

平成 24 年度前期物理学課題演習 A5 レポート
同種粒子散乱の微分断面積による粒子スピンの決定

天野 玲 一ノ瀬 友宏 舘野 道雄 寺尾 顕一 萩原 慶一 廣島 渚

2012 年 11 月 12 日

目次

1	abstract	3
2	理論	4
2.1	量子力学における同種粒子の取り扱い	4
2.1.1	fermion と boson	4
2.1.2	複合粒子の統計性	4
2.1.3	同種 2 粒子からなる系	5
2.2	散乱	6
2.2.1	断面積	6
2.2.2	部分波展開と微分断面積	7
2.2.3	Coulomb 散乱	8
2.2.4	Mott の公式	12
2.2.5	Blair 模型	13
2.3	運動学について	16
2.3.1	力学計算	16
2.3.2	Bethe-Bloch の公式	19
3	実験	24
3.1	手順と概要	24
3.1.1	概要	24
3.1.2	実験装置	24
3.1.3	実験の手順	25
4	結果及び考察	29
4.1	Bethe-Bloch 式の補正項についての本実験での評価	29
4.2	薄膜厚さ測定	29
4.3	本実験	31
4.4	散乱断面積の決定	31
4.5	異種粒子散乱	34
4.5.1	各種補正について	34
4.5.2	Rutherford 模型による検討	34
4.6	同種粒子散乱	36
4.6.1	Mott 式による検討	36
4.6.2	Mott の式を用いることの妥当性について	39
4.7	定数倍補正についての考察	40
4.8	不純物の同定	41
4.8.1	不純物として考えられるもの	41
4.8.2	同定方法	41

4.8.3	結果と考察	44
4.8.4	マイナス側の角度での結果について	46
5	補足	47
6	conclusion	48
	参考文献	49
	謝辞	49
	データ及び計算結果	50
	解析に用いたプログラム	58

1 abstract

自然界には様々な対称性が存在する。量子力学においてスピンの粒子 boson と 半整数の粒子 fermion が示す対称性はその代表例であり、同種粒子の交換に対して boson は対称、fermion は反対称となることに起因して多様な現象が生じる。具体的には、同種粒子散乱実験ではその粒子が boson であるか fermion であるか、すなわち粒子のもつスピンの値によって微分散乱断面積に変化が生じる。

課題演習 A5 においては、加速器を用いた $^{12}C - ^{12}C$ 散乱実験、 $^{13}C - ^{13}C$ 散乱実験を実施し、その微分散乱断面積から ^{12}C 、 ^{13}C の粒子のスピンを決定した。さらに、異種粒子散乱実験により同種粒子の対称性による干渉効果のない場合の散乱断面積との違いを確認した。

2 理論

2.1 量子力学における同種粒子の取り扱い

2.1.1 fermion と boson

同じ種類の粒子が複数存在する系を考える。古典力学的には、2つの粒子が同種であるということはそれらの粒子の持つ属性(質量や電荷など)がたまたま等しいという以上の意味をもたず、原理的には互いに区別することができる。しかし、量子力学では系の状態は状態ベクトルによって完全に指定されているため、2つの同種粒子を入れ替えてできた状態はもとの状態と全く同じであると考えられ2つの状態が区別ができない。

種類 a の粒子が N_a 個存在する系を考える。各粒子の位置 \mathbf{r} およびスピンの z 成分 s_z をまとめて ξ と書き、各種類の粒子の座標を $\xi_1^{(a)}$ 、 $\xi_2^{(a)}$ 、 \dots 、 $\xi_{N_a}^{(a)}$ で表すと、系の波動関数は、

$$\psi(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{N_1}^{(1)}; \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_{N_2}^{(2)}; \xi_1^{(3)}, \dots, \xi_{N_3}^{(3)}; \dots) \quad (1)$$

と書ける。

次に、同じ種類の粒子を入れ替える演算子 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ を導入する。ここで $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ は第 a の種類の粒子のうち、 i 番目と j 番目のものを入れ替える演算子とする。ここで任意の $1 \leq i, j \leq N_a$ に対して状態ベクトル ψ と $\hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi$ は同じ状態を表していると考えられるので、ある定数 c を用いて

$$\hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi = c\psi \quad (i \neq j) \quad (2)$$

となるべきである。 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ は2つの粒子を入れかえる演算子であるから、 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ を2回作用させたものは恒等演算子である。すなわち、 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ は、

$$(\hat{P}_{i,j}^{(a)})^2 = \hat{1} \quad (3)$$

を満たしており、その固有値 c は $+1$ または -1 のいずれかでなければならない。そのうちのどちらをとるかは粒子の種類ごとに決まっているはずなので、(2)の条件は、

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi &= c^{(a)}\psi \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, N_a) \\ c^{(a)} &= +1, -1 \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける。

また(4)の条件は、系の時間発展と矛盾しない。これは、系のハミルトニアン \hat{H} は同種の2つの粒子を入れかえても形を変えない:

$$\hat{P}_{i,j}^{(a)}\hat{H}\hat{P}_{i,j}^{(a)} = \hat{H} \quad (5)$$

ことから $c^{(a)}$ は時間によらないことがわかる。

$c^{(a)}$ の値は粒子の種類によって決まっており、実験的に求めることができる。 $c^{(a)}=+1$ である粒子を boson とよび、 $c^{(a)}=-1$ である粒子を fermion とよぶ。電子、陽子、中性子などのスピンの半整数の粒子は fermion であり、一方、 α 粒子、中間子、光子などスピンの整数の粒子は boson であることが分かっている。

2.1.2 複合粒子の統計性

原子や原子核のように、いくつかの粒子からなる系の基底状態であるような複合粒子を考える。複合粒子を励起するのに必要なエネルギーに比べて、十分に低いエネルギー領域では、複合粒子をあたかも基本粒子のように扱ってもさしつかえない。すなわち、いくつかの複合粒子からなる系の波動関数は、それぞれの粒子の重心座標およびスピンの z 成分の関数として表せる。

いま考えている複合粒子が、 N_F 個の fermion と N_B 個の boson からできているとする。このとき、2 つの複合粒子を入れかえるということは、それぞれの構成要素を入れかえることと同義なので、波動関数には因子 $(-1)^{N_F}$ がかかる。すなわち、boson の個数には関係なく、偶数個の fermion を含むような複合粒子は boson であり、奇数個の fermion を含むような複合粒子は fermion である。

2.1.3 同種 2 粒子からなる系

今回の実験では 2 粒子系でポテンシャルが中心力の場合の散乱を考える。そのため同じ種類の 2 つの粒子の間に中心力が働いているような系を考える。2 つの粒子の位置、運動量、スピンの演算子を $\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{s}}_i (i = 1, 2)$ とすると、ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + V(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|) \quad (6)$$

と書ける。重心座標、相対座標およびそれらの正準共役量を $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{p}}$ とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}}_1 + \hat{\mathbf{r}}_2) \\ \hat{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 \\ \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2) \end{aligned} \quad (7)$$

であるが、これらを使って \hat{H} を書きなおすと、

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \quad (8)$$

となり、重心運動と相対運動に分離される。ここで、 $M = 2m, \mu = \frac{m}{2}$ は、それぞれ粒子の全質量および換算質量である。

つぎに、波動関数を重心運動と相対運動に分離して、

$$\phi(\mathbf{r}_1, s_1^z; \mathbf{r}_2, s_2^z) = \phi_{CM}(\mathbf{R})\phi_{rel}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) \quad (9)$$

の形に書く。ここで、 s_1^z, s_2^z は 2 つの粒子のスピンの z 成分である。そうするとエネルギー固有値方程式

$$\hat{H}\phi = E\phi \quad (10)$$

は、

$$\hat{H}_{CM}\phi_{CM} = E_{CM}\phi_{CM}, \quad \hat{H}_{CM} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} \quad (11)$$

$$\hat{H}_{rel}\phi_{rel} = E_{rel}\phi_{rel}, \quad \hat{H}_{rel} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \quad (12)$$

$$E = E_{CM} + E_{rel} \quad (13)$$

の形に変数分離される。

2 つの粒子が同種粒子の場合には、波動関数にスピン統計性の条件

$$\phi(\mathbf{r}_1, s_1^z; \mathbf{r}_2, s_2^z) = c \phi(\mathbf{r}_2, s_2^z; \mathbf{r}_1, s_1^z) \quad (14)$$

が課される。ここで考えている粒子が boson のときは $c = 1$ 、fermion のときは $c = -1$ である。2 つの粒子の入れかえに対して、重心座標 $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}}_1 + \hat{\mathbf{r}}_2)$ は不変であるが、相対座標 $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2)$ は符号が変わることに注意すると、スピン統計性の条件は重心運動に対しては何ら制約を与えないが、相対運動に対しては、

$$\phi_{rel}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = c \phi_{rel}(-\mathbf{r}, s_2^z, s_1^z) \quad (15)$$

という条件を課していることが分かる。以下では (14) をみたく ϕ_{rel} に対して、相対運動の固有値方程式 (12) について考える。

相対運動のハミルトニアン \hat{H}_{rel} がスピン演算子 $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2$ を含まない場合には、相対運動の波動関数 ϕ_{rel} を \mathbf{r} に依存する部分と、スピン s_1^z, s_2^z に依存する部分に分離して、

$$\phi_{rel}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z) \quad (16)$$

の形に書いておくとよい。そうすると、固有値方程式 (12) は、

$$\hat{H}_{rel}f = E_{rel}f, \quad \hat{H}_{rel} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \quad (17)$$

となり、統計性の条件 (15) は、

$$f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z) = cf(-\mathbf{r})\chi(s_2^z, s_1^z) \quad (18)$$

と表される。

(18) は中心力の 1 体問題とおなじであり、角運動量を対角化することによって解くことができる。すなわち、 $f(\mathbf{r})$ は、球面調和関数と動径波動関数の積の形

$$f(\mathbf{r}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (19)$$

にかける。ここで、球面調和関数 $Y_{l,m}$ のパリティが $(-1)^l$ であることを用いると、軌道角運動量の大きさが l であるような状態に対しては、

$$f(-\mathbf{r}) = (-1)^l f(\mathbf{r}) \quad (20)$$

であることがわかる。これを (18) に代入すると、

$$\chi(s_1^z, s_2^z) = (-1)^l c\chi(s_2^z, s_1^z) \quad (21)$$

が得られるが、これは、重心の周りの軌道角運動量 l とスピン部分の波動関数の対称性に関係がついていることを示している。

2.2 散乱

2.2.1 断面積

粒子の散乱実験で粒子特有の性質を表すものの一つとして微分断面積というものがある。これは、単位時間当たりに入射する入射粒子の個数を N_i 、散乱体の単位面積当たりの個数を n 、単位時間当たりの立体角 $d\Omega$ あたりに散乱する散乱粒子の個数を N_s とした時に

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{N_s}{N_i n d\Omega}$$

として定義されるものである。

今、入射粒子の進行方向を z 軸に取り、散乱体の一部にしか当たらないとする。散乱体は密度一様で、かつ厚さは十分に薄いとすると多重散乱が起きないとする。また入射粒子、散乱体の粒子のどちらもそれぞれの中で互いに相互作用をしないと考える。ここで単位面積を散乱体の単位面積当たりの個数 n で割った面積を考える。このときにこの面積を通る入射粒子は一様であると仮定する。これは入射粒子のビームの $x-y$ 平面で切った断面を散乱体の粒子が 1 個占める面積で分割するということである。このとき分割それぞれについての添え字を i とすると、各 x_i でのビーム強度は $J(x_i)$ とかける。1 つの i を選び、この領域で考えたときの散乱粒子の強度を $J_s(x_i)$ としたとき、

$$J_s(x_i) = J(x_i) \frac{d\sigma_i}{d\Omega} d\Omega$$

での $\frac{d\sigma_i}{d\Omega}$ が微分断面積であるとする。するとこの微分断面積は、同じ標的粒子に対する入射粒子 1 個の値である。ここでこの微分断面積が $J(x_i)$ の実数倍で変化しないとする。(これは入射粒子が一樣に入射しているという仮定から妥当である。) すると、すべての i について $\frac{d\sigma_i}{d\Omega}$ は同じであり、 i について足しあげると $\sum_i J(x_i) = N_i$ より $\sum_i J_s(x_i) = N_s$ であるので、微分断面積は

$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \frac{N_s}{N_i d\Omega}$$

となる。単位面積あたりに直すと

$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \frac{N_s}{N_i n d\Omega}$$

となり、この微分断面積は上で定義されたものと同じである。

これにより微分断面積は散乱体の個数を 1 として考えて、ビームの強度を 1 にした場合でも同じであることが分かる。よって以後 1 対 1 の散乱を考えることにする。また重心系を考えると 2 体問題を 1 体問題にすることができ、物事が見やすくなる。よって以後重心系で考える。

2.2.2 部分波展開と微分断面積

ここでは、Coulomb 場での散乱問題は考えず相互作用が短距離で働くような散乱問題を考える。今、散乱体の面の位置を $z = 0$ として、入射粒子は平面波であると仮定する。つまり、

$$\psi_i = e^{ikz} \quad (22)$$

とする。これは、 z 軸方向を $\theta = 0$ とし、原点からの距離を r としたときに

$$\psi_i = e^{ikr \cos \theta} \quad (23)$$

と書ける。ここで Rayleigh の公式を使うと (これは ψ_i が $\Delta\psi_i = -k^2\psi_i$ の解であることから示せる)、

$$\psi_i = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (24)$$

となる。ここで、 $j_l(x)$ は原点で正則な球面 Bessel 関数であり、 $P_l(x)$ は Legendre 多項式である。

$$j_l(\rho) = (-1)^l \rho^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho} \quad (25)$$

とあらわせるので $\rho \rightarrow \infty$ のときは ρ の次元が一番高いものを考えると

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}l\pi)}{kr} \\ &= \frac{e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}}{2ikr} \end{aligned} \quad (26)$$

となることが分かる。よって入射波は、

$$\psi_i \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \{ e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \} \quad (27)$$

となる。

いま、ポテンシャルが球対称でポテンシャルの影響が標的粒子の近傍でのみ大きいとする。散乱波が l ごとに $\eta_l e^{2i\delta}$ をかけるだけ修正されるとすると $r \rightarrow \infty$ での波動関数全体は

$$\psi_t \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \{ \eta_l e^{2i\delta_l} e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \} \quad (28)$$

となる。ここで $|\eta_l|$ は弾性度と呼ばれ、 $|\eta_l| \leq 1$ である。また δ_l は位相のずれと呼ばれる。これは散乱の後に弾性散乱でないものも交じることもあるため弾性度というものを導入し、散乱されることにより入射波の位相もずれると考えられるので δ_l を導入しているということである。また散乱波は、この全体の波動関数から入射波を引いたものであるので、

$$\psi_s \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1) e^{ikr} \quad (29)$$

となる。これは $r \rightarrow \infty$ で

$$\psi_t = \psi_i + \psi_s \quad (30)$$

$$= e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (31)$$

と書くことができる。ここで $f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれるものである。

つぎに微分断面積を考える。入射粒子の flux は 1 としているので散乱粒子の r 地点で立体角 $d\Omega$ での flux は $\frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2 \cdot r^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega$ となり入射粒子に対する微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (32)$$

となる。

2.2.3 Coulomb 散乱

上では、相互作用が短距離でしか働かないと考えていたが Coulomb 力は r^{-1} に比例する力であるので短距離の相互作用でなくなり入射波、散乱波の形が変わってくる。Coulomb 相互作用での重心系に対しての Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \phi(\mathbf{r}) = E \phi(\mathbf{r}) \quad (33)$$

である。ここで換算質量 m 、2 粒子間の距離 r 、誘電率 ϵ_0 とし、それぞれの粒子の電荷を Z_1, Z_2 とおいた。 E は相対エネルギーである。この式は、

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2k\gamma}{r} \right) \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \gamma = \frac{m Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 k} \right) \quad (34)$$

と書き直せて、

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{ikz} f(r-z) \quad (35)$$

として、 $u = r - z$ とおくと

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \gamma k \right] f(u) = 0 \quad (36)$$

さらに $x = iku$ と変数変換して、

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (1 - x) \frac{d}{dx} + i\gamma \right] f(x) = 0 \quad (37)$$

となる。この方程式は無次元化されているので次元を考えずに単に数学で考える方程式としてよい。この方程式の解は合流型超幾何関数で書けて、原点で正則な解は

$$\phi_c = A e^{ikz} F(-i\gamma | 1 | ik(r-z)) \quad (38)$$

と書ける。これを一般的に

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (b-x) \frac{d}{dx} - a \right] f(x) = 0 \quad (39)$$

という微分方程式にしてこの方程式の解を Laplace 変換でもとめる。

$$f(x) = F(a|b|x) = \int_C dz e^{zx} v(z) \quad (40)$$

とし、これを式 (39) に代入すると

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (b-x) \frac{d}{dx} - a \right] f(x) = \int_C dz v(z) \left((z^2 - z) \frac{d}{dz} + bz - a \right) e^{xz} \quad (41)$$

部分積分すると

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (b-x) \frac{d}{dx} - a \right] f(x) = [(z^2 - z)e^{xz}v(z)]_C + \int_C dz \left(-(z^2 - z) \frac{dv}{dz} + ((b-2)z - a + 1)v(z) \right) e^{xz} \quad (42)$$

