2011年度後期課題演習A5

期末レポート

同種粒子間および異種粒子間の粒子加速衝 突実験による炭素原子同位体¹²C,¹³Cの固 有スピンの同定

小野 光
高森 翔
西山 卓也
西山 俊幸
水野 翔太
村田 求基

提出日 2012 年 6 月 6 日

目 次

1	序説	1							
2	理論								
	2.1 量子:	力学における同種粒子の取り扱い1							
	2.1.1	フェルミオンとボソン							
	2.1.2	複合粒子の統計性2							
	2.1.3	スピンと統計性 2							
	2.2 運動	学							
	2.2.1	Lorentz 変換							
	2.2.2	相対論的運動量・エネルギー5							
	2.2.3	2 体衝突 (弾性衝突) 6							
	2.3 散乱	理論							
	2.3.1	微分散乱断面積							
	2.3.2	部分波展開 12							
	2.3.3	一般の微分散乱断面積12							
	2.3.4	Coulomb 散乱							
	2.3.5	Rutherford 散乱							
	2.3.6	Mott 散乱							
	2.3.7	Blair 散乱							
9	宝睦	21							
3	天歌 3.1 栖的 ¹	ビジュンジョン 21 定表薄晴の作成 91							
	0.1 1 17.10 2.1.1	交系存队のFF成 · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
	319	官兵工派官役員 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
	0.1.2 3.1.3	大阪丁順・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 22 蒲喵喵巨測完 93							
	3.9 粒子								
	0.2 ↑⊻] 3.21	ヨススマ · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
	3.2.1	と、「クローガンと、公時初天候役員・・・・・・・・・・ 20 装置構成・宇島の流れ 96							
	3.2.2 3.9.3								
	324	検出開回路 31							
	325	宝騎手順 33							
	326	字驗詳細 34							
	0.210								
4	結果・解権	所 35							
	4.1 $^{12}C($	ビーム) 対 ${}^{13}C(\boldsymbol{9} - \boldsymbol{f'} \boldsymbol{y} \boldsymbol{F}) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 35$							
	$4.2 {}^{12}C($	ビーム) 対 ${}^{12}C(\boldsymbol{9}-\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\boldsymbol{F})$ 43							
	4.2.1	補正とスピンの決定43							
	4.2.1 4.2.2	補正とスピンの決定 43 ¹³ Cの含有について 44							

		424	老容	45
	13	¹³ C(۲	*	10
	4.0	431	· エ) / · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	47
		4.9.1	mmCへCクの人と ····································	41
		4.3.2	しの合有について	40
		4.3.3	まこり	49
		4.3.4		49
	4.4	小純物		50
		4.4.1	不純物と考えられるもの...............	50
		4.4.2	運動学的エネルギー角分布..............	50
		4.4.3	同定方法	51
		4.4.4	同定結果と考察・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	51
5	老宛	2		58
0	- بر در . د ا			50
	5.1	Mott 0	り式を用いることの安当性	58
		5.1.1	最近接距離の考察・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	58
		5.1.1 5.1.2	最近接距離の考察 透過確率の考察	$58 \\ 59$
		5.1.1 5.1.2 5.1.3	最近接距離の考察	58 59 59
		$5.1.1 \\ 5.1.2 \\ 5.1.3 \\ 5.1.4$	最近接距離の考察	58 59 59 61
		$5.1.1 \\ 5.1.2 \\ 5.1.3 \\ 5.1.4 \\ 5.1.5$	最近接距離の考察	58 59 59 61 62
		$5.1.1 \\ 5.1.2 \\ 5.1.3 \\ 5.1.4 \\ 5.1.5 \\ 5.1.6$	最近接距離の考察	58 59 61 62 64
6	结論	5.1.1 5.1.2 5.1.3 5.1.4 5.1.5 5.1.6	最近接距離の考察	58 59 59 61 62 64 64
6	結論	5.1.1 5.1.2 5.1.3 5.1.4 5.1.5 5.1.6	最近接距離の考察	 58 59 59 61 62 64 66
6 謝	結論	5.1.1 5.1.2 5.1.3 5.1.4 5.1.5 5.1.6	最近接距離の考察	 58 59 59 61 62 64 66 67

