5.16×10^{11}	79820	4.74×10^{-27}
16	4.67×10^{11}	43360	2.85×10^{-27}
18	4.76×10^{11}	28390	1.83×10^{-27}
20	4.87×10^{11}	19320	1.22×10^{-27}
22	4.97×10^{11}	13460	8.31×10^{-28}
24	4.88×10^{11}	9142	5.74×10^{-28}
26	6.24×10^{11}	8867	4.36×10^{-28}
28	7.36×10^{11}	8044	3.35×10^{-28}
30	9.54×10^{11}	8176	2.63×10^{-28}
32	1.20×10^{12}	8188	2.09×10^{-28}
34	1.64×10^{12}	9408	1.76×10^{-28}
36	1.58×10^{12}	7455	1.45×10^{-28}
38	1.91×10^{12}	7905	1.27×10^{-28}
40	2.26×10^{12}	8227	1.12×10^{-28}
42	2.12×10^{12}	6963	1.01×10^{-28}
44	2.29×10^{12}	7116	9.52×10^{-29}
46	2.37×10^{12}	6952	9.00×10^{-29}
48	2.28×10^{12}	6525	8.77×10^{-29}
50	2.43×10^{12}	6773	8.57×10^{-29}
52	2.30×10^{12}	6659	8.90×10^{-29}
54	2.17×10^{12}	6329	8.93×10^{-29}
56	2.12×10^{12}	6726	9.76×10^{-29}
58	2.16×10^{12}	7373	1.05×10^{-28}
60	1.75×10^{12}	6598	1.15×10^{-28}

表 27 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の微分断面積の誤差

$\Delta N_{\text{target}} [/\text{m}^2]$	5.8×10^{20}	$\frac{\Delta N_{\text{target}}}{N_{\text{target}}}$	2.1×10^{-2}	ΔN_{beam}	1.0×10^8
$\Theta [\text{deg}]$	$\frac{\Delta N_{\text{beam}}}{N_{\text{beam}}}$	$\Delta N_{\text{elastic}}$	$\frac{\Delta N_{\text{elastic}}}{N_{\text{elastic}}}$	$\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})} [\text{m}^2]$	$\frac{\Delta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\text{lab})}}$
-10	2.3×10^{-4}	153.5	7.0×10^{-4}	3.3×10^{-28}	2.2×10^{-2}
10	2.2×10^{-4}	134.0	4.8×10^{-4}	4.0×10^{-28}	2.2×10^{-2}
12	2.3×10^{-4}	113.9	8.5×10^{-4}	2.0×10^{-28}	2.2×10^{-2}
14	2.0×10^{-4}	71.2	8.9×10^{-4}	1.0×10^{-28}	2.2×10^{-2}
16	2.2×10^{-4}	57.3	1.3×10^{-3}	6.3×10^{-29}	2.2×10^{-2}
18	2.2×10^{-4}	50.3	1.8×10^{-3}	4.0×10^{-29}	2.2×10^{-2}
20	2.1×10^{-4}	48.0	2.5×10^{-3}	2.7×10^{-29}	2.2×10^{-2}
22	2.1×10^{-4}	44.4	3.3×10^{-3}	1.9×10^{-29}	2.2×10^{-2}
24	2.1×10^{-4}	42.0	4.6×10^{-3}	1.3×10^{-29}	2.3×10^{-2}
26	1.7×10^{-4}	42.5	4.8×10^{-3}	9.8×10^{-30}	2.3×10^{-2}
28	1.4×10^{-4}	43.2	5.4×10^{-3}	7.6×10^{-30}	2.3×10^{-2}
30	1.1×10^{-4}	40.2	4.9×10^{-3}	5.9×10^{-30}	2.3×10^{-2}
32	8.7×10^{-5}	43.5	5.3×10^{-3}	4.7×10^{-30}	2.3×10^{-2}
34	6.3×10^{-5}	50.0	5.3×10^{-3}	4.0×10^{-30}	2.3×10^{-2}
36	6.6×10^{-5}	48.6	6.5×10^{-3}	3.3×10^{-30}	2.3×10^{-2}
38	5.4×10^{-5}	52.9	6.7×10^{-3}	2.9×10^{-30}	2.3×10^{-2}
40	4.6×10^{-5}	56.6	6.9×10^{-3}	2.6×10^{-30}	2.3×10^{-2}
42	4.9×10^{-5}	54.4	7.8×10^{-3}	2.4×10^{-30}	2.3×10^{-2}
44	4.5×10^{-5}	56.5	7.9×10^{-3}	2.2×10^{-30}	2.3×10^{-2}
46	4.4×10^{-5}	57.4	8.3×10^{-3}	2.1×10^{-30}	2.4×10^{-2}
48	4.6×10^{-5}	55.8	8.5×10^{-3}	2.1×10^{-30}	2.4×10^{-2}
50	4.3×10^{-5}	57.4	8.5×10^{-3}	2.0×10^{-30}	2.4×10^{-2}
52	4.5×10^{-5}	55.8	8.4×10^{-3}	2.1×10^{-30}	2.4×10^{-2}
54	4.8×10^{-5}	53.3	8.4×10^{-3}	2.1×10^{-30}	2.4×10^{-2}
56	4.9×10^{-5}	53.3	7.9×10^{-3}	2.3×10^{-30}	2.3×10^{-2}
58	4.8×10^{-5}	53.4	7.2×10^{-3}	2.4×10^{-30}	2.3×10^{-2}
60	5.9×10^{-5}	47.7	7.2×10^{-3}	2.7×10^{-30}	2.3×10^{-2}

p.37:補正について 6.2.3 節において述べた方法での計算

表 28 入射粒子数の比

Θ [deg]	scaler2	scaler2 $\times \frac{Q_F}{Q_s}$	scaler3	$\frac{\text{scaler2}}{\text{scaler3}} \times \frac{Q_F}{Q_s}$
-10	100	1257.4	2135	0.59
10	100	1257.4	2044	0.62
12	100	1257.4	2050	0.61
14	100	1257.4	1979	0.64
16	100	1257.4	1987	0.63
18	100	1257.4	1975	0.64
20	100	1257.4	1966	0.64
22	100	1257.4	1819	0.69
24	106	1332.9	1935	0.69
26	150	1886.1	2874	0.66
28	254	3193.8	4888	0.65
30	356	4476.4	7002	0.64
32	418	5256.0	8451	0.62
34	279	3508.2	5510	0.64
36	331	4162.0	6670	0.62
38	518	6513.4	11394	0.57
40	2329	29285.1	46261	0.63
42	1725	21690.3	34196	0.63
44	797	10021.6	15859	0.63
46	498	6261.9	9964	0.63
48	714	8977.9	14361	0.63
50	712	8952.8	14148	0.63
52	1477	18572.0	29433	0.63
54	2304	28970.8	45620	0.64
56	1803	22671.1	35806	0.63
58	875	11002.3	17507	0.63
60	850	10688.0	16618	0.64