より、この右辺の式が 0 になれば良い。

積分の中身を 0 とおいた微分方程式の解は $v_0(a, b)$ を定数として

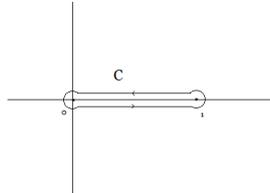
$$v(z) = v_0(a, b) z^{a-1} (1-z)^{b-a-1} \quad (43)$$

とかけることから、(39) の解は

$$F(a|b|x) = v_0(a, b) \int_C dz e^{zx} z^{a-1} (1-z)^{b-a-1} \quad [z^{a-1}(1-z)^{b-a-1}e^{xz}]_C = 0 \quad (44)$$

となる。

a が整数でなく、 b が正の整数であるときは C を 0 と 1 を結ぶ線分を 1 周する閉曲線とし、分岐は 0 と 1 を結ぶ線分とする。このとき C はちゃんと $[z^{a-1}(1-z)^{b-a-1}e^{xz}]_C = 0$ を満たしている。



この時 $F(a|b|0) = 1$ となるように v_0 を決める。これは Beta 関数より、 $Re(p) > 0$ で、 $Re(q) > 0$ で、 $p+q$ が整数であるとき

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{1}{1 - e^{2\pi i q}} \int_C dz z^{p-1} (1-z)^{q-1} \quad (45)$$

であるので

$$v_0(a, b) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi i a}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \quad (46)$$

となる。よって合流型超幾何関数は

$$F(a|b|x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi i a}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_C dz e^{xz} z^{a-1} (1-z)^{b-a-1} \quad (47)$$

とかける。これは収束しているので $Re(a) = 0$ でも成立する。

ここで積分経路を変更すると、 $(0 \rightarrow 1)$ の間を $x = |x|e^{i\theta}$ のとき $\pi - \theta$ 方向に無限大まで伸ばすような経路にし、分岐は経路の伸ばす方向で $\arg(xz)$ が $\pm\pi$ となるように決める。

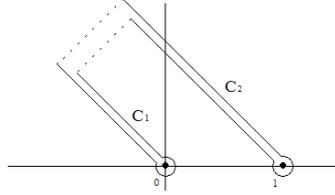
このとき図の破線部は積分には寄与しないのでこの合流型超幾何関数は2つの部分に分けられて

$$F(a|b|x) = W_1(a|b|x) + W_2(a|b|x) \quad (48)$$

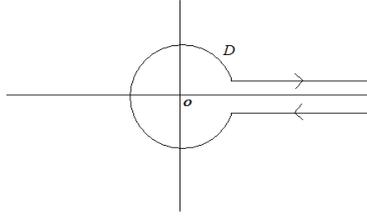
$$W_k(a|b|x) = v_0(a, b) \int_{C_k} dz e^{xz} z^{a-1} (1-z)^{b-a-1} \quad (k = 1, 2) \quad (49)$$

$$(50)$$

とかけ、境界条件 $[z^{a-1}(1-z)^{b-a-1}e^{xz}]_{C_k} = 0$ が成り立つ。($v_0(a, b) = \frac{1}{1-e^{-2\pi ia}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}$ とした C_k は $k = 1$ のほうが $z = 0$ を回るもので $k = 2$ のほうは $z = 1$ を回る積分経路である)



積分変数を $u = -xze^{2\pi i}$ と変更すれば積分経路が実軸周りで $z = \infty$ から $z = 0$ にきて $z = \infty$ に行く経路になる。この経路を D とかくと、



$$\begin{aligned} W_1(a|b|x) &= v_0(a, b) (-x)^{-a} e^{-2\pi ia} \int_D du e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{b-a-1} \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-x)^{-a} \frac{1}{(e^{2\pi ia} - 1)\Gamma(a)} \int_D du e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{b-a-1} \end{aligned} \quad (51)$$

となり、また $u = x(1-z)$ とすると

$$\begin{aligned} W_2(a|b|x) &= -v_0(a, b) e^x x^{a-b} \int_D du e^{-u} u^{b-a-1} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a-1} \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \frac{1}{(e^{2\pi i(b-a)} - 1)\Gamma(b-a)} \int_D du e^{-u} u^{b-a-1} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a-1} \end{aligned} \quad (52)$$

である。ここで

$$g(a, b, x) = \frac{1}{(e^{2\pi ia} - 1)\Gamma(a)} \int_D du e^{-u} u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{-b} \quad (53)$$

とすると

$$W_1(a|b|x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-x)^{-a} g(a|a+1-b|x) \quad (54)$$

$$W_2(a|b|x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} g(b-a|1-a|x) = e^x W_1(b-a|b|x) \quad (55)$$

となる。また $(c)_k = \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)}$ と定義する。 x が整数でない時には

$$\Gamma(x) = \frac{1}{e^{2\pi i x} - 1} \int_D dz e^{-z} z^{x-1} \quad (56)$$

$$(1-y)^{-c} = \sum_{k=0}^n \frac{(c)_k}{k!} y^k + O(y^{n+1}) \quad (57)$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} g(a|b|x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(b)_k}{k!} \frac{1}{x^k} \frac{1}{(e^{2\pi i a} - 1)\Gamma(a)} \int_D du e^{-u} u^{a+k-1} + O(x^{-n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (b)_k}{k!} \frac{1}{x^k} + O(x^{-n-1}) \\ &= 1 + \frac{ab}{x} + O(x^{-2}) \end{aligned} \quad (58)$$

となることから、

$$\begin{aligned} F(a|b|x) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-x)^{-a} \left(1 - \frac{a(a+1-b)}{x} + O(x^{-2}) \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \left(1 + \frac{(1-a)(b-a)}{x} + O(x^{-2}) \right) \end{aligned} \quad (59)$$

を得る。

よって、 $|r-z| \rightarrow \infty$ のとき、 $A = \Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{\pi\gamma}{2}}$ とし (これは規格化条件である)、 $r-z = 2r \sin^2(\frac{\theta}{2})$ とおくと、

$$\phi_c(\mathbf{r}) \xrightarrow{|r-z| \rightarrow \infty} \phi_i(\mathbf{r}) + \phi_s(\mathbf{r}) \quad (60)$$

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \exp(ikz + i\gamma \log k(r-z))(1 + O(|r-z|^{-1})) \quad (61)$$

$$\phi_s(\mathbf{r}) = f_c(\theta) \frac{\exp(ikr - i\gamma \log 2kr)}{r} (1 + O(|r-z|^{-1})) \quad (62)$$

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2(\frac{\theta}{2})} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} \exp\left(-i\gamma \log \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (63)$$

であり、ここで $\Gamma(1+i\gamma) = |\Gamma(1+i\gamma)|e^{i\sigma_0}$ とおくと $(\Gamma(1+i\gamma))^* = \Gamma(1-i\gamma)$ より

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2(\frac{\theta}{2})} \exp\left(-i\gamma \log\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0\right) \quad (64)$$

となる。

ここで $\phi_i(\mathbf{r})$ との確率流を求めると

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i &= \frac{\hbar}{2im} 2i \text{Im}(\phi_i(\nabla\phi_i)) \\ &= \frac{\hbar}{m} \left(k\hat{z} + \gamma \frac{\hat{r} - \hat{z}}{r-z} \right) |\phi_i|^2 + O(|r-z|^{-2}) \\ &\xrightarrow{|r-z| \rightarrow \infty} \frac{\hbar k}{m} \hat{z} \end{aligned} \quad (65)$$

ここで \hat{z} は z 方向、 \hat{r} は r 方向の単位ベクトルである。上の式より ϕ_i は入射波と考えてもよい。次に ϕ_s の確率流をみると

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \frac{\hbar k}{m} |\phi_s|^2 (1 + O(r^{-1})) \hat{r} \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\hbar k}{m} \frac{|f_c|^2}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \quad (66)$$

となるので ϕ_s は散乱波、 f_c は散乱振幅と見なすことができる。よって入射波の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (67)$$

となる。

2.2.4 Mott の公式

重心系でみると入射粒子の散乱断面積を $\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(1)} = |f_i(\theta, \varphi)|^2$ とすると標的粒子の散乱断面積は $\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(2)} = |f_t(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2$ となる。衝突する2つの粒子が同種粒子である場合この2つの粒子は区別できないため、散乱振幅を変更して考えなければならない。このとき散乱振幅は合成 spin を S としたときに

$$\hat{f}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f(\theta, \varphi) + (-1)^S f(\pi - \theta, \varphi + \pi)) \quad (68)$$

とすればよい。よって散乱断面積は、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}^{(1)} &= |\hat{f}(\theta, \varphi)|^2 \\ &= \frac{1}{2}|f(\theta, \varphi) + (-1)^S f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 \end{aligned} \quad (69)$$

よって検出器で観測できる散乱断面積は入射粒子と標的粒子の足し合わせであるので

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{d\Omega}^{(1)} + \frac{d\sigma}{d\Omega}^{(2)} \\ &= |f(\theta, \varphi) + (-1)^S f(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 \end{aligned} \quad (70)$$

となる。

次に半整数スピン s を持つ粒子の散乱を考えるとこの粒子は fermion である。スピンの合成で $2s$ (奇数) のスピンは対称でありそこからスピンが1ずつ減らしていくと波動関数の置換にたいして対称反対称が交互に出てくる。(これは Clebsch-Gordan 係数の対称性 $(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} (j_2, m_2, j_1, m_1 | j, m \rangle$ から従う。) この粒子は fermion であるので入れ替えに対して反対称である。よってこの散乱で波動関数が対称になる確率は $\frac{s}{2s+1}$ 、反対称になる確率は $\frac{s+1}{2s+1}$ であるので微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{2s+1}|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 + \frac{s+1}{2s+1}|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 \quad (71)$$

となる。もしスピン s が整数であった場合この粒子は boson でありこのときの散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s+1}{2s+1}|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 + \frac{s}{2s+1}|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 \quad (72)$$

となる。

Mott の公式は上の式で任意のスピン s での Coulomb 散乱を考えた場合の公式で、電荷を Z とすると、 $\sin^{-4}(\theta/2) + \cos^{-4}(\theta/2) = 8 \frac{1+\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$ を使って

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} - \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{mZ^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 k} \log \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^4\theta} + \frac{(-1)^{2s}}{2s+1} \frac{1}{\sin^2\theta} \cos \left(\frac{mZ^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 k} \log \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (73)$$

と書かれるものである。

2.2.5 Blair 模型

この模型は核ポテンシャルの影響によって散乱するときに波動関数の部分波が吸収されるというものである。Coulomb ポテンシャルでの波動関数を ψ_c とした時にこれを部分波展開して

$$\psi_c = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varphi_l(\gamma; kr)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (74)$$

と書くと、 φ_l が満たす方程式は式 (74) を式 (34) に代入して l ごとに考えることにより

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial r^2} + \left(k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi_l = 0 \quad (75)$$

となる。ここで

$$\varphi_l = e^{ikr} (kr)^{l+1} u_l \quad x = -2ikr \quad (76)$$

とすると方程式は

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (2l+2-x) \frac{d}{dx} - (l+1+i\gamma) \right] u_l = 0 \quad (77)$$

となり合流型超幾何方程式となる。これは式 (39) で $b \rightarrow 2l+2$ 、 $a \rightarrow l+1+i\gamma$ としたものである。よって原点で正則な解は C_l を定数として

$$\begin{aligned} u_l(kr) &= C_l F(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) \\ &= C_l (W_1(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) + W_2(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr)) \\ &= C_l e^{-ikr} (e^{ikr} W_1(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) + e^{-ikr} W_1(l+1-i\gamma|2l+2|2ikr)) \\ &= 2C_l e^{-ikr} \operatorname{Re}(e^{ikr} W_1(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr)) \end{aligned} \quad (78)$$

と書くことができる。ここで

$$\sigma_l = \arg(\Gamma(l+1+i\gamma)) \quad (79)$$

とした。また

$$\begin{aligned} g_l(\gamma, kr) &= g(l+1+i\gamma|-l+i\gamma|2ikr) \\ &= 1 + \frac{\gamma + i(l^2 + l + \gamma^2)}{2kr} + O(kr^{-2}) \end{aligned} \quad (80)$$

とすると式 (54) より

$$W_1(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) = \frac{(2l+1)! e^{\frac{\pi\gamma}{2}}}{|\Gamma(l+1+i\gamma)|} \frac{e^{-i\gamma \log 2kr - i(l+1)\frac{\pi}{2} + i\sigma_l}}{(2kr)^{l+1}} g_l(\gamma, kr) \quad (81)$$

である。すると、 φ_l の方程式の解の一つの解を $F_l(\gamma; kr)$ として、これは

$$\begin{aligned} F_l(\gamma; kr) &= C_l e^{ikr} (kr)^{l+1} F(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) \\ &= 2C_l (kr)^{l+1} \operatorname{Re}(e^{ikr} W_1(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr)) \\ &= \operatorname{Im}[g_l(\gamma, kr) e^{i(kr - \gamma \log 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l)}] \end{aligned} \quad (82)$$

と書ける。ここで

$$C_l = \frac{2^l |\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!} e^{-\frac{\pi\gamma}{2}} \quad (83)$$

とした。よって

$$F_l(\gamma, kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \sin\left(kr - \gamma \log 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) \quad (84)$$

となることから、 $kr \rightarrow 0$ のとき $F_l(\gamma, kr) \rightarrow C_l(kr)^{l+1}$ となるのが分かる。これより定数 B_l を用いると、

$$A_c e^{ikz} F(-i\gamma|1|ik(r-z)) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} B_l F_l(\gamma; kr) P_l(\cos \theta) \quad (85)$$

と書ける。ここで $A_c = \Gamma(1+i\gamma)e^{-\frac{l\pi}{2}}$ とした上の式に $P_l(\cos \theta)$ をかけて $x = \cos \theta$ として積分すると

$$B_l \frac{F_l(\gamma, kr)}{kr} = A_c \frac{2l+1}{2^{l+1}l!} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^l \frac{d^l}{dx^l} e^{ikrx} F(-i\gamma|1|ikr(1-x)) \quad (86)$$

となる。式 (47) より

$$\begin{aligned} e^{ikrx} F(-i\gamma|1|ikr(1-x)) &= v_0(-i\gamma, 1) \int_C dt e^{ikrx+ikr(1-x)t} t^{-i\gamma-1} (1-t)^{i\gamma} \\ &= v_0(-i\gamma, 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikr)^n}{n!} \int_C dt (t+(1-t)x)^n t^{-i\gamma-1} (1-t)^{i\gamma} \end{aligned} \quad (87)$$

なので、

$$B_l \frac{F_l(\gamma, kr)}{kr} = A_c \frac{2l+1}{2^{l+1}l!} v_0(-i\gamma, 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikr)^n}{n!} \int_C dt t^{-i\gamma-1} (1-t)^{i\gamma} f_n(t) \quad (88)$$

となる。ここで

$$f_n(t) = \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^l \frac{d^l}{dx^l} (t+(1-t)x)^n \quad (89)$$

とした。また $kr \rightarrow \infty$ で $F_l(\gamma, kr) \rightarrow C_l(kr)^{l+1}$ であるので $n=l$ のみを考えると微分の部分は x の最高次だけ出ることから

$$\begin{aligned} f_l(t) &= (1-t)^l l! \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^l \\ &= (1-t)^l l! \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!} \end{aligned} \quad (90)$$

となり係数 B_l は

$$B_l = \frac{A_c (2i)^l l!}{C_l (2l)!} v_0(-i\gamma, 1) \int_C dt t^{-i\gamma-1} (1-t)^{l+i\gamma} \quad (91)$$

を満たす。式 (47) は $x=0$ で規格化されていたので

$$1 = F(-i\gamma|l+1|0) = v_0(-i\gamma, l+1) \int_C dt t^{-i\gamma-1} (1-t)^{l+i\gamma} \quad (92)$$

であることが分かり、式 (46) を使うと

$$B_l = \frac{A_c (2i)^l l!}{C_l (2l)!} \frac{v_0(-i\gamma, 1)}{v_0(-i\gamma, l+1)} = (2l+1) i^l e^{\sigma_l} \quad (93)$$

となる。よって

$$\psi_c = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\sigma_l} F_l(\gamma, kr) P_l(\cos \theta) \quad (94)$$

となりこれは $\gamma = 0$ で Rayleigh の公式になる。(こうなるように B_l を選んだ)

これが Coulomb 散乱の部分波展開である。しかし、これだけでは入射波と散乱波がどうなっているのかがわからない。そこで元の式 (63) の Coulomb 散乱の散乱振幅に戻ってこれを Legendre 関数で展開する。 $x = \cos \theta$ とすると、

$$f_c(\theta) = \frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-1-i\gamma} \quad (95)$$

となるので $P_l(\cos \theta)$ の係数 a_l は gamma 関数と beta 関数の関係

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を使うと、

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{2l+1}{2^{l+1}l!} \frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} 2^{1+i\gamma} \int_{-1}^1 dx \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^{-1-i\gamma} (1-x^2)^l \\ &= (-1)^l \frac{2l+1}{2^{l+1}l!} \frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(-l-i\gamma)} \int_{-1}^1 dx (1-x)^{-1-i\gamma} (1+x)^l \\ &= \frac{2l+1}{2ik} \frac{\Gamma(l+1+i\gamma)}{\Gamma(l+1-i\gamma)} \\ &= \frac{2l+1}{2ik} e^{2i\sigma_l} \end{aligned} \quad (96)$$