1 序説

今期の課題演習 A5 では,波動関数のパリティ対称性,並びにスピンに関 する対称性に対して理論と実験の双方向から迫り,それらの一致をして自然 の対称性を垣間見ることを目標としてきた。本レポートの題材となった実験 では,タンデム型静電加速器を用いて,炭素原子同位体¹²C,¹³Cの同種粒 子間,ならびに異種粒子間での衝突実験を行った。特に今回の実験では,波 動関数のスピン対称性を確認することを目的とする。

2 理論

本実験の基礎となる散乱に関しての知見をまとめる。まず,波動関数にス ピンに関する対称性が生じる根源となった同種粒子の理論について述べる。 次に,実験および散乱の理論における技術面での便宜を図るため,実験室系 と重心系との関係性すなわち運動学について述べる。その後,本実験の粒子 衝突実験の理論的基礎についてまとめる。特に今回の実験では,比較的エネ ルギーの低い領域におけるクーロン散乱が主なので,本レポートでもクーロ ン散乱の関連を重点的に解説する。

2.1 量子力学における同種粒子の取り扱い

2.1.1 フェルミオンとボソン

同じ粒子をいくつか含む系があるとする。古典力学的には同種であるということは,質量や電荷などの「属性」が同じという以上の意味はなく,各粒子は運動方程式と初期条件から一意に決まる軌道をもつため,区別することが可能である。しかし量子力学的には不確定性原理から粒子の区別ができず, 軌道の概念が成り立たない。そこで系の状態は状態ベクトルで指定され,同 種粒子のどの2つを入れ替えても元の状態と同じでなくてはならない。

種類 a の粒子が N_a コある系を考える。位置 \mathbf{r} とスピンの z 成分 s_z をまとめて ξ とかき,各粒子の座標を $\xi_1^{(a)}$ $\xi_2^{(a)}$,… $\xi_{N_a}^{(a)}$ で表すとき,系の波動関数 ψ は

$$\psi(\xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_{N_1}^{(1)}; \xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_{N_2}^{(2)}; \xi_1^{(3)}, \cdots, \xi_{N_3}^{(3)}; \cdots)$$
(1)

とかける。

次に同じ種類の粒子を入れ替える演算子 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ を次で定義する:

 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$: 第 a の種類の粒子のうち i 番目と j 番目のものを入れ替える

同種粒子の入れ替えでは系の状態が変化しないことから, $\psi \ge \hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi$ は同じ 状態を表す,つまりcを定数として

$$\hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi = c\psi \quad (i \neq j) \tag{2}$$

とかけると考えられる。

 $\hat{P}_{i,j}^{(a)}$ は2つの粒子を入れ替える演算子だから,2回作用させると状態は元に戻る。従って

$$(\hat{P}_{i,i}^{(a)})^2 = \hat{1} \tag{3}$$

である。式(2),(3)より $\hat{P}_{i\,,j}^{(a)}$ の固有値は
 ± 1 ,つまり $c=\pm 1$ であるとわかる。
 $c=\pm 1$ のどちらをとるかは粒子ごとによるはずであるから,次のようになる:

$$\hat{P}_{i,j}^{(a)}\psi = c^{(a)}\psi \quad (i \neq j; i , j = 1 , 2 , \cdots , N_a)$$

$$c^{(a)} = 1 , -1$$
(4)

これは波動関数の形に対する"対称性"の制約といえる。式(5)の条件は系の時間発展と矛盾しない,つまり系のハミルトニアン Ĥ 同種の2つの入れ替えに対して形を変えない:

$$\hat{P}_{i,j}^{(a)}\hat{H}\hat{P}_{i,j}^{(a)} = \hat{H}$$
(5)