となる。よって散乱振幅は $kr \rightarrow \infty$ で

$$f_c(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) \quad (97)$$

となる。よって blair 模型は Coulomb 散乱で

$$f_c(\theta) \mapsto f_c(\theta) - \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) \quad (98)$$

と置き直したものになり、スピン s が半整数のとき $kr \rightarrow \infty$ で式 (71) より

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Blair}} &= \left(\frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \left[\frac{s}{2s+1} \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) + \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{s+1}{2s+1} \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) - \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) + \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (99)$$

と書ける。

同様にスピン s が整数であった場合は式 (72) より

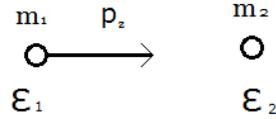
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Blair}} = & \left(\frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \left[\frac{s+1}{2s+1} \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) + \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \right. \\ & + \frac{s}{2s+1} \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) - \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\gamma \log \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0) \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta) + \frac{i}{\gamma} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\sigma_l} P_l(-\cos \theta) \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (100)$$

と書ける。

2.3 運動学について

2.3.1 力学計算

いま z 軸方向に運動をしている質量 m_1 、エネルギー ϵ_1 、運動量 p_z である粒子が、質量 m_2 で、エネルギー ϵ_2 の静止している粒子に散乱される過程を考える。



重心系と実験室系の相対速度を v とし $\beta = \frac{v}{c}$ 、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とすると、実験室系から重心系への変換行列は計量を

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

として (以下、重心系での変数をプライム付きで表す)、

$$\begin{pmatrix} \frac{\epsilon'_1}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_1}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (102)$$

すると m_1 、 m_2 の 4 元運動量は

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma\epsilon_1}{c} - \beta\gamma p_z \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma\epsilon_1 + \gamma p_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\gamma\epsilon_2}{c} \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma\epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (103)$$

となり、重心系での運動量は大きさが同じで向きが逆であることから、

$$\begin{aligned}
 \frac{-\beta\gamma\epsilon_1}{c} + \gamma p_z &= \frac{\beta\gamma\epsilon_2}{c} & (104) \\
 \frac{-\beta\epsilon_1}{c} + p_z &= \frac{\beta\epsilon_2}{c} \\
 \beta \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{c} &= p_z \\
 \beta &= \frac{cp_z}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\
 \beta &= \frac{cp_z}{\epsilon_1 + m_2c^2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで m_2 は静止しているので $\epsilon_2 = m_2c^2$ が成り立つことを使った。

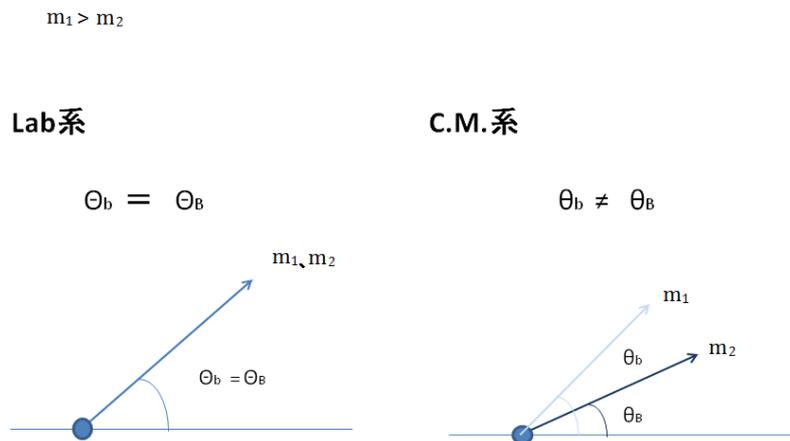
散乱後の運動量は \mathbf{P} 、エネルギーを E_1 で表すことにすると、散乱後の m_1 の重心系での速度の絶対値を v_b として

$$\beta_b = \frac{v_b}{c} = \frac{c|\mathbf{P}'|}{E'_1} \quad (105)$$

となる。また、このときエネルギー保存より ($\gamma_b = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_b^2}}$ とした)

$$E'_1 = \gamma_b m_1 c^2 = \gamma(\epsilon_1 - \beta cp_z) \quad (106)$$

である。



散乱過程が $x-z$ 平面で起こっているとする。質量 m_1 の粒子を考えると、 θ_b を重心系で z 軸と入射粒子の散乱方向がなす角として、

$$\tan \theta_b = \frac{P'_x}{P'_z} \quad (107)$$

また、Lorentz 逆変換により、 Θ_b を実験系で z 軸と入射粒子の散乱方向がなす角として、

$$\begin{aligned}\tan \Theta_b &= \frac{P'_x}{\gamma(\beta \frac{E'_1}{c} + P'_z)} \\ &= \frac{\beta_b \gamma_b m_1 c \sin \theta_b}{\gamma(\gamma_b m_1 c^2 \frac{\beta}{c} + \beta_b \gamma_b m_1 c \cos \theta_b)} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}}\end{aligned}\quad (108)$$

とかける。ここで、実験室系での立体角 $d\Omega$ と重心系での立体角 $d\Omega'$ は以下の関係式を満たす；

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{d(\cos \Theta_b)}{d(\cos \theta_b)} \quad (109)$$

よって、(108) 式を用いると、

$$\begin{aligned}\cos \Theta_b &= (1 + \tan^2 \Theta_b)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{(\cos \theta_b + \beta/\beta_b)^2}{1 - \beta^2} \frac{1}{\frac{(\cos \theta_b + \beta/\beta_b)^2}{1 - \beta^2} + \sin^2 \theta_b} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\cos \theta_b + \beta/\beta_b}{[\sin^2 \theta_b + \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos \theta_b + \beta/\beta_b)^2]^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (110)$$

となることより、立体角の関係 $d\Omega/d\Omega'$ は

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos \theta_b}{[\sin^2 \theta_b + \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos \theta_b + \beta/\beta_b)^2]^{\frac{3}{2}}}\quad (111)$$

となる。これを用いると、入射粒子の実験室系での微分断面積を重心系のものに変換することが出来て、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{c.m.} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} \frac{d\Omega}{d\Omega'} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos \theta_b}{[\sin^2 \theta_b + \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b})^2]^{3/2}}\end{aligned}\quad (112)$$

となる。

同様に標的粒子 m_2 に対しても考えると、散乱後の速さ v_B について $\frac{v_B}{c} = \beta_B = \beta$ であるので、 θ_B 、 Θ_B をそれぞれ重心系と実験室系での z 軸との散乱方向のなす角として、

$$\tan \Theta_B = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B + 1} \quad (113)$$

となる。よって $0 < \Theta_b = \Theta_B < \frac{\pi}{2}$ であるのは

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B + 1} \quad (114)$$

であり、仮に $0 < \theta_B < \pi$ のときは、

$$A = \left(\frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}} \right)^2 \quad (115)$$

とすると

$$\begin{aligned}
((1+A)\cos\theta_B + A - 1)(\cos\theta_B + 1) &= 0 \\
\cos\theta_B &= \frac{1-A}{1+A} \\
\cos\theta_B &= \frac{(\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b})^2 - \sin^2\theta_b}{(\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b})^2 + \sin^2\theta_b}
\end{aligned} \tag{116}$$

となる。

また、式 (113) より

$$\begin{aligned}
\cos\theta_B &= \frac{1 - \gamma^2 \tan^2 \Theta_B}{1 + \gamma^2 \tan^2 \Theta_B} \\
&= \frac{\cos^2 \Theta_B - \gamma^2 (1 - \cos^2 \Theta_B)}{\cos^2 \Theta_B + \gamma^2 (1 - \cos^2 \Theta_B)}
\end{aligned} \tag{117}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{d(\cos\theta_B)}{d(\cos\Theta_B)} &= \frac{d}{d(\cos\Theta_B)} \left(\frac{\cos^2 \Theta_B - \gamma^2 (1 - \cos^2 \Theta_B)}{\cos^2 \Theta_B + \gamma^2 (1 - \cos^2 \Theta_B)} \right) \\
&= \frac{4\gamma^2 \cos\Theta_B}{((1 - \gamma^2) \cos^2 \Theta_B + \gamma^2)^2} \\
&= \frac{4\gamma^2}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \Theta_B)^2 \cos^3 \Theta_B}
\end{aligned} \tag{118}$$

となる。以上より、入射粒子の微分断面積の変換 (112) と合わせて Coulomb 散乱の重心系から実験系への変換は、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} \frac{d\Omega'}{d\Omega} \Big|_1 + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} \frac{d\Omega'}{d\Omega} \Big|_2 \\
&= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} (\theta_b) \times \sqrt{1 - \beta^2} \frac{[\sin^2 \theta_b + \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b})^2]^{3/2}}{1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos\theta_b} \\
&\quad + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} (\pi - \theta_B) \times \frac{4\gamma^2}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \Theta_B)^2 \cos^3 \Theta_B} \\
&= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \sin^{-4} \theta_b \frac{\sqrt{1 - \beta^2} [\sin^2 \theta_b + \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b})^2]^{3/2}}{1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos\theta_b} \\
&\quad + \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \cos^{-4} \theta_B \frac{4\gamma^2}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \Theta_B)^2 \cos^3 \Theta_B}
\end{aligned} \tag{119}$$

と表せる。

2.3.2 Bethe-Bloch の公式

荷電粒子の散乱過程でのエネルギー損失は電子同士の非弾性衝突や原子核弾性散乱、チェレンコフ放射などによるものである。一般にはエネルギー損失の大部分は電子衝突によるものであるため、この量子力学的な過程で失われるエネルギーを評価する必要がある。阻止能 dE/dx は荷電粒子が物質中の単位距離を進むときに失うエネルギーとして定義され、以下ではこれを求める。

- Bohr の古典的公式

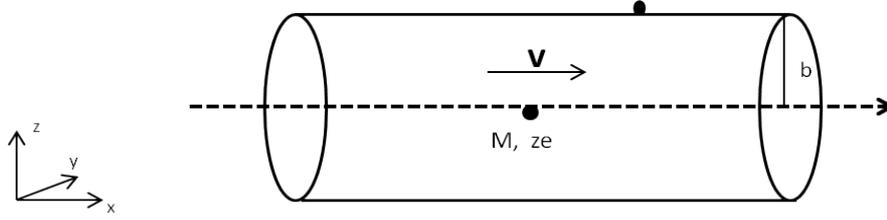


図1 模式図

入射粒子（以下粒子 a とする）について電荷 ze 、質量 M 、速度 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ とする。粒子 a の軌道から距離 b のところに静止している原子核電子が存在し、原子核電子による電場は衝突過程で不変であるような状況を考える。また、 $M \gg m_e$ が成り立ち、入射粒子の軌道は衝突前後で変化しないと仮定する。図1に模式図を示す。

衝突過程で自由電子が受け取るエネルギーを考える。電子の受け取る力積を I として

$$I = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int \frac{E_{\perp}}{v} dx \quad (120)$$

粒子 a の軌道を中心とする半径 b の円筒を考えて、Gauss の公式を用いると、

$$\int E_{\perp} 2\pi b dx = 4\pi ze \quad \Longleftrightarrow \quad \int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{b} \quad (121)$$

ゆえに

$$I = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx = \frac{2ze^2}{bv} \quad (122)$$

I は電子の運動量変化に等しいので

$$\Delta(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \quad (123)$$

半径 b から半径 $b + db$ 、厚み dx の領域を考えると、電子の個数密度 N_e として、この領域内の電子数は $N_e 2\pi db \cdot dx$ とかけて、これらの全てによるエネルギー損失の和を求めれば

$$-dE(b) = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2} 2\pi b db \cdot dx \quad (124)$$

$$= \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2 b} N_e db \cdot dx \quad (125)$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (126)$$

ここで b_{max} と b_{min} はそれぞれ電子の軌道周波数と伝達されるエネルギーの限界から定まる。

b_{max} について、電子は原子核に拘束されていることから、軌道周波数 $\nu = 1/\tau$ に対して相互作用時間は断熱不変の原理より τ 以下である必要がある。（これが満たされない場合には断熱過程となりエネルギー伝達が起こらない。）相対論的に考えて、 $\beta = v/c$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を用いれば、相互作用時間を $t = b/\gamma v$ と近似すると、電子の平均軌道周波数 $\bar{\nu}$ に対して

$$\frac{b}{\gamma v} \leq \tau \quad \Longleftrightarrow \quad b_{max} = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}} \quad (127)$$

また、 b_{min} について、伝達されるエネルギーが最大となるのは正面衝突によって電子の運動エネルギー $(2v)^2 m_e / 2$ が全て移行する場合である。 b_{max} の場合同様に相対論的に考えて、

$$\frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b_{min}^2} = 2\gamma^2 m v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b_{min} = \frac{ze^2}{\gamma m_e v^2} \quad (128)$$

求めた b_{max} と b_{min} を代入すれば

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{z e^2 \bar{\nu}} \quad (129)$$

となる。

Bohr の古典公式に量子力学的効果を加えると Bethe-Bloch の公式が得られて

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e \rho c^2 \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (130)$$

さらに密度効果補正項と殻補正項を加えれば

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e \rho c^2 \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] \quad (131)$$

となる。ここで W_{max} は正面衝突 (あるいはノックオン) に対応する最大移行エネルギーで、質量 M の入射粒子に対しては

$$\begin{aligned} W_{max} &= \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\frac{m_e}{M}(1 - \beta^2 \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \\ &= \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\frac{m_e}{M}\gamma + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \end{aligned} \quad (132)$$

であり、 $M \gg m_e$ では

$$W_{max} \simeq 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \quad (133)$$

となる。また、 I は平均励起ポテンシャルであり、 $h\bar{\nu}$ に対応するパラメータである。振動強度 $\bar{\nu}$ は多くの場合未知であるが、準経験的な公式として、

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{eV} \quad Z < 13 \quad (134)$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8Z^{-1.19} \text{eV} \quad Z \geq 13 \quad (135)$$

により求めることが出来る。その他の記号については以下の通り。

r_e : 古典電子半径 (2.817×10^{-13} cm)	ρ : 入射対象の密度
m_e : 電子質量 (9.109×10^{-31} kg)	z : $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C 単位での入射粒子の電荷
N_a : アボガドロ数 (6.022×10^{23} /mol)	δ : 密度補正
I : 平均励起ポテンシャル	C : 殻補正
Z : 入射対象の原子番号	$\beta = v/c$: 入射粒子の速度
A : 入射対象の質量数	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

実際には粒子の電場は通過経路にそって偏向し、外側に位置する自由電子のエネルギー損失への寄与が小さくなる。() 式から分かるようにエネルギーの大きな領域ではこの効果を考慮する必要があり、これが補正項 δ である。Sternheimer によると δ の値は以下のように与えられる：入射対象の物質についてのパラメータ X_0 、 X_1 、 C 、 m 、 a と $X = \log_{10} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \log_{10} \beta\gamma$ について

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6052X + C & X_1 < X \end{cases} \quad (136)$$

ここでパラメータ C については

$$C = -2 \ln \frac{I}{h\nu_p} - 1 \quad \nu_p = \sqrt{\frac{Z N_a \rho e^2}{A \pi m_e}} (h\nu_p : \text{プラズマ振動数}) \quad (137)$$

であり、残りのパラメータはフィッティングにより実験的に定まる。Sternheimer によれば炭素 (黒鉛) について、

$$\begin{aligned} I &= 78 \text{ eV} & C &= -2.99 & a &= 0.2024 \\ m &= 3.00 & X_1 &= 2.486 & X_0 &= -0.0351 \end{aligned}$$

である。

また、殻補正項は入射粒子の速度が束縛電子の軌道速度に対して小さくなる領域で考慮する必要がある。これはこの領域で Bethe-Bloch 式の近似が崩れる為である。経験的公式として、 $\eta = \beta/\sqrt{1-\beta^2} \geq 0.1$ では以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} C(I, \eta) &= (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 \\ &+ (3.850190\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 0.00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3 \end{aligned} \quad (138)$$

その他の量子力学的効果 (スピン等) による補正は $\simeq 1\%$ のオーダーで無視できる。

Bethe-Bloch 式を用いるにはその有効な範囲を考える必要がある。この式は α 粒子程度の粒子までについては $\beta \simeq 0.1$ の範囲で実験に一致する。補正項を加えれば $Z \simeq 26$ の範囲で用いることが出来る。しかし、 $\beta \leq 0.05$ では式的前提が崩れるため正確な値を求めることは困難である。

$-dE/dx = z^2 f(\beta)$ と運動エネルギー T について $\beta = g(T/M)$ とかけることより、 dE/dx については以下のような相似則が成り立つ：

$$-\frac{dE_2}{dx} = -\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 \frac{dE_1}{dx} \left(\frac{T_2 M_1}{T_1 M_2}\right) \quad (139)$$

また、Bragg 則を用いると近似的に複合体についての阻止能を求めることが出来て、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \sum_j \frac{1}{\rho_j} \frac{a_j A_j}{A_m} \left(\frac{dE}{dx}\right)_j \quad (140)$$

ただし a_j 及び A_j はそれぞれ j 番目粒子の原子番号及び質量数、 $A_m = \sum a_j A_j$ である。

Bethe-Bloch 式の例外として、Channeling 効果があり、物質が結晶構造を取るときにはこれについて考える必要がある。具体的には結晶の対称軸に対して臨界角以下の角度で粒子が入射したときには粒子の軌道が振動し、損失エネルギーが小さくなる現象が起こるので、これを避けるには結晶方向と粒子の入射方向に注意する必要がある。臨界角 ϕ_c について Bohr 半径 a_0 と原子間距離 d に対して、

$$\phi_c \simeq \frac{\sqrt{z Z a_0 A d}}{1670 \beta \sqrt{\gamma}} \quad (141)$$

$\phi > \phi_c$ では channeling は起こらない。

阻止能 dE/dx から入射粒子の到達限界を求めることが出来る。この値を Range という。Range は S で表わされる入射粒子のエネルギーに対する関数である。入射粒子のエネルギーを T_0 とすると、

$$S(T_0) = \int_0^{T_0} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \quad (142)$$

であるが、より実際的には準経験的公式として

$$R(T_0) = R_0(T_{min}) + \int_{T_{min}}^{T_0} (dE/dx)^{-1} dE \quad (143)$$

が用いられる。このとき T_{min} は Bethe-Bloch 公式が有効となる最小エネルギーである。Bethe-Bloch 式の積分数値計算から、 $R \propto E^b$ が得られている。また、 β^{-2} 項が支配的となる低エネルギー領域では、

$$-\frac{dE}{dx} \propto \beta^{-2} \propto T^{-1} \quad \text{より} \quad R \propto T^2 \quad (144)$$

である。より実的なフィッティングとしては

$$R \propto T^{1.75} \quad (145)$$

を用いることが出来る。

range-energy 関係についても dE/dx と同様の相似則が成り立ち、

$$R_2(T_2) = \frac{M_2 z_1^2}{M_1 z_2^2} R_1\left(T_2 \frac{M_1}{M_2}\right) \quad (146)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2 \sqrt{A_1}}{\rho_1 \sqrt{A_2}} \quad (147)$$

となる。

3 実験

3.1 手順と概要

3.1.1 概要

京都大学宇治キャンパスにあるマイクロイオンビーム解析実験装置を用い、入射エネルギー 7.5MeV の $^{12}\text{C}^{3+}$ イオンビームを ^{12}C , ^{13}C 標的炭素膜に入射し、散乱断面積を求める衝突実験を行った。 $^{13}\text{C}^{3+}$ イオンビームについても同様に ^{13}C 標的炭素膜に入射させ散乱断面積を求め、さらに、 ^{12}C に対する測定を ^{12}C — ^{13}C 散乱との比較のために行った。

3.1.2 実験装置

- タンデム型静電加速器
 - ・ 加速電圧 2.0MV (電圧安定度 < 1.0kV)
 - ・ 最大電流値 300 μ A
 - ・ 絶縁ガス SF_6
 - ・ 真空系 < 5×10^{-6} Pa
 - ・ イオン源 RF 荷電変換型 Cs スパッタ型
 - ・ エネルギー ~ 8.0 MeV (3 価イオン)
 - ・ 分析振分電磁石 $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ$
 - ・ ビーム直径 < 20 μ m
 - ・ 分析手段 RBS, ERD, NRA, PIXE, チャネリング
 - ・ ターゲット駆動 5 軸ゴニオメータ

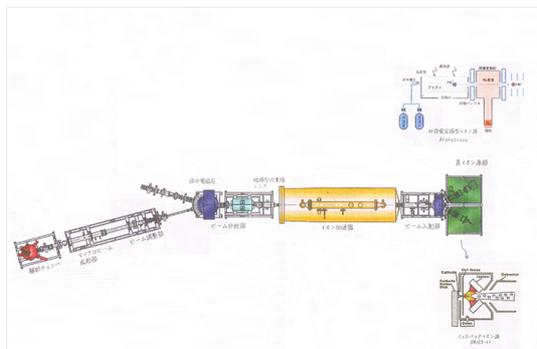


図 2 加速器概要

- detector bias supply (ORTEC 428)
- preamplifier(ORTEC142)
- universal coincidence (ORTEC 418A)
- timing SCA (ORTEC 551)
- linear gate stretcher (ORTEC 542)
- amplifier (ORTEC 571)
- logic fan-in/fan-out (Lecroy 429A)

- level adapter
- quad gate/delay generator (794)
- 8ch visual scaler (N-OR 425)
- pulser (ORTEC 480)
- オシロスコープ (テクトロニクス社 TDS3012)
- (current digitizer (ORTEC 439))

3.1.3 実験の手順

1. 標的炭素膜の作成および厚さ測定

(1) 標的炭素膜の作成 (2012/6/25)

^{12}C の蒸着されたプレート (約 $7.5\text{cm} \times 2.5\text{cm}$) の長辺の $1/2$ を目安にカッターを用いて切り込みを入れた。この短辺を湯につけて剥離剤 NaCl を溶解し、膜を湯に浮かすようにしてをプレートから分離した。水面に浮かんだ炭素膜を直径 8mm 程度の穴のある金属プレートにすくいとり、すくい取ること成功した膜をデシケーターに入れて一週間程度乾燥させた。途中で湯を変え、計 3 枚の蒸着プレートについて膜作成を行った。この作業により複数枚の膜を得たが、膜が半分だけ 2 重になっているものなどもあり、2 重に膜を張ることが出来た物は最後に作成した膜 1 枚であった。実験ではこの膜を ^{12}C ターゲットとして用いた。

(2) 炭素膜厚さの測定 (6/4、7/2、7/17、8/16)

前年の実験後に残っていた ^{12}C (3, 4, 6 番) 及び ^{13}C (1, 4, 5, 6 番) の膜の厚さを 6/4 に測定した。放射線源としては ^{241}Am を使い、Si 検出器に入射する粒子のエネルギースペクトル測定には下の図 3 のような回路を用いた。

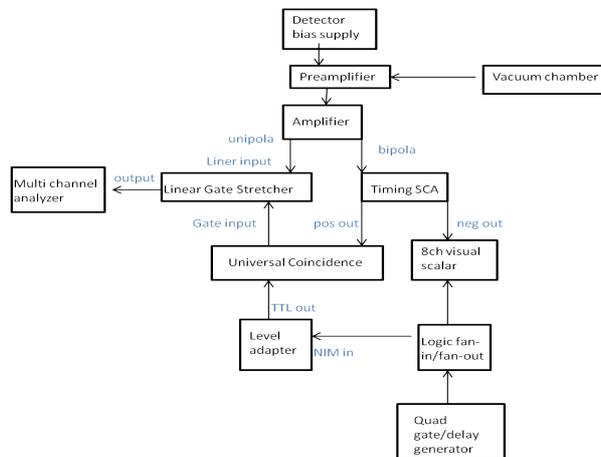


図 3 ターゲット厚さ測定回路

また、測定の際の各モジュールの設定は以下のとおりである：

- detector bias supply - 100V (pos)
- universal coincidence - coincidence requirement 2 (coinc,coinc)
- timing SCA - upper 9.9, lower 0.15, delay 10.14 ($1-1.1\mu$ sec, INT)
- linear gate stretcher - gated,coinc
- amplifier - gain 6.6, coarse gain 500, shaping time 0.5, (thresh, delay,pos)
- level adapter - compl.

- quad gate/delay generator - FF

この回路では vacuum chamber で放射線源 ^{241}Am からの α 線を半導体検出器で検出してその信号を Preamplifier に送る。その後、Amplifier で信号を二つに分け、unipola 信号を linear input として LGS に送る。一方、bipola 信号は TSCA を通して universal coincidence に送る。図下方の Quad gate/delay generator を用いることで手でゲートを制御し、Universal coincidence で検出器由来のシグナルでゲートを開けている間と同時のもののみを取り出す。Universal coincidence からの出力を Gate input として LGS におくり、先の Linear input の出力と合わせて MCA で計測することにより、任意の時間区間での粒子のエネルギースペクトルを測定する仕組みである。

測定されたスペクトルを Quantum Gold を用いて ans 形式で記録したのち、root 形式に変換し、root を用いて 3500 チャネルから 4000 チャネルの区間でガウスフィットした。フィットした曲線の微分係数が 0 になる点を求めてスペクトルのピークとした。

6/25 に作成した膜について同様の操作により 7/2 にスペクトル測定を行った。膜厚さを決定した ^{12}C 膜を 2 番とした。さらに、スペクトルの零点を決定するために図 4 のように pulser を接続した回路を組み、 $\times 1$, $\times 1/2$, $\times 1/5$ でのスペクトルを測定した。

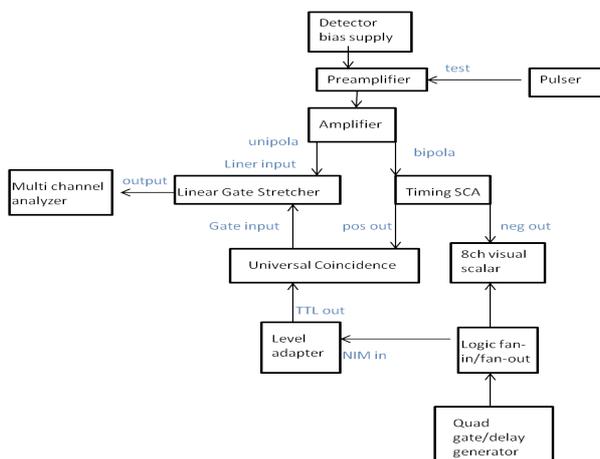


図 4 パルサー回路

本実験に用いた ^{13}C 6 番の膜について、6/4 の測定では原点補正をしていなかったため、再度膜厚さ測定を同様の方法で 7/17 に実施した。さらに 7/2 と同様の方法で原点補正のためのスペクトル測定を行った。

解析過程において 7/2 に測定した ^{12}C のデータでスペクトルの形状及び算出した膜の面密度が他膜と大きく異なった (2 倍程度) ことから、8/16 に ^{12}C 2 番の膜について膜厚みの再測定を行った。この際、 ^{13}C 6 番の膜についても再度測定を実施した。8/29 に ^{241}Am のスペクトルの測定を条件を変えて測定した。このとき ^{13}C 6 番の膜についても再度測定を実施した。

2. 回路のセットアップ (2012/7/11)

演習室で用いていたものと同じモジュールを用いて、図 5 のように回路を組んだ。ただし、current integrator については現地のものを用いた。

実験室との違いは、vacuum chamber からの粒子のエネルギースペクトルではなく、測定散乱角におかれた検出器で検出される粒子のエネルギースペクトルを計測している点である。また、current integrator からの信号を同時に 8ch visual scaler で読み取ることで、散乱粒子数とほぼ同時刻の入射粒子数を測定できるようになっている。

組んだ回路についてテスト信号を入力し、信号が linear gate 内に入っている事を確かめた。また、pulsar を用いて膜厚さ測定時と同様に原点測定のためのスペクトルを記録した。

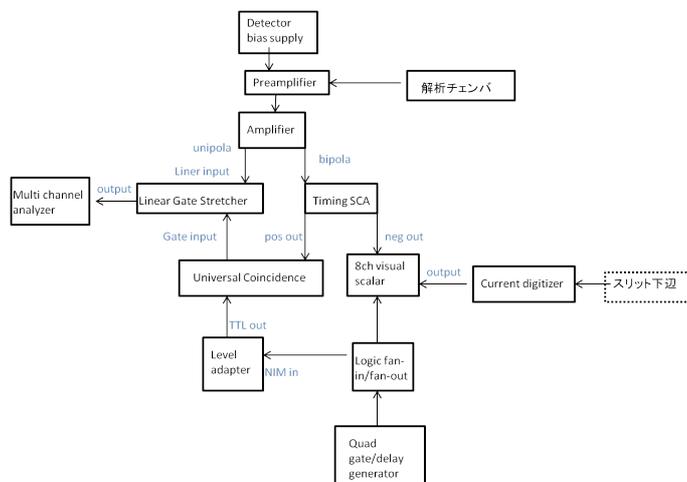


図 5 C-C 衝突実験回路

3. 散乱・検出部分セッティング

解析チェンバのふたを開け、ターゲット膜を図 6 のようにセットした。 ^{12}C 標的としては 7/2 に作成した膜 No.2 を用い、 ^{13}C 標的としては No.6 を用いた。

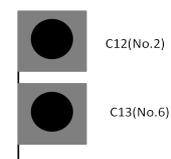


図 6 ターゲット膜の配置

検出器スリットの大きさ及びターゲットからの距離を測定し、値を記録した。

実験室系での最初の散乱角を -16° に合わせた。これの目視の指標として、窓から見た時に図 7 の赤い矢印の位置が 55.8° に見えることを用いることとした。

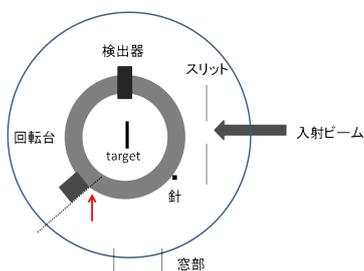


図 7 解析チェンバ

解析チェンバのふたを閉め、チェンバ内を真空に引いた。

4. 測定

(a) ターゲット入射粒子数と current integrator で測定される粒子数の比の決定

ターゲットに入射するビームはスリットを通過する。本来ならば炭素膜背面に粒子数検出器を設置し、入射粒子量を決

定すべきであるが、装置の都合上検出器を膜後方に置くことが出来なかった。そこで、本実験では膜に入射する前の時点において、入射ビームがスリットを通過する際のD部にあたる粒子数を電流として測定し、スリットを通過した粒子による電流と検出電流の比をとることで測定時の入射粒子数を決定することとした。そのために、 $C-C$ 散乱とは別に、入射ビームに対するスリット通過電流と検出電流の比例係数を決定する必要がある。

入射スリットの先に図8のようにファラデーカップを配置し、スリット下辺(D部)にあたる電流とファラデーカップで検出される電流を測定した。その比から、current integrator に接続された visual scaler が示す値を入射粒子数に変換するための係数を決定した。

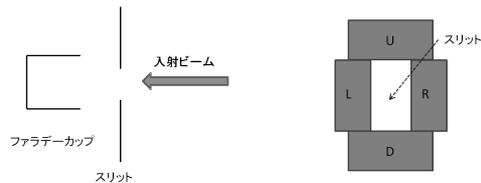


図8 スリット模式図

(b) ^{12}C 入射ビームに対する微分断面積の測定

100V のバイアス電圧を印加した。

^{12}C イオンビームを ^{12}C 標的に入射し、散乱角に対するスペクトルの値を Quantum Gold で記録した。同時に visual scaler でカウントした弾性散乱粒子数及び current integrator からのパルス数を測定した。標的を ^{13}C に切り替え、同様の測定を行った。角度を 2° 増やし、 ^{13}C 標的、 ^{12}C 標的の順で測定を行った。この一連の過程を -16° から -12° まで、及び 12° から 60° までそれぞれ 2° 刻みで繰り返した。

測定する時間は 38° までは scalar に表示される粒子数を目安にしたが、 38° 以降についてはスペクトルピークが見えづらくなってきたため、scaler の表示粒子数ではなく、スペクトル画像でピークが読み取れることを目安とすることにした。

(c) ^{13}C 入射ビームに対する微分断面積の測定

イオン源からの入射ビームを ^{13}C に切り替えた。この際、標的の枕がずれていた可能性が発見されたが、散乱データを検討して、グラフ形より ^{12}C 入射ビームに対する測定中にずれが生じたとは考えにくいと判断し、データを取りなおすことなく ^{13}C 入射ビームに対する散乱断面積の測定にうつった。

標的を ^{13}C に固定し、 60° から 2° ずつ角度を減らして 12° まで上述の方法で測定を行った後、 -12° から -16° までについても同様に測定した。

一度バイアス電圧を切り、ターゲットの位置が -16° に戻っている事を窓から目視で確かめた。

再び 100V のバイアス電圧を印加した。

標的を ^{12}C に切り替え、参考のために -16° 、 -14° 、 14° と 16° から 4° 刻みで 56° まで、さらに 58° での測定を行った。

4 結果及び考察

4.1 Bethe-Bloch 式の補正項についての本実験での評価

本実験での衝突について密度効果項、殻補正項について評価するために、密度効果項について (136) 式を用いて $X = \log_{10} \beta\gamma$ を求める。

以下、 $u[\text{MeV}/c^2] = 931.5$ を用いて ^{12}C ターゲットについては $A = 12$ より、

$$m_a = 12 \times u = 1.118 \times 10^4 \quad (148)$$

$$\gamma = 1 + \frac{7.5}{m_a} = 1.001, \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (149)$$

$$X = -1.436 < X_0 \quad (150)$$

ゆえに $\delta = 0$ を得る。同様に、 ^{13}C ターゲットについても $A = 13$ として計算すれば良くて、このとき $X = -1.453 < X_0$ より $\delta = 0$ である。従ってターゲットが ^{12}C , ^{13}C の場合ともに密度補正については考えなくてよい。また殻補正項についても $\eta = \beta/\sqrt{1-\beta^2} = \beta\gamma$ の値がともに 0.1 以下となるため考慮しなくてよい。