以上のように同種粒子がいくつかある系では,波動関数に式 (3)の条件が 課せられる。 $c^{(a)}$ の値は実験的に決められ, $c^{(a)} = 1$ の粒子をボソンといい, スピンが整数の光子などが挙げられる。 $c^{(a)} = -1$ の粒子をフェルミオンと いい,スピンが半整数の電子,陽子などが挙げられる。

2.1.2 複合粒子の統計性

原子や原子核のように,いくつかの粒子からなる系の基底状態であるよう な粒子,つまり複合粒子を考える。複合粒子の励起エネルギーに比べて十分 低いエネルギー領域では,いくつかの複合粒子からなる系の波動関数は各複 合粒子の重心座標およびスピンの関数として記述できよう。

複合粒子が $N_{\rm F}$ コのフェルミオンと $N_{\rm B}$ コのボソンからできているとき,複合粒子1,2を入れ替えるとはそれぞれの構成要素を入れ替えることと同義なので,波動関数には $(-1)^{N_{\rm F}}$ の因子がかかる。従って複合粒子については,偶数個のフェルミオンを含む複合粒子はボソン,奇数個のフェルミオンを含む複合粒子はフェルミオンといえる。

2.1.3 スピンと統計性

粒子がスピンをもつということは,系の波動関数の対称性に影響を与える。 簡単のため同種粒子2つからなり,2粒子に中心力がはたらく系を考えよう。 2 つの粒子の位置,運動量,スピンの演算子を $\hat{\mathbf{r}}_i$ $\hat{\mathbf{p}}_i$ $\hat{\mathbf{s}}_i(i=1,2)$ とすると,系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{i}^{2}}{2m} + V(|\hat{\mathbf{r}}_{1} - \hat{\mathbf{r}}_{2}|)$$
(6)

と表せる。重心座標,相対座標,およびそれらの正準共役量を $\hat{\mathbf{R}} \stackrel{\cdot}{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}$ とすれば,

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}}_1 + \hat{\mathbf{r}}_2)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2)$$
(7)

これを用いて式(6)を書き直すと , $M=2m~\mu=m/2$ をそれぞれ全質量 , 換 算質量として

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \tag{8}$$

となり,重心運動(第1項)と相対運動(第2,3項)に分離できる。 これより波動関数も重心運動と相対運動に分離する:

$$\varphi(\mathbf{r}_1 , s_1^z , \mathbf{r}_2 , s_2^z) = \varphi_{\rm CM}(\mathbf{R})\varphi_{\rm rel}(\mathbf{r} , s_1^z , s_2^z) \tag{9}$$

このもとで固有値方程式は変数分離される:

$$\hat{H}\varphi = E\varphi \tag{10}$$

$$\hat{H}_{\rm CM}\varphi_{\rm CM} = E_{\rm CM}\varphi_{\rm CM} \ \hat{H}_{\rm CM} = \frac{\dot{\mathbf{P}}^2}{2M} \tag{11}$$

$$\hat{H}_{\rm rel}\varphi_{\rm rel} = E_{\rm rel}\varphi_{\rm rel} \ \hat{H}_{\rm rel} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|)$$
(12)

$$E = E_{\rm CM} + E_{\rm rel} \tag{13}$$

ここで同種粒子の場合,波動関数に統計性の条件

$$\varphi(\mathbf{r}_1 , s_1^z , \mathbf{r}_2 , s_2^z) = c\varphi(\mathbf{r}_2 , s_2^z , \mathbf{r}_1 , s_1^z)$$
(14)

が課される。この入れ替えに対して,式(7)より重心座標は不変,相対座標 は符号を変える。従って式(14)の統計性の条件は相対運動に現れる:

$$\varphi_{\rm rel}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = c\varphi_{\rm rel}(-\mathbf{r}, s_2^z, s_1^z) \tag{15}$$

条件 (15) のもとで相対運動に関する固有値方程式を考える。 $\hat{H}_{\rm rel}$ は粒子の スピンに依存しないので,波動関数の相対運動の部分を相対位置とスピンで 分離する。

$$\varphi(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z)$$
(16)