4.2 薄膜厚さ測定

散乱実験で用いた標的炭素膜について、Bethe-Bloch 式の積分より膜厚さを決定した。具体的には膜の面密度 $\rho dx[\text{mg}/\text{cm}^2]$ は (130) 式を ρdx について解いたものに (130) 式の定数をそれぞれ代入することで決まる。このとき定数としては以下の値を用いた：

$$\begin{aligned} \text{入射粒子の電荷 } z &= 2 & \text{Am の入射エネルギー } E_\alpha &= 5.486 \text{ [MeV]} \\ \text{密度補正 } \delta &= 0 & \text{殻補正 } C &= 0 \\ I &= 7.8 \times 10^{-6} \text{ [MeV]} & W_{max} &= 0.003011 \\ \text{target の原子番号 } Z &= 6 & \gamma &= 1 + \frac{E_\alpha}{m_\alpha c^2} = \sqrt{1.002947} \\ \text{target 質量数 } A &= 12, 13 & \beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.002938 \end{aligned}$$

また、 ρdx について解いた式の右辺 ΔE については以下のように決定した：

$$\Delta E = E_\alpha \times \frac{Ch(\text{Am}) - Ch(\text{target})}{Ch(\text{Am})} \quad (151)$$

ただしここで数式中の $Ch(\cdot)$ は \cdot によるスペクトルピークのチャンネル数を示す。

これを $N_{target} = \frac{\rho dx}{A} \times N_a \times 10^{-3}$ により個数に変換した。

N_{target} の値について、実験で実際に用いた膜を複数回測定したところ、測定ごとに違った値が得られた。表 1 で膜の測定日と計算された値を示す。

表 1 測定日とターゲット密度

	6/4	7/2	7/17	8/16
^{12}C No.2		1.75×10^{18}		2.47×10^{18}
^{13}C No.6	2.43×10^{18}		4.90×10^{18}	2.65×10^{18}

ただし6月4日の測定分については原点補正のない値である。

表1より、膜密度について値の一致性が得られなかったと分かる。この原因を検討した所、一致性のある6月4日と8月16日の測定では村上先生が膜を置いていたことから、検出器に膜をセットする際に膜位置の奥行きに任意性があるせいではないかと考え、8月29日に検証実験を行った。

検証実験の内容は以下の通りである。放射線源として²⁴¹Am、標的の薄膜には¹³C-No.6を用いて、真空度を変化させた場合、放射線源の位置を変えた場合について検証した。下の表は真空度と、そのときのroot形式におけるエネルギースペクトルのピークの位置でのchannel数を示してある。

表2 各真空度におけるエネルギースペクトルのピークでのchannel数

²⁴¹ Amのみ		¹³ C-No.6を設置	
真空度 (mTorr)	ピークのchannel数	真空度 (mTorr)	ピークのchannel数
110	3804.49	76	3770.85
500	3787.48	80	3771.92
140	3796.18	71	*2) 3774.39
110	3795.36	75	*2) 3775.07
70	*1) 3792.94		
72	3793.87		
8/16のデータ			
120	3800.34	120	3773.00

*1) 放射線源の位置を横方向にずらした。

*2) 薄膜の位置を横方向にずらした。

データは炭素膜なしの時と置いた時のそれぞれの場合について、測定の時系列順に並べてある。全体的な順番としては、まず²⁴¹Amのみのデータの上から4つ分を測った後、炭素膜を置いた4つのデータを測り、最後に²⁴¹Amのみのデータ残り2つを測定した。これらのデータによると、まず²⁴¹Amのみの場合に関して、同じ真空度110mTorrで測定をしているにも関わらず、そのときのピークのchannel数に大きく差が開いていることが分かる。ただこの2回の測定には数時間のズレがあるためこの誤差の原因としては測定機器による問題等が考えられたが、確証的な根拠を見つけるには到っていない。この他に、真空度が500mTorrとかなり大きいときには他のピークのchannel数に比べて値が小さくなっている。しかし、十分な真空状態(~100mTorr)ではchannel数は「110mTorr : 3804.49」という値を除きほぼ一定となっている。8/16の薄膜の厚さ測定では真空は十分引けており、このような真空度の影響はあまり受けていないと考えられる。また、放射線源の位置をずらした場合にもchannel数の大きな変化は見られない。一方、¹³C-No.6の薄膜を透かして見ると透け具合が違う部分が見て取れた。そのため薄膜を設置する場所を変え、その場合のエネルギースペクトルについても測定をおこなった。まず薄膜を放射線源の真上に設置した場合、真空度が80、76mTorrの2つの状態ではピークのchannel数に大きな変化は見られない。しかしそこから薄膜の位置をずらすことにより、ピークでのchannel数は他と比較すると大きくなっていることが分かる。このことから、測定ごとに放射線のあたる場所での薄膜の厚さが変わり、薄膜の厚さが全体的に一様でないことが推測される。このためとりあえず2つの膜を同じ時に測定した8月16日の値を解析に用いることとした。

真空度とスペクトルの形の変化については関係性を見つけることが出来なかった。しかし、Am単独でスペクトルを取った場合にも値の変化が見られたことから、真空度の膜厚さ測定への寄与が否定できないほか、Amの値の変動自体が影響している可能性が考えられる。

4.3 本実験

解析チェンバの装置について、7 でターゲットと検出器間の距離、及び検出器スリットの値は以下の通りであった：

検出器—ターゲット間	67.5 ± 1 mm
検出スリット下辺	0.8 mm
検出スリット左辺	7 mm

ただしここでの検出スリット自体の大きさは (カバーがかかっていたため測定できず) 直接定規で測ったものではなく、現地の担当の方から聞いた値である。

測定した検出器—ターゲット間の距離およびターゲットスリットの大きさから、散乱領域 $\Delta\Omega$ を $\Delta\Omega = 0.001229$ と決定した。

次に、散乱実験中のスリット下辺での検出電流とターゲット入射粒子の関係を決定のための、ファラデーカップでの検出電流値とスリット下辺での検出電流値を表 3 で示す。

表 3 検出電流

slit[e ⁻⁷ fs] : I_0	under[e ⁻⁸ fs] : i_0
1.41 ~ 1.45e ⁻⁸ A	6.23e ⁻⁹ A

D部にあたる粒子による電流 i_0 、ファラデーカップで検出される電流 I_0 に対し、visual scaler の示す値 (current) からターゲット入射粒子数 N_{beam} を求める式はビーム粒子が 3 価のイオンであることを考慮して、

$$N_{beam} = \frac{I_0}{i_0} \times \frac{(\text{current})}{1.602 \times 10^{-19} \times 3} \quad (152)$$

となる。この式により N_{beam} を決定した。7 月 11 日の C-C 散乱の測定で得られた visual scaler の弾性散乱粒子の測定数およびスリット下辺での検出電流についての scaler の値一覧を末尾に表 10 から表 13 として付した。

4.4 散乱断面積の決定

N_{beam} 、 N_{target} 、及び弾性散乱粒子数 $N_{elastic}$ を用いると、重心系の微分断面積は運動学による $d\Omega_{lab}/d\Omega_{cm}$ の式と合わせて

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{N_{elastic}}{\Delta\Omega \times N_{beam} \times N_{target}} \times \frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{cm}} \quad (153)$$

により決定できる。なお、実験当日は散乱断面積の形を見る為に visual scaler でカウントされる弾性散乱粒子数を用いた。解析では実験時に記録したヒストグラムをガウスフィットして得られる曲線の積分から弾性散乱粒子数を決定したが、半導体検出器の特性からこの方法では検出粒子数が多い時に取りこぼしが生じる。そこで、visual scaler での粒子のカウント数と積分による総粒子数の比をもとめ、求めたい粒子数にかけて値を補正することを考えた。しかし実際に比を取ってみた所、(ヒストグラムの全範囲での総粒子数) / (scaler の値) が 0.6 近いものがあり、それ以外も 0.8 などの値が多く角度であった。一方でマルチチャンネルアナライザに残ったデータから取りこぼし量を見積もったところ、その値はデータの 2% 以下であり、十分小さいと考えられた。すなわち、scaler の方では余計な粒子の寄与が大きくこの補正は正しくないと考えられる。よって弾性散乱粒子数として曲線の積分値をそのまま用いることにした。 $\delta N_{elastic}$ についてはルートでガウスフィットした際に評価された誤差の値を用いた。

さらに、 N_{target} 、 $N_{elastic}$ 、 N_{beam} 、 $\Delta\Omega$ が独立であるとしてそれぞれの誤差を求め、誤差伝播の式

$$\delta(f(x_i)) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} \quad (154)$$

を用いて微分断面積の誤差を求めた。

その他の変数についての誤差は表 4.4 の通り。

変数	誤差
$N_{target} : {}^{12}C \text{ No.2}$	3.54×10^{16}
$N_{target} : {}^{13}C \text{ No.6}$	3.55×10^{16}
$\Delta\Omega$	3.96×10^{-5}

また、表 4.4 での誤差の導出式は以下のとおりである：

$$\begin{aligned} \delta N_{target} = & N_{target} \times \frac{Ch(target) - Ch(o)}{Ch(Am) - Ch(target)} \times \\ & \times \sqrt{\left(\frac{\delta Ch(target)}{Ch(target) - Ch(o)}\right)^2 + \left(\frac{\delta Ch(Am)}{Ch(Am) - Ch(o)}\right)^2 + \left(\frac{(Ch(target) - Ch(Am))\delta Ch(o)}{(Ch(target) - Ch(o))(Ch(Am) - Ch(o))}\right)^2} \end{aligned} \quad (155)$$

$$\delta(\Delta\Omega) = \Delta\Omega \times \sqrt{\left(\frac{0.01}{7}\right)^2 + \left(\frac{0.01}{0.8}\right)^2 + \left(\frac{2}{67.5}\right)^2} \quad (156)$$

各散乱実験について計算して得られた値とその誤差の一覧を末尾で表 14 から表 17 で示した。

これらの微分断面積について Mott 式、Blair 式、Rutherford 式を用いてそれぞれフィットを行った。また、実行したフィットについて理論式でのパラメータを変化させて χ^2 検定を行い、その信頼性を検討する作業を行った。図 9 に見られるような-側での微分断面積が大きくなる現象が各散乱について確認されたため、フィットを行う際には+側のみを用いることとし、-側はビーム入射角度補正のためにのみ用いて解析を行った。

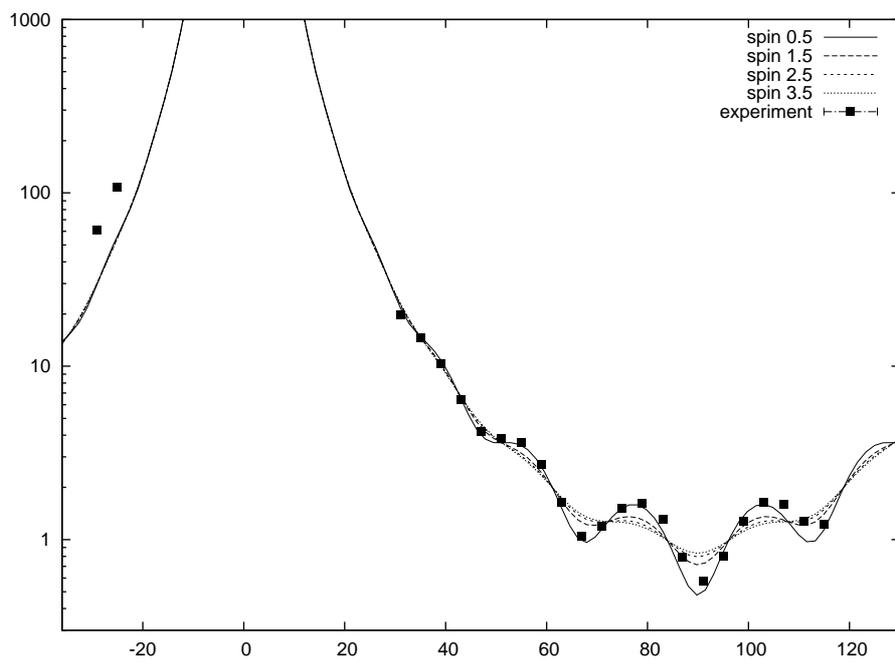


图9 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱 (全测定领域)

4.5 異種粒子散乱

4.5.1 各種補正について

今回用いた実験機器は、その特性上、角度の原点とビームの入射方向が完全に同じになるように調整することが困難であったため、実験室系で Θ として検出された散乱角は、実際は $\Theta + \Theta_0$ であったと仮定して、 Θ_0 の値を変えながら χ^2 検定によって fit することで、角度の原点を推定することにした。また、標的炭素膜の粒子数面密度についても上述のように値に確信が持てない状況であったことと、beam が ^{13}C のときの beam の粒子数を求めるときに比を測り忘れていたため正確な値でないことから、全角度について Overall に定数倍したものが正しい値であったと仮定して、同様に χ^2 検定から推定することにした。

4.5.2 Rutherford 模型による検討

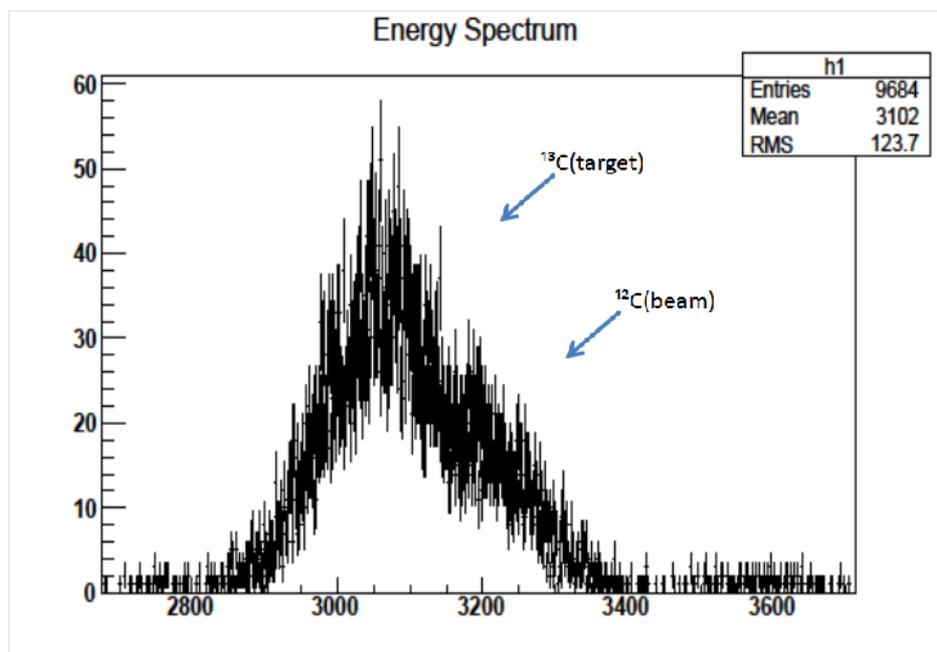


図 10 実験室系 48° での $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱ヒストグラム

異種粒子散乱 ($^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$, $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱) について非分離の場合の Rutherford 式を用いてフィットを行った。異種粒子散乱では検出器には ^{12}C と ^{13}C の両方が入射する。解析を始めた当初はこの ^{12}C と ^{13}C の分離を試みたが、図 10 に示すように 2 粒子の分離が実際的に不可能な角度領域が存在した。

特に分離困難な領域では ROOT によるフィットの値がその都度異なり、またフィットをした人による値のばらつきが大きかったことから、客観的な値が得られないと判断した。重心系の微分断面積への変換係数は粒子の重さによって変わるので、重心系の微分断面積を求めるには分離が必要となる。そこで、 ^{12}C と ^{13}C を分離せず、その合計についての量を実験室系での理論と比較することにした。この際、力学計算項の (119) 式を用いてターゲットと入射粒子のそれぞれについて重心系と実験室系の座標変換を施した。

この式を用いて、角度補正、定数倍補正の値を同時に動かして、 χ^2 検定の結果が最良となるべきを計算すると、表 4 のようになった。このときの実験室系での微分断面積は $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱では図 11、 $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱では図 12 に示すようになった。

表 4 Rutherford 散乱での χ^2 検定

	$^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$	$^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$
χ^2/n	2.59	4.98
原点補正	1.51	1.57
定数倍補正	1.36	4.01

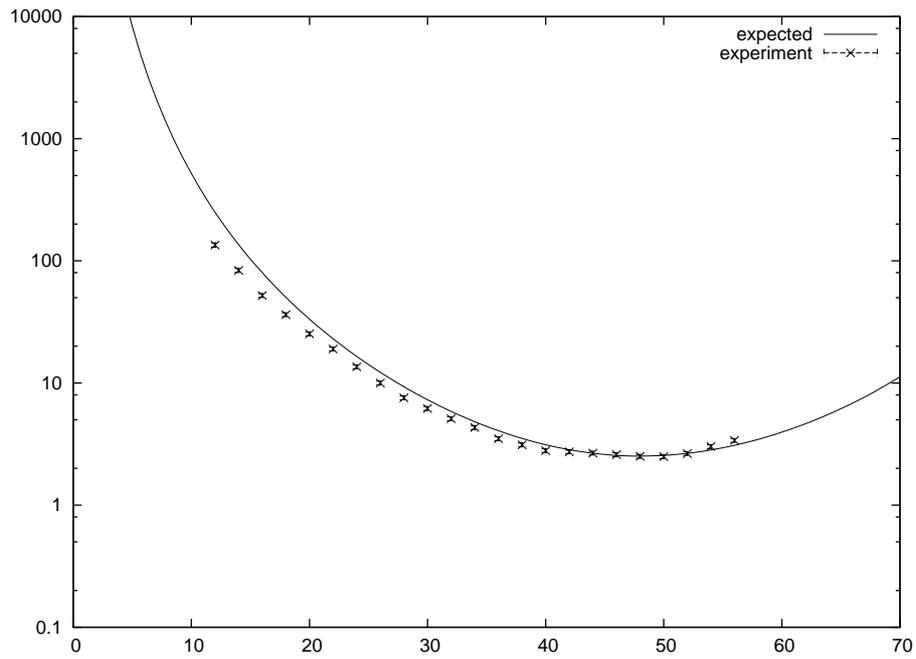


図 11 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱

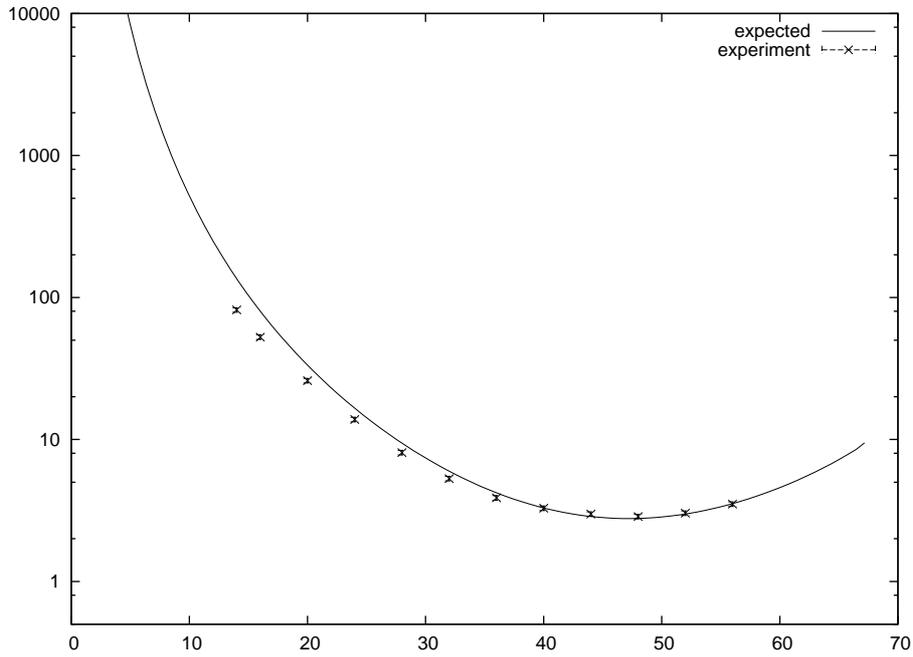


図 12 $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱

4.6 同種粒子散乱

4.6.1 Mott 式による検討

$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱及び $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱について Mott 式を用いたフィットを行い、複数のスピンについて比較した。スピン、角度補正、定数倍補正の値を同時に動かして、 χ^2 検定の結果が最良となるスピンを求めた。各スピンに対しての χ^2 検定で得られた最良の角度補正及び定数倍補正の値を表 5, 表 6 で示す。また、さまざまなスピンでの理論式に対して補正を加えた場合の実験的な散乱断面積の重ね書きを $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$, $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱それぞれの場合について図 13 及び図 14 で示す。なお、これは重心系での散乱断面積である。

表 5 ^{12}C Mott 散乱でのスピンと χ^2 検定

spin	0	1	2	3
χ^2/n	19.4	188	224	237
原点補正	0.74	0.42	0	0
定数倍補正	1.79	3.39	4.05	4.28

表 6 ^{13}C Mott 散乱でのスピンと χ^2 検定

spin	1/2	3/2	5/2	7/2
χ^2/n	5.98	13.3	20.9	25.5
原点補正	1.29	1.28	1.25	1.23
定数倍補正	4.05	4.24	4.34	4.40

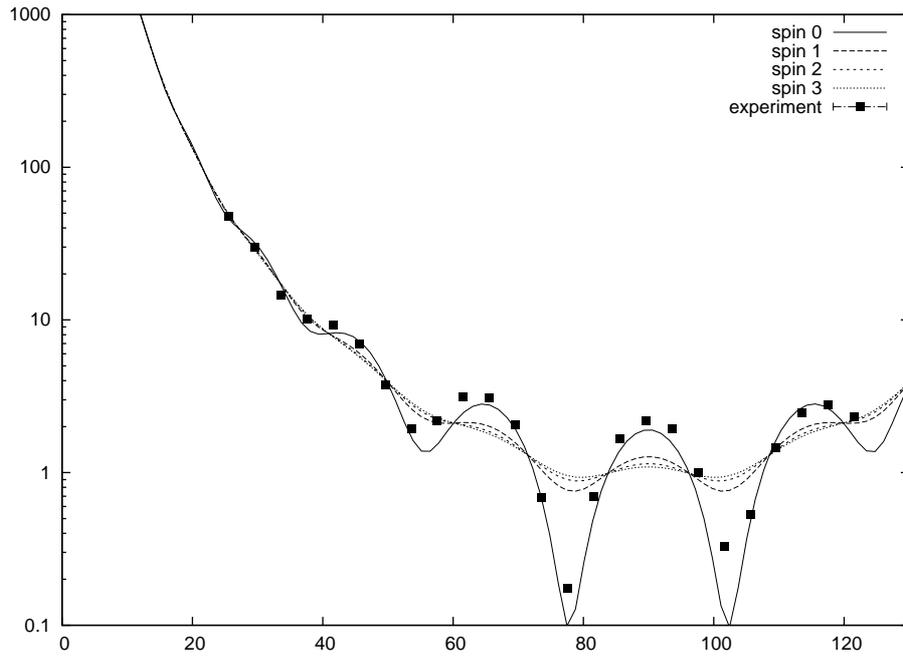


図 13 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱

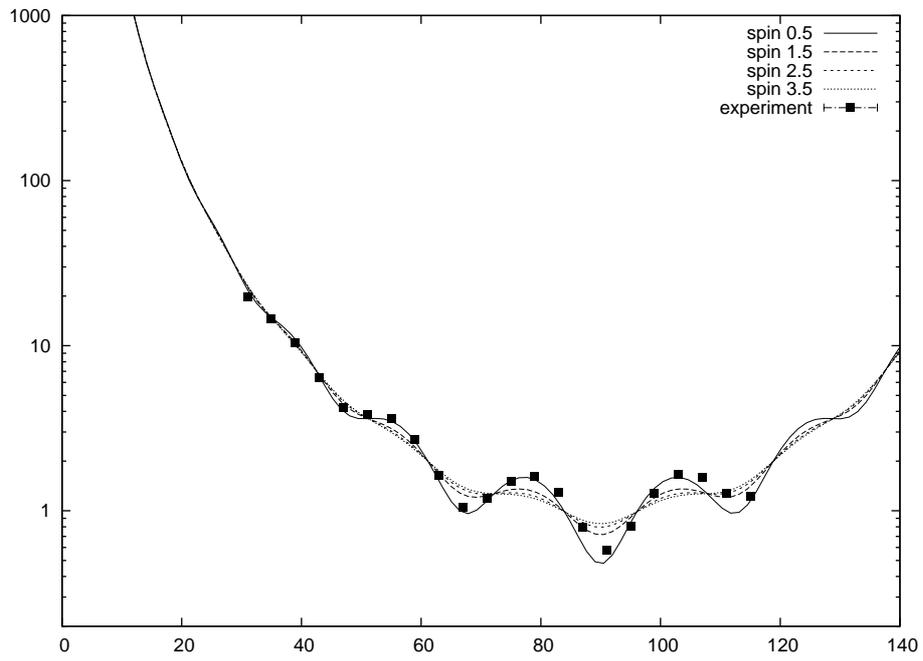


図 14 $^{13}\text{C}-^{13}\text{C}$ 散乱

これより、 ^{12}C についてはスピン $s=0$ 、 ^{13}C については $s=\frac{1}{2}$ とするのが妥当と考えられる。

4.6.2 Mott の式を用いることの妥当性について

今回の実験は 7.5MeV という低エネルギー領域で行ったため、核力の効果を見捨て、散乱は Coulomb 散乱によるものであったとしていた。ここでは、それが妥当であったのかを、理論・実験結果の両面から見ることにする。

- 理論的考察

核力の詳細はわからないので、核力を考慮に入れたモデルとして、Coulomb ポテンシャルが $r < r_{\text{nuc}}$ では核力によって $-V_0$ になっているようなモデルを考える：

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < r_{\text{nuc}} \\ \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & r > r_{\text{nuc}} \end{cases} \quad (157)$$

すなわち、 r_{nuc} よりも近づいた粒子は、核力によって $-V_0$ なる引力を受けるものとする。

波動関数を次のように、球面調和関数 Y_{lm} を用いて軌道角運動量 l について展開する：

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (158)$$

$R_l(r) = \frac{\chi_l(r)}{r}$ とおくと、Shchrödinger 方程式は次の形に帰着する。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r) \chi_l(r) = E \chi_l(r) \quad (159)$$

ただし有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ は

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (160)$$

であり、 m は換算質量。ゆえに、角運動量 l に対して、最近接距離 r_l を $V_{\text{eff}}(r) = E$ の $r > r_{\text{nuc}}$ での解として定めると、Gamov の透過因子は

$$T \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_{\text{nuc}}}^{r_l} dr \sqrt{2m(V_{\text{eff}}(r) - E)}\right) \quad (161)$$

となる。

r_l には $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$ という関係があり、また、 l が大きいほど遠心力ポテンシャルが大きく、 $V_{\text{eff}}(r)$ も大きくなるので、 $l = 0$ のときが最も透過確率が高い。よって、 $l = 0$ のときの透過確率を計算すれば核反応の効果の大きさを評価することができる。 $r_0 = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E}$ なので、 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱での値、 $Z = 6, m = 6u, E \simeq 7.5/2[\text{MeV}]$ を代入すると、 $r_0 \simeq 1.4 \times 10^{-14}[\text{m}]$ となる。これと炭素原子核の半径の値 $r_{\text{nuc}} = 2.5 \times 10^{-15}$ を用いて計算すると、 $T \simeq 10^{-9}$ となり、トンネル効果による波束の透過確率は非常に小さく、無視できる。よって、理論的には今回のエネルギー領域では核反応の効果は無視できることがわかる。 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱でも同様。

- Blair 模型による検討

さらに、Blair 模型に対する検討を行った。もともとの Blair 模型では部分波はすべて消えるか完全に残っているかのどちらかしかなかったが、これを少し変形し、 l 次の部分波が $0 \leq a_l \leq 1$ なる吸収係数 a_l にしたがって消滅するようなモデルを考えた。このモデルを用いて、角度補正、定数倍補正に加えて部分波の吸収係数の値も同時に動かして、換算 χ^2 が最良となることを計算により求めた。ただし、スピンの値としては Mott 式との比較で決定した値 (^{12}C : $s = 0$ 、 ^{13}C : $s = \frac{1}{2}$) を用いた。 χ^2 検定の結果を表 7、8 で示す。

- 考察

理論的には核反応の効果は無視できるため、部分波の吸収も起こらないはずであった。しかし、Blair 模型による fit の結果をみると、はじめの方では部分波が消えてしまっている。これには、いくつか原因が考えられる。

表 7 ^{12}C Blair 模型での吸収係数と換算 χ^2 及び補正值

χ^2/n	原点補正	定数倍補正	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
12.0	0.79	1.77	1	0.4	0	0	0

表 8 ^{13}C Blair 模型での吸収係数と換算 χ^2 及び補正值

χ^2/n	原点補正	定数倍補正	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8
6.49	1.28	4.08	0.8	0.6	0	0	0

まず、今回は χ^2 が最小になるような吸収係数を求めたわけだが、 χ^2 の値自体に注目してみると、 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱の方については、最良の、部分波が少し消えているときで χ^2 は 104、全く部分波が消えていないとき (Mott で fit した時のパラメータの値) では χ^2 は 125 で、値自体はそれほど大きく違うとは言えない。すなわち、(膜の不均一さ、ビームのブレなどの要因によって生じている) 評価し切れていない誤差によって値が少し変わったため、部分波が消えてしまっているように見えているだけだと考えることができる。これは、吸収係数の値などを χ^2 検定で求める時に、誤差付きで計算するようにすればもう少しはっきりしたことがいえると思われるが、今回は時間的にそこまですることはできなかった。また、 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱については、 χ^2 の値の差はある程度あるため、これだけでは説明できないと考えられる。

次に、実験器具が有限の立体角を持つことが影響して、鋭い山や谷がならされてしまっていることが考えられる。図 13、14 を見ると、全体としてピークが Mott の式のものに比べて少しなだらかになっている傾向があり、この結果として部分波が消えてしまっているように見えた可能性がある。ただ、今回の実験機器では立体角は $0.0012[\text{sr}]$ と、それほど大きいわけではないので、これだけでは (特に $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱での) 大きな差は説明できず、主な要因ではないと考えられる。

最後に、膜の不純物の影響が考えられる。図 13、14 でもわかるとおり、断面積が落ち込む部分で、理論式に比べて実験での値は落ち込みが少なくなっている。膜に不純物が含まれていると、これらは Rutherford 散乱なので干渉項がなく、(特に実験の後方の角度では) 落ち込んでいる部分で大きく効いてきて、落ち込みが少ないように見せる効果がある。この不純物の寄与については、後で不純物の同定等をしている部分で詳しく述べる。

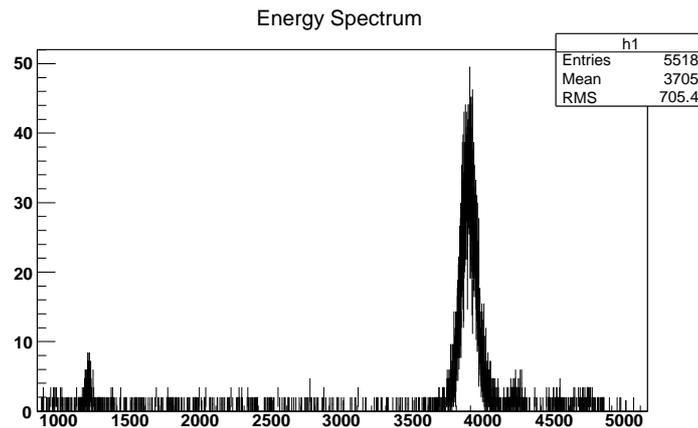
4.7 定数倍補正についての考察

入射粒子のビームを ^{13}C にした場合に定数倍補正が大きくなった原因を考察する。実験時には ^{12}C ビームに対してはファラデーカップを入れてスリット下辺に当たる電流とファラデーカップ、すなわちスリットを通過して検出される電流の値を記録した。しかし、 ^{13}C イオンにビームを切り替えた際、この値を取り直す作業をしなかったため、解析では ^{12}C の入射ビームに対する D 部検出電流と通過電流の比を用いて入射粒子数を決定することとなった。

加速器に入れるイオンは当日 ^{12}C 、 ^{13}C が 50% ずつであった。このうち入射粒子として用いるイオンを加速部に入射し、イオンの加速後、これを振分電磁石を用いて 3 個のもののみをターゲットに入射させる。この際 2 種類のイオンビームが同様にスリットに入射している事は保障されない。すなわち、 ^{12}C に対する比を ^{13}C に用いるのは正しくない。今回の結果から逆に推定すると、 ^{12}C での定数倍補正值 ~ 1.8 と ^{13}C の定数倍補正值 ~ 4.1 から逆に計算すると、スリット D 部にあたる電流とスリットを通過する電流の比は ^{13}C の場合には ^{12}C の場合の 0.44 倍程度であったと考えられる。

4.8 不純物の同定

実験で得たエネルギースペクトルの中には、炭素同士の散乱によるピークの他にいくつか鋭いピークがあるのが見て取れる。ここではまず、これらのピークがどういった粒子の散乱によって生じたものなのかを運動学により検証し、さらに解析でおこなったフィッティングの正当性を考察する。ここでいう正当性とはフィッティングで得た粒子数に目的以外の粒子がカウントされていた場合、それが計算上無視できるかどうかということである。

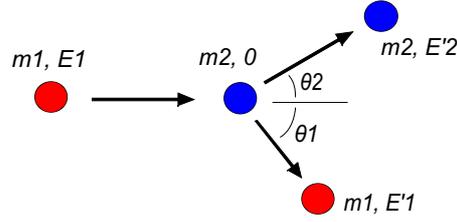


4.8.1 不純物として考えられるもの

主として考えられるのはターゲットに混じった不純物である。炭素膜作成時に湯を用いたことから H, O が、またプレートの剥離剤には塩化ナトリウムが使われていたことから Na および Cl が予想される。このほかに炭素ビームに混じった不純物等考えられる要因はあるが特定することが難しかったので、今回はこの四元素について考察した。