このとき固有値方程式(12)は

$$\hat{H}_{\rm rel}f(\mathbf{r}) = E_{\rm rel}f(\mathbf{r}) \tag{17}$$

となり,統計性の条件(15)は

$$f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z) = cf(-\mathbf{r})\chi(s_2^z, s_1^z)$$
(18)

となる。

式 (17) は中心力場での 1 体問題と同じなので,角運動量の対角化で解ける。 つまり $f(\mathbf{r})$ は球関数 $Y_{l,m}(\theta \phi)$ と動径波動関数 $R_{nl}(r)$ の積の形で書けて,

$$f(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{l,m}(\theta \ \phi) \tag{19}$$

 $Y_{l,m}(\theta \ \phi)$ は $(-1)^{l}$ のパリティをもつため, $\mathbf{r}
ightarrow -\mathbf{r}$ のパリティ変換に対して

$$f(-\mathbf{r}) = (-1)^l f(\mathbf{r}) \tag{20}$$

となる。これを式 (18) に代入すれば,

$$\chi(s_1^z, s_2^z) = (-1)^l c \chi(s_2^z, s_1^z)$$
(21)

これは「重心まわりの軌道角運動量 l とスピン部分の波動関数 $\chi(s_1^z, s_2^z)$ の対称性に関係がある」ことを示す。

2.2 運動学

実験では散乱粒子数と散乱角の関係を検出するために様々な角度に検出器 を移動し,それぞれの角度における散乱粒子数の検出を試みた。この際,一 般に散乱の理論を論じる上で基準系として重心系(CM系)を用いるのが慣例 であることに起因して,今回のわれわれの実験でも関連する物理量の値を実 験室系(Lab系)での値からCM系での値に変換する必要が生じた。以下では この基準系の変換に伴う必要な物理量の変換を議論する。

2.2.1 Lorentz 変換

CM 系における4元運動量 ρ と, Lab 系における4元運動量 ρ' を

$$\rho = \left(\frac{\mathrm{i}E}{c} , p_x , p_y , p_z\right) , \rho' = \left(\frac{\mathrm{i}E'}{c} , p'_x , p'_y , p'_z\right)$$
(22)

とし, これらの基準系の相対速度を v とすると, ρ と ρ' とは次のような Lorentz 変換の関係にあることが知られている。

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{iE}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{iE'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix}$$
(23)

ただし , $\gamma=rac{1}{\sqrt{1-eta^2}}$, $eta=rac{v}{c}$ であり , c は光速とする。

2.2.2 相対論的運動量・エネルギー

相対論によると運動する粒子の Lagrangian は

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{v^2}{c}\right)} = -\frac{mc^2}{\gamma}$$
(24)

と表される。すると粒子のもつ運動量 p とエネルギー E は,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m \boldsymbol{v} \tag{25}$$

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma m c^2 \tag{26}$$

となる。さらにこれらは β による Taylor 展開により,

$$E = \gamma mc^{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^{2} + \frac{3}{8}\beta^{4} + \cdots\right)$$
(27)

$$p_z = \gamma m v = m v \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \cdots \right)$$
 (28)

と変形でき,これより

$$E^{2} = (\gamma mc^{2}) = (mc^{2})^{2} + (pc)^{2}$$
⁽²⁹⁾

と表される。(ただし,ここでは粒子の運動方向を z 軸方向にとった。)

2.2.3 2体衝突(弾性衝突)

< 衝突前 > 2 粒子 a と A の衝突前の運動について考える

はじめ A は Lab 系において静止しているものとする。すると Lab 系にお ける a, A の 4 元運動量は

$$\rho_a' = \left(\frac{\mathrm{i}E_a}{c} , 0 , 0 , p_a\right) , \rho_A' = \left(\mathrm{i}m_A c , 0 , 0 , 0\right)$$
(30)

と書ける。(ただし $E_a = m_a c^2 + T$ であり, p_a は Lab 系における粒子 a の運動量の大きさとする。)