4.8.2 同定方法

今回の解析ではエネルギーと channel の値の間の比例係数がはっきりとはわかっていなかったため、それらの間の絶対的な対応がわからなかったのであった。そこで解析で決定した炭素同士の散乱が与えるピークは正しいと認めた上で、これを基準として他の散乱の与えるピークを力学計算によって求めることにする。



散乱の概略図

図のように、エネルギー E_1 で入射してきた質量 m_1 の粒子が、静止した質量 m_2 の粒子と弾性散乱を起こした場合を考える。散乱角を θ_1 反跳角を θ_2 とすると、本実験で入射粒子のもつ運動エネルギーは 7.5Mev であることを考慮し非相対論極限をとれば、散乱後の各粒子のもつエネルギーは以下のように表せる。

$$E'_1 = E_1 \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (162)$$

$$E'_2 = E_1 \frac{2m_2c^2(2m_1c^2 + E_1)\cos^2\theta_2}{(m_1c^2 + m_2c^2 + E_1)^2 - E_1(2m_1c^2 + E_1)\cos^2\theta_2} \quad (163)$$

ただし、

$$A = (m_1c^2 + m_2c^2 + E_1)^2 - E_1(2m_1c^2 + E_1)\cos^2\theta_1 \quad (164)$$

$$B = (m_2c^2 - m_1c^2)(m_1c^2 + m_2c^2 + E_1) + m_1c^2(2m_1c^2 + E_1)\cos^2\theta_1 \quad (165)$$

$$C = (m_2c^2 - m_1c^2)^2 \quad (166)$$

本来は Bethe-Bloch 等の非弾性散乱の効果も考慮に入れる必要があるが、入射粒子の有効電荷の値が定かではないことと、とりあえず計算してはみたものの、energy-channel 対応が飛躍的によくなったわけではなく、さまざまな要因（有効電荷、膜の厚さ、膜のどの部分で散乱されるか、など）について考えるとなかなか解析が進まず、時間が足りなかったため、ここではこれらの効果については無視することにする。この式によって得られた散乱粒子および反跳粒子のエネルギー角度分布を変換式： $(channel) = 698.48 \times (\text{エネルギー}) + 55.175$ により channel 角度分布に変える。この式は実験結果の炭素の channel を、先の力学計算によって得られた炭素のエネルギーと対応させてプロットしたグラフを最小二乗法により線形近似したものである。

*この線形近似式が妥当であるかを確認するために、H の (ピークの特定後の) 情報を追加した。

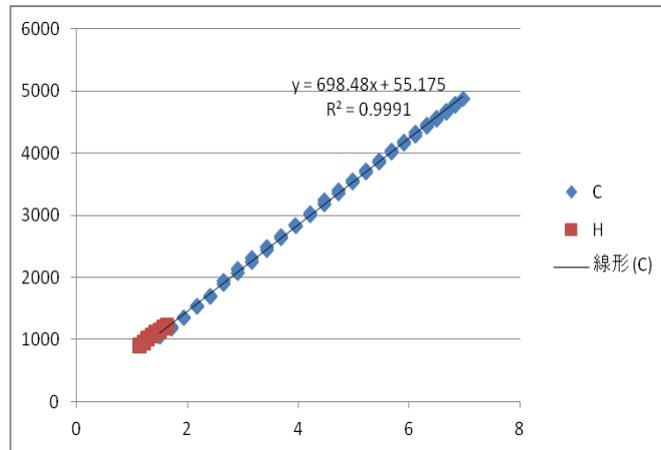


図 15 エネルギーと channel の線形関係

H, O, Na, Cl により散乱された C12 および C13 の channel 角度 (lab) 分布は次のようになった。

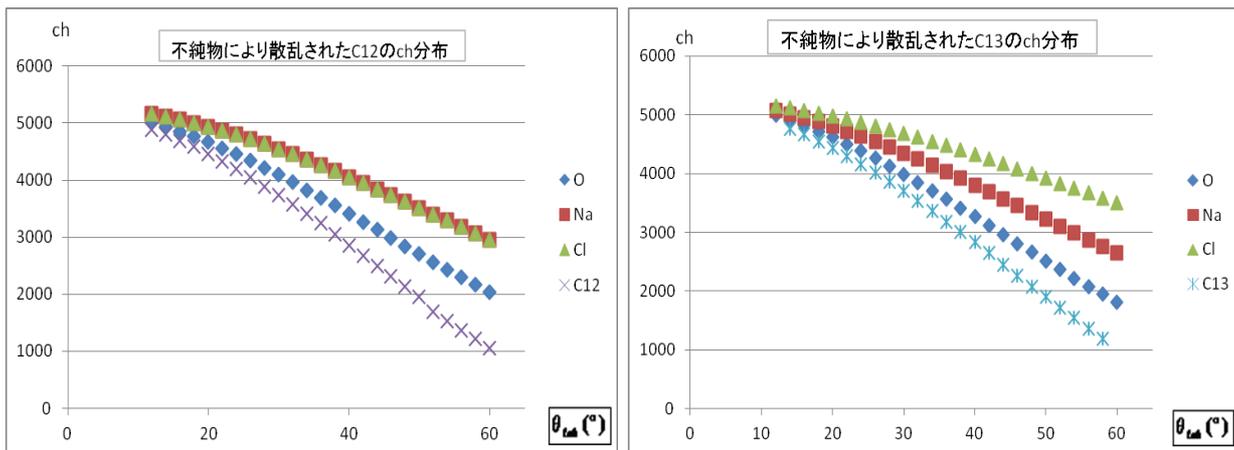


図 16 不純物に散乱された炭素の channel 角度分布

*H によって散乱された C は 12° 以下の方向に散乱されるためグラフには表示されていない。

また入射粒子 C12, C13 により反跳した H, O, Na, Cl の channel 角度 (lab) 分布は以下のようなになった。

これらを用いて不純物の同定を行った。

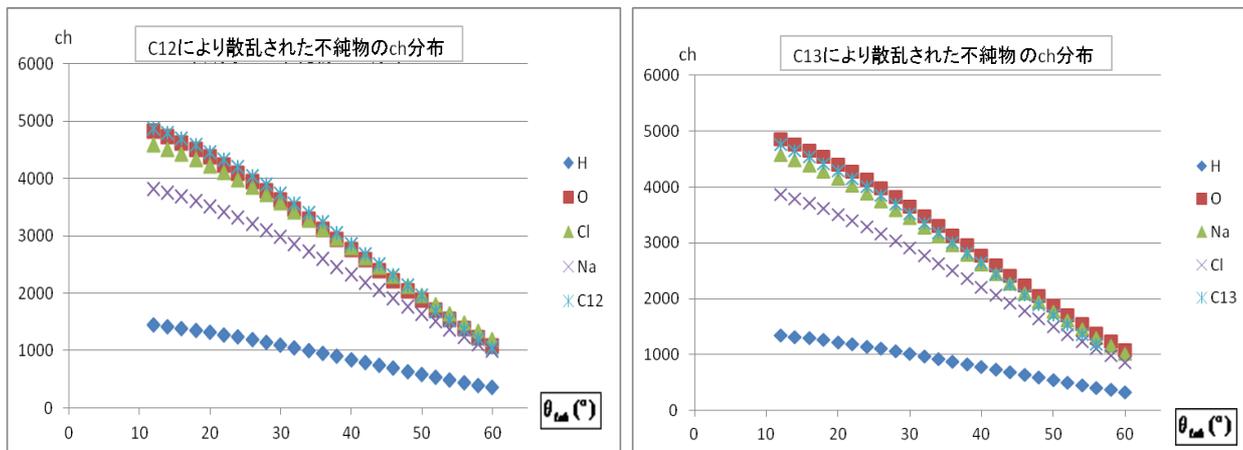


図 17 炭素と弾性散乱して反跳された不純物の channel 角度分布

4.8.3 結果と考察

不純物の影響が如実に現れるのは同種粒子散乱の微分断面積が小さい箇所である。(異種粒子散乱では Rutherford の公式から分かるように不純物のピークの高さは炭素同士の散乱のそれにとまなうため、ヒストグラムに顕著には出てこない。) 重心系において C12 では 70° 後半および 100° 前半, C13 では 90° 付近において最小値をとる。そこでこれらの角に最も近い実験データとして C12vsC12 より 38°, C13vsC13 より 44° のヒストグラムをサンプリングし不純物のピークの同定を行った。

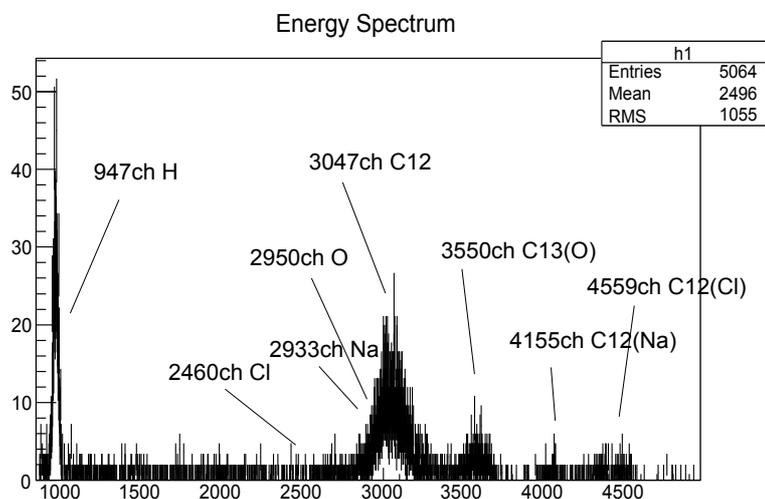


図 18 C12vsC12 38° におけるヒストグラム

*ここで、例えば C12(O) は O に散乱された C12 の意。

C12vsC12 では O, Na が C13vsC13 では O, Na, Cl がピークに混じっていることが分かる。ここでは特に O がどれだけの割合混じっているのかを概算して、それによって断面積の値がどうなるかを考察したい。

本来であれば、反跳の O の影響を除くには、次のようにするべきである。

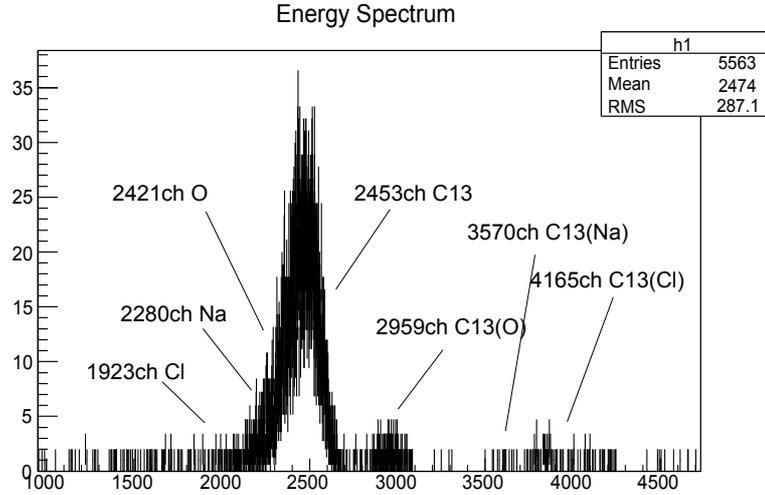


図 19 C13vsC13 44° におけるヒストグラム

- (1) O に散乱された C は C-C 散乱とほぼ分離されているので、この個数をさまざまな角度について調べる。
- (2) その結果から、C が O に散乱されるとき微分断面積の重心系での値を求める。
- (3) Rutherford 散乱で fit するなどして、C が O に散乱されるとき微分断面積を任意の角度について求められるようにする。
- (4) 重心系では、力学計算で対応する 2 つの角度について、C が O に散乱される断面積と O が C に散乱される断面積は同じになるので、これを用いてある角度での反跳 O 粒子の個数がわかる。

ただ、今回は O に散乱された C のデータとして、まともに測れるのは断面積が落ち込んでいる数点のみであり、そこまでのことは行えなかった。そこで、簡単のため、C と O の原子量が比較的近い事を理由に、少々荒い議論ではあるが以下の三点を仮定する。

- ・立体角の変換係数による寄与を無視できる。(C(O) と O の実験室系微分断面積が一致する)
 - ・C(O) と O の散乱方向が (実験室系で) 90° を成している。(実際には非相対論的に考えても成立していないが、あくまでも簡単のためこう仮定する。)
 - ・O の分布は C の分布に覆われている。
- この下で不純物 O による C の微分断面積の相対誤差は以下のように計算される。

$$\frac{C(O)_{count}(\theta_1)/N_{beam}(\theta_1)}{C_{count}(\theta_1)/N_{beam}(\theta_1) - C(O)_{count}(\theta_2)/N_{beam}(\theta_2)} \quad (167)$$

$C(O)_{count}(\theta)$: O により θ 方向に散乱した C のカウント数

$C_{count}(\theta)$: 炭素同士の散乱で θ 方向に散乱したもののカウント数

$N_{beam}(\theta)$: θ 方向を観測したときの入射粒子の個数

まず C12vsC12 $\theta_1 = 38^\circ$ の 1950ch O に対応する C12(O) は $\theta_2 = 52^\circ$ 2702ch にあることが分かった。必要なデータを集めてくれば、

$$\frac{147/(3.333 \times 10^{12})}{2413/(2.624 \times 10^{12}) - 147/(3.333 \times 10^{12})} = \text{約 } 5.0\% \quad (168)$$

また C13vsC13 $\theta_1 = 44^\circ$ の 2421ch O に対応する C12(O) は $\theta_2 = 46^\circ$ 2702ch で、

$$\frac{91/(2.875 \times 10^{12})}{4541/(3.655 \times 10^{12}) - 91/(2.875 \times 10^{12})} = \text{約 } 2.6\% \quad (169)$$

実験値に上の補正を加え、理論値 (Mott 散乱) と比較すると C12vsC12 38° では相対誤差が 49% から 41% に C13vsC13 44° では 7.7% から 4.9% に変化した。よって解析で行ったフィッティングは不純物の分離の観点からは不備があったと言える。O に加えて Na, Cl について補正を加えることをすれば理論との誤差はさらに小さくなる事が期待できる。しかしこのような補正を施せるデータは限られている。ヒストグラムの外形上、微分断面積が極めて小さい場合を除いてピークの同定は難しい。またピークが同定出来ても例えば C(O) が炭素同士の散乱による C のピークと混ざっている場合など、補正值の計算が困難であることが多かった。以上の理由から今回の解析に不純物の補正を加えることはしない。

4.8.4 マイナス側の角度での結果について

今回の実験では、プラス側の角度での傾向とマイナス側の角度での傾向が異なっていて、マイナス側で断面積の値が異常に大きくなっていた。それぞれの結果を見ると、マイナス側の角度をすべて同じくらいずらすと、だいたい理論計算と重なるように見える。そのため、機器の調整がおかしくてマイナス側からプラス側へ移るときに角度が少なく回ってしまったのかとも思ったが、ビームを変える前と後など、何度もマイナス側とプラス側を行き来しているにもかかわらず、同じくらいの角度ずらすとマイナス側の結果がうまく説明できるというのは妙であるように思う。今回の実験では機器の調整などについてのデータがあまりにも不足している（調整は向こうの施設の方に主にやってもらうことになった）ことから、これ以上原因を追究することはできなかった。また、マイナス側でだけ断面積が大きくなる要因はほとんど思いつかなかった。ただ、去年の後期の実験でも同様の傾向が見られたそうなので、次回の実験では機器の調整がうまくいっているのかについて確認することが望ましいと思われる。

5 補足

発表会での指摘を受け、MCA と visual scaler で検出される最低のパルスハイトの差を求める作業を図 4 の回路を用いて 10 月 17 日に行った。最初にゲートを開けばなしにしてスペクトルをとりながらスケーラー値を観測し、パルスを下げてそれぞれが見えなくなる点を見積もった。この見積もりをもとに以下の値についてゲートを開けている間のスペクトルとスケーラー値を測定し、表の結果を得た。また、このときのモジュールの設定は以下の通り:

- universal coincidence - coincidence requirement 2 (coinc,coinc)
- timing SCA - upper 9.1, lower 0.12, delay 9.89 (1-1.1 μ sec, INT)
- linear gate stretcher - gated,coinc
- amplifier - gain 6.6, coarse gain 500, shaping time 0.5, (thresh, delay,pos)
- level adaptor -comple.
- quad gate/delay generator - FF
- pulser - height0.6

表 9 visual scaler と MCA で検出されるパルスハイトの下限値

pulser	0.1	0.09	0.03	0.02
MCA	2007	-	-	-
visual scaler	2009	2074	2089	-

これより、MCA で測定できるパルスハイトの下限値 0.1 に対し、scaler の測定下限値は 0.03 となり、scaler での表示粒子数が大きくなっていたと分かる。これが scaler の値がスペクトルの積分値に対して大きくなっていた原因だと結論付けた。

6 conclusion

入射対象として実験室で作成した薄膜は不均一であり、またその測定を一様に行う事が困難であることが分かった。

7.5MeV 程度の入射エネルギー領域においては ^{12}C 及び ^{13}C の同種粒子散乱は Mott 式に従うと分かった。また、それぞれのスピンについては ^{12}C について $s = 0$ 、 ^{13}C について $s = 1/2$ であることが散乱微分断面積の検討から結論できた。さらに、このエネルギー領域では高エネルギーの散乱実験では Blair 式が示すような部分波の吸収は起こらないはずであったが、 χ^2 検定の結果部分波の吸収とみられるような現象が起こったが、これは微小な散乱断面積のずれの寄与によるものと考えられる。