一方, CM 系では2粒子a, A の運動量の大きさは相等しく, それらの向きは互いに逆向きであることより,

$$\rho_a' = \left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon_a}{c}, k_x, k_y, k_z\right), \rho_A' = \left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon_A}{c}, -k_x, -k_y, -k_z\right)$$
(31)

と書ける。(ただし ε_a , ε_A は CM 系における粒子 a, A のもつエネルギーで あり, k は CM 系における粒子 a の運動量である。)

CM 系において 2 粒子 a, A からなる孤立系の持つ全エネルギーは,

$$\mathcal{E} = \varepsilon_a + \varepsilon_A = m_a c^2 + \frac{k^2}{2m_a} + \dots + m_A c^2 + \frac{k^2}{2m_A} + \dots$$
(32)

であり,運動量保存より

$$\varepsilon_a{}^2 - \left(m_a c^2\right)^2 = \varepsilon_A{}^2 - \left(m_A c^2\right)^2 \tag{33}$$

が成り立つことがわかる。これより、

$$\varepsilon_{a} = \frac{\mathcal{E}^{2} + (m_{A}c^{2})^{2} - (m_{A}c^{2})^{2}}{2\mathcal{E}} , \\ \varepsilon_{A} = \frac{\mathcal{E}^{2} - (m_{A}c^{2})^{2} + (m_{A}c^{2})^{2}}{2\mathcal{E}}$$
(34)

が得られる。

以上より2粒子a,Aからなる与孤立系の全4元運動量は,

$$\operatorname{CM} \boldsymbol{\mathcal{K}} : \boldsymbol{\rho} = \left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{E}}{c}, 0, 0, 0\right) \tag{35}$$

Lab **蔡**:
$$\rho' = (\frac{i(E_a + m_A c^2)}{c}, 0, 0, p_a)$$
 (36)

と書ける。

前述したように相対速度 v で z 軸方向に運動する 2 基準系における 4 元運動量 ρ , ρ' は Lorentz 変換の関係にあり,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\mathcal{E}}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{c} \left(E_a + m_A c^2\right) \\ 0 \\ 0 \\ p_a \end{pmatrix}$$
(37)

をみたす。これより , $\gamma=\frac{E_a+m_Ac^2}{\mathcal{E}}$, $\beta=\frac{p_ac}{E_a+m_Ac^2}$ を得る。特に $v\ll c$ のと きには $\gamma\approx 1$ であり , このとき

$$p_a = \gamma m_a v \approx m_a v$$
, $E_a = \gamma m_a c^2 \approx m_a c^2$ (38)

よって

$$\beta \approx \frac{1}{c} \frac{m_a}{m_a + m_A} v \tag{39}$$

となる。

Lab 系において A は静止しているものとすると,

$$v = v'_a \tag{40}$$

であり、CM 系における a、A の相対速度 $v \ge \text{Lab}$ 系における a の相対速度 $v'_a \ge \text{Lab}$ 系における a の相対速度 $v'_a \ge t$ において

$$\beta \approx \frac{1}{c} \frac{m_a}{m_a + m_A} v'_a \tag{41}$$

とも書ける。Lab 系における 2 粒子
a , A の重心運動の速度 $v_{\rm CM}'$ はその定義より

$$v_{\rm CM}' = \frac{m_a}{m_a + m_A} v_a' \tag{42}$$

である。これより,

$$v_a = v'_a - v'_{\rm CM} = \frac{m_A}{m_a + m_A} v'_a \tag{43}$$

となる。Lab 系において静止している A は CM 系で見ると,

$$v_a = -v'_{\rm CM} = -\frac{m_A}{m_a + m_A} v'_a \tag{44}$$

で, CM 系で2粒子a, A の各々の運動量の大きさは,

$$k = |m_a v_a| = |m_A v_A| = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} v'_a \tag{45}$$