炭素間異種粒子散乱は Rutherford 式に従うことが確かめられ、同種粒子散乱にみられるような微分断面積の干渉現象が見られないことが確認できた。

さらに、エネルギーとスペクトルの対応関係についての検討から、実験に用いた薄膜には不純物として O,Na,Cl が混ざっていたことが結論できた。

参考文献

- [1] 猪木慶治・川合光: 量子力学 (講談社, 2006) 第 7 章
- [2] 猪木慶治・川合光: 量子力学 (講談社, 1994) 第 11 章
- [3] John R. Taylor: 計測における誤差解析入門, 林茂雄・馬場涼訳 (東京化学同人, 2008)
- [4] W.M.Gibson: *The Physics of Nuclear Reactions*, Chap.5 (Pergamon Press, 1980)
- [5] A. メシア: 量子力学 2, 小出昭一郎・田村二郎訳 第 10 章, 第 11 章, 第 14 章 (東京図書, 1972)
- [6] D.A.Bromley, J.A.Kuehner, E.Almqvist: *Heavy-ion Reaction Mechanisms. Elastic Scattering Data* (John Wiley, New York, 1960)
- [7] 倉澤治樹: <http://physics.s.chiba-u.ac.jp/kurasawa/qm.a.pdf>
- [8] W.E.Burcham, M.Jobes: *Nuclear and Particle Physics* (Wiley, 1995)
- [9] S.S.M.Wong: *Introductory Nuclear Physics* (Prentice-Hall International, 1990)
- [10] W.R.Leo: *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments* (Springer-Verlag, 1987)
- [11] G.F.Knoll: 放射線計測ハンドブック (日刊工業新聞社, 2001)
- [12] 「マイクロイオンビーム解析実験装置」パンフレット (京都大学大学院工学研究科, 2010)

謝辞

まずはこの課題演習にあたり理論面での多面的なご指導を下された菅沼秀夫先生 (京都大学理学研究科准教授)、度重なる薄膜測定を含め実験・解析過程について広くご指導して下さった村上哲也先生 (同研究科講師) に深く御礼申し上げます。

また、当日の実験でお世話になりました宇治キャンパス量子理工学教育研究センターの皆様、忙しい日程の中相談に乗ってくださった TA の天野さん、アドバイスを下さった前課題研究 A5 の先輩方、演習室を快く使わせてくれた後期課題演習 A5 の方々の協力なしではこのレポートは完成しえないものでした。

本当にありがとうございました。

データ及び計算結果

表 10 $^{12}C - ^{12}C$ 散乱

beam	target	scaler	current	θ
C12	C12	10362	40	-16
	C12	12741	23	-14
	C12	11717	10	-12
	C12	10313	49	12
	C12	10379	90	14
	C12	6981	119	16
	C12	6503	160	18
	C12	6490	171	20
	C12	5979	215	22
	C12	6024	411	24
	C12	6014	761	26
	C12	5952	729	28
	C12	6067	575	30
	C12	6074	597	32
	C12	6508	972	34
	C12	5998	2245	36
	C12	6091	5495	38
	C12	10030	4251	40
	C12	11451	2449	42
	C12	10338	1799	44
	C12	12115	2492	46
	C12	10023	3990	48
	C12	9979	10471	50
	C12	10811	6978	52
	C12	12202	3231	54
	C12	14227	2275	56
	C12	12157	1913	58
	C12	12730	2583	60

表 11 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱

beam	target	scaler	current	θ
C12	C13	10457	41	-16
	C13	12204	23	-14
	C13	20439	20	-12
	C13	10344	54	12
	C13	8099	78	14
	C13	8074	125	16
	C13	6587	146	18
	C13	6051	192	20
	C13	6003	252	22
	C13	5991	356	24
	C13	6012	480	26
	C13	5989	611	28
	C13	6022	756	30
	C13	6111	918	32
	C13	6182	1098	34
	C13	5997	1311	36
	C13	9810	2408	38
	C13	14358	3943	40
	C13	12641	3625	42
	C13	12397	3714	44
	C13	11298	3516	46
	C13	11738	3787	48
	C13	11770	3819	50
	C13	12361	3798	52
	C13	14008	3797	54
	C13	14196	3444	56
	C13	12922	2819	58
	C13	13442	2642	60

表 12 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 散乱

beam	target	scaler	current	θ
C13	C13	11577	115	-16
	C13	19702	111	-14
	C13			-12
	C13	27242	90	12
	C13	14667	444	14
	C13	13297	551	16
	C13	12829	754	18
	C13	10044	953	20
	C13	10029	1445	22
	C13	9985	1626	24
	C13	10043	1763	26
	C13	10030	2342	28
	C13	10010	3890	30
	C13	9955	5974	32
	C13	10001	5508	34
	C13	10026	4608	36
	C13	10019	4454	38
	C13	8008	4503	40
	C13	5983	5468	42
	C13	5998	7653	44
	C13	5976	6019	46
	C13	10006	6754	48
	C13	10951	5976	50
	C13	10027	5871	52
	C13	9997	7661	54
	C13	10002	8405	56
	C13	11456	6987	58
	C13	14044	5951	60

表 13 $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 散乱

beam	target	scaler	current	θ
C13	C12	19819	206	-16
	C12	28203	153	-14
	C12	15167	415	14
	C12	11112	476	16
	C12	10032	877	20
	C12	10004	1612	24
	C12	10002	2708	28
	C12	9969	4119	32
	C12	10140	5772	36
	C12	9968	6935	40
	C12	9994	7960	44
	C12	10038	8404	48
	C12	10332	8345	52
	C12	10007	7075	56
	C12	10744	6984	58

表 14 $^{12}C - ^{12}C$ 微分断面積

散乱角 Θ_{lab}	$\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{cm}}$	N_{beam}	δN_{beam}	$N_{elastic}$	$\delta N_{elastic}$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$	$\delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$
-16	0.259000294	19103995875	4.97E+08	8664.655481	138.8070729	67.73956019	3.158756124
-14	0.256717919	10984797628	4.84E+08	10912.43638	160.3889412	147.0621396	8.574097538
-12	0.254783447	4775998969	4.79E+08	9930.833888	149.5254877	305.4975523	32.78873539
12	0.256283274	23402394946	5.06E+08	7551.049001	133.5160516	47.68505421	2.144206114
14	0.258491434	42983990718	5.69E+08	8675.552011	143.113556	30.08510785	1.236195361
16	0.261059119	56834387727	6.28E+08	5522.478624	117.4039912	14.62772402	0.623246852
18	0.264003491	76415983498	7.27E+08	5111.044043	115.2124951	10.18239919	0.436776356
20	0.26734473	81669582364	7.56E+08	4923.825517	117.0120621	9.294563099	0.404260128
22	0.271106384	1.02684E+11	8.78E+08	4604.139847	110.1316266	7.009718856	0.304467869
24	0.275315805	1.96294E+11	1.49E+09	4634.955948	124.8108068	3.748743626	0.168645461
26	0.280004665	3.63454E+11	2.65E+09	4370.049778	102.0984939	1.941412415	0.083285682
28	0.285209596	3.4817E+11	2.54E+09	4635.166699	105.7026529	2.189539436	0.093273587
30	0.290972954	2.7462E+11	2.03E+09	5099.050513	109.0395155	3.115479522	0.130445773
32	0.297343756	2.85127E+11	2.10E+09	5125.160119	108.919005	3.082071705	0.128830897
34	0.30437883	4.64227E+11	3.36E+09	5431.057905	114.8396749	2.05344663	0.085679958
36	0.312144224	1.07221E+12	7.71E+09	4078.856793	98.69596779	0.684743982	0.029677897
38	0.320716958	2.62441E+12	1.88E+10	2475.138901	91.55687066	0.174423345	0.008997844
40	0.330187198	2.03028E+12	1.46E+10	7465.103852	135.6166809	0.700093085	0.028203313
42	0.340661002	1.16964E+12	8.41E+09	9972.777657	142.4427893	1.674945111	0.064804961
44	0.352263786	8.59202E+11	6.18E+09	9280.171908	138.541836	2.194035572	0.085426076
46	0.365144762	1.19018E+12	8.55E+09	10966.35741	149.4522998	1.940127364	0.074605217
48	0.379482675	1.90562E+12	1.37E+10	8669.507251	127.9925023	0.995552759	0.038696495
50	0.395493296	5.00095E+12	3.59E+10	7160.342843	116.0319154	0.326539401	0.012878272
52	0.413439337	3.33269E+12	2.39E+10	7408.662009	172.3271484	0.529994571	0.022696277
54	0.433643745	1.54313E+12	1.11E+10	8969.972859	216.4212941	1.453577076	0.062942155
56	0.456507809	1.08654E+12	7.81E+09	10195.15491	235.1266351	2.470082433	0.105518452
58	0.482536228	9.13649E+11	6.57E+09	9093.965925	212.8602983	2.769612981	0.118833894
60	0.512372485	1.23364E+12	8.86E+09	9756.874002	233.390163	2.336807285	0.100920501

表 15 $^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 微分断面積

散乱角 Θ_{lab}	$\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{cm}}$	N_{beam}	δN_{beam}	$N_{elastic}$	$\delta N_{elastic}$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$	$\delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$
-16	0.281145461	19581595771	4.98E+08	9537.280079	146.8848803	42.05188127	1.926524808
-14	0.278542258	10984797628	4.84E+08	11154.87846	161.3874381	86.86438936	5.039957807
-12	0.276318154	9551997937	4.82E+08	18395.16819	211.5221898	163.4168593	10.20404323
12	0.276318154	25790394431	5.12E+08	7754.254042	134.3740302	25.51345989	1.115025411
14	0.278542258	37252791955	5.47E+08	7358.23431	134.6321496	16.89599509	0.710012852
16	0.281145461	59699987108	6.42E+08	7311.962402	137.4291941	10.57471536	0.433951705
18	0.284144662	69729584942	6.92E+08	5869.868847	122.9147902	7.345624366	0.307478336
20	0.287559769	91699180198	8.13E+08	5315.885993	119.0183361	5.11936657	0.216904044
22	0.291414035	1.20355E+11	9.87E+08	5245.300029	113.5994571	3.900263338	0.163231759
24	0.295734452	1.70026E+11	1.31E+09	5229.219914	115.7413806	2.793203022	0.117332564
26	0.300552233	2.29248E+11	1.71E+09	4003.695048	242.5793	1.611956753	0.113320745
28	0.305903384	2.91814E+11	2.15E+09	3823.922847	206.2825096	1.231022143	0.079584664
30	0.311829397	3.61066E+11	2.63E+09	3137.326293	188.9422248	0.832086778	0.058218918
32	0.318378087	4.38437E+11	3.18E+09	2431.291136	223.8260308	0.542189531	0.053517953
34	0.3256046	5.24405E+11	3.79E+09	2748.25579	237.038593	0.524033458	0.04889753
36	0.333572632	6.26133E+11	4.52E+09	2287.373644	205.3483436	0.374229918	0.036141466
38	0.342355919	1.15006E+12	8.27E+09	3688.705095	221.2134454	0.337216617	0.023516812
40	0.352040057	1.88318E+12	1.35E+10	5827.810322	349.197184	0.33456799	0.023317061
42	0.362724731	1.7313E+12	1.24E+10	3211.086688	273.3964248	0.206602161	0.019065575
44	0.374526473	1.77381E+12	1.27E+10	2193.126319	177.8289174	0.142206007	0.012592703
46	0.387582085	1.67924E+12	1.21E+10	1632.020705	118.7523577	0.115678904	0.009370304
48	0.402052906	1.80867E+12	1.30E+10	1546.695672	107.203213	0.105586026	0.00822681
50	0.41813018	1.82395E+12	1.31E+10	1282.593082	81.54938151	0.09029515	0.006579445
52	0.436041824	1.81392E+12	1.30E+10	1102.334613	69.7860725	0.081376743	0.005910141
54	0.456061041	1.81345E+12	1.30E+10	789.7004774	62.39896485	0.060989974	0.005285531
56	0.478517328	1.64485E+12	1.18E+10	605.6347544	48.7073121	0.054107689	0.004758645
58	0.503810628	1.34635E+12	9.67E+09	423.8722015	39.71479644	0.048710306	0.004882142
60	0.532429634	1.26182E+12	9.07E+09	366.7205442	40.94724881	0.047520207	0.005569074

表 16 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$ 微分斷面積

散亂角 Θ_{lab}	$\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{cm}}$	N_{beam}	δN_{beam}	$N_{elastic}$	$\delta N_{elastic}$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$	$\delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$
-16	0.25816683	54923988139	6.19E+08	10794.43186	153.3328358	60.92461894	2.394071985
-14	0.256007953	53013588552	6.11E+08	18502.95115	201.3595368	107.2906586	4.108474284
14	0.259354145	2.12054E+11	1.59E+09	13516.28417	137.3399505	19.84988376	0.736073876
16	0.262051374	2.63158E+11	1.95E+09	12230.88555	175.1606933	14.6245723	0.561695238
18	0.265131968	3.6011E+11	2.63E+09	11724.22587	167.7704203	10.36490571	0.397840082
20	0.268617241	4.55153E+11	3.30E+09	9039.821883	150.7912179	6.406064207	0.251889976
22	0.27253202	6.90132E+11	4.97E+09	8839.067999	141.3141913	4.191279211	0.163558413
24	0.276905103	7.76577E+11	5.59E+09	8892.081251	143.4271128	3.807187542	0.148787685
26	0.28176982	8.42009E+11	6.06E+09	9018.886394	143.2962938	3.623977636	0.141266426
28	0.287164709	1.11854E+12	8.04E+09	8829.204254	143.0115044	2.721799754	0.106439408
30	0.293134341	1.85786E+12	1.33E+10	8634.870742	145.3559369	1.635924927	0.06441043
32	0.299730323	2.85318E+12	2.05E+10	8274.96888	139.2934168	1.043811947	0.041096746
34	0.307012533	2.63062E+12	1.89E+10	8542.598498	141.0809363	1.197133539	0.04697181
36	0.315050638	2.20078E+12	1.58E+10	8820.306426	144.0330741	1.516149393	0.059371588
38	0.323925984	2.12723E+12	1.53E+10	8888.039896	142.0210026	1.625144564	0.063404215
40	0.333733953	2.15063E+12	1.54E+10	6989.479786	126.3293492	1.302368038	0.051988519
42	0.344586937	2.61152E+12	1.87E+10	5017.463894	111.3696798	0.794959475	0.033345404
44	0.356618114	3.65507E+12	2.62E+10	4896.436821	112.6545356	0.573643756	0.024311374
46	0.369986298	2.87467E+12	2.06E+10	5180.707982	114.0714576	0.800646558	0.033508745
48	0.384882229	3.22571E+12	2.31E+10	8917.850939	138.4181006	1.277666306	0.049610555
50	0.401536824	2.85414E+12	2.05E+10	9769.084283	145.4531897	1.650285477	0.063669176
52	0.420232149	2.80399E+12	2.01E+10	8865.12557	138.341543	1.595337285	0.061999043
54	0.4413162	3.65889E+12	2.63E+10	8817.179862	137.9301865	1.2769813	0.049646297
56	0.465223156	4.01423E+12	2.88E+10	8804.152924	137.8072108	1.225184836	0.047637042
58	0.492501592	3.33699E+12	2.39E+10	10432.86524	148.0048734	1.84888936	0.07084

表 17 $^{13}\text{C} - ^{12}\text{C}$ 微分断面積

散乱角 Θ_{lab}	$\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{cm}}$	N_{beam}	δN_{beam}	$N_{elastic}$	$\delta N_{elastic}$	$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$	$\delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{cm}$
-16	0.239551139	98385578754	8.52E+08	18096.62263	134.523688	12.48339308	0.480491386
-14	0.237336053	73072784220	7.09E+08	25518.84299	159.746183	22.91300041	0.878077645
14	0.237336053	1.98204E+11	1.50E+09	13577.96855	116.5245406	4.359716068	0.172584014
16	0.239551139	2.27338E+11	1.70E+09	10026.81322	100.1339764	2.87915575	0.116231701
20	0.245007697	4.18855E+11	3.04E+09	9119.197271	95.49448817	1.47178353	0.059134133
24	0.251958413	7.69891E+11	5.54E+09	8923.625679	94.46494418	0.809695675	0.03253582
28	0.260598426	1.29334E+12	9.29E+09	8765.018843	93.62167935	0.47250509	0.022301612
32	0.271185487	1.96723E+12	1.41E+10	8741.900811	93.49813266	0.274647064	0.037117932
36	0.284057519	2.75671E+12	1.98E+10	8959.931846	94.65691653	0.210972996	0.010206598
40	0.299655433	3.31216E+12	2.38E+10	9098.345067	95.38524554	0.168965358	0.008087802
44	0.318549385	3.8017E+12	2.73E+10	9514.628488	97.54295714	0.137138894	0.0079196
48	0.341456391	4.01375E+12	2.88E+10	9641.953452	98.19344913	0.148984249	0.008953315
52	0.369195249	3.98557E+12	2.86E+10	10120.13089	100.5988613	0.149011504	0.008720233