となる。

< 衝突後> 2 粒子 a, A の衝突により 2 粒子 b, B が生じるとする。

衝突が弾性衝突であることを仮定すると,その前後で各粒子の質量は変わらない。

$$m_a = m_b , m_A = m_B \tag{46}$$

衝突前の議論と同様,衝突後の2粒子b,BのCM系での4元運動量は

$$\rho_b = \left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon_b}{c}, k'_x, k'_y, k'_z\right), \rho' = \left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon_B}{c}, -k'_x, -k'_y, -k'_z\right)$$
(47)

と書ける。(ただし ε_b , ε_B は2粒子b, B それぞれのもつエネルギーであり, $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ はbのCM系における運動量とする。)

衝突の前後で運動量が保存することより,

$$\mathcal{E} = \varepsilon_b + \varepsilon_B = \varepsilon_a + \varepsilon_A \tag{48}$$

これより

$$\varepsilon_{b} = \frac{\mathcal{E}^{2} + (m_{b}c^{2})^{2} - (m_{B}c^{2})^{2}}{2\mathcal{E}} , \varepsilon_{B} = \frac{\mathcal{E}^{2} - (m_{b}c^{2})^{2} + (m_{B}c^{2})^{2}}{2\mathcal{E}}$$
(49)

さらに,

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon_b^2}{c^2} - m_b^2 c^2} \tag{50}$$

を得る。CM 系における b の速度 v_b を c で割ったものを β_b とすると,

$$\varepsilon_b = \gamma_b m_b c^2 = \frac{m_b c^2}{1 - \beta_b^2} \tag{51}$$

と表せる。これより,

$$\varepsilon_b^2 \left(1 - \beta^2 \right) = m_b^2 c^4 \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_b^2 - \left(m_b c^2\right)^2 \quad = \quad \left(\varepsilon_b \beta_b\right)^2 = \left(kc\right)^2 \tag{53}$$

よって,

$$\epsilon_b = \frac{kc}{\beta_b} \tag{54}$$

を得る。

<散乱角>

上述の2体弾性衝突により2粒子はそれぞれ異なる方向へ散乱される。このときの散乱角について考える。

ー連の過程は xz 平面内で起こっているものとすると,このとき CM 系における粒子 b の運動量 k の y 成分はゼロとなる。よって, CM 系における粒子 b の4 元運動量 ρ_b は,

$$\rho_b = \left(\frac{\mathrm{i}\varepsilon_b}{c} , k_x , 0 , k_z\right) , \qquad (55)$$

と書ける。すると,Lab系における4元運動量

$$\rho_b' = \left(\frac{\mathrm{i}E_b}{c} , p_x , p_y , p_z\right) \tag{56}$$

は, ρ_b の Lorentz 変換により,

$$p_x = k_x , p_y = 0 , p_z = \gamma \left(\beta \frac{\varepsilon_b}{c} + k_z\right)$$
 (57)

となる。

Lab 系において衝突後の粒子 bの運動方向と衝突前の粒子 aの運動方向とのなす角度, すなわち Lab 系での散乱角度 Θ_b は,

$$\tan \Theta_b = \frac{p_x}{p_z} = \frac{k_x}{\gamma \left(k_z + \beta \frac{\varepsilon_b}{c}\right)} \tag{58}$$

で与えられる。

一方,この散乱角 Θ_b をCM系においてみたときに θ_b であるとすると,

$$k_x = k \sin \theta_b , k_z = k \cos \theta_b , \beta \frac{\varepsilon_b}{c} = k \frac{\beta}{\beta_b}$$
 (59)

を用いて,

$$\tan \Theta_b = \frac{k \sin \theta_b}{\gamma \left(k \cos \theta_b + k \frac{\beta}{\beta_b}\right)} \tag{60}$$

$$= \frac{\sin \theta_b}{\gamma \left(\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}\right)} \tag{61}$$

と表せる。これが Lab 系の散乱角 Θ_b と CM 系の散乱角 θ_b とをつなぐ式で ある。

 $v \ll c$ の場合には, $\gamma \approx 1$ であり,

$$\frac{\beta}{\beta_b} = \frac{1}{c} \frac{m_a}{m_a + m_A} v'_a \times \frac{1}{v'_a} \times c \times \frac{m_a + m_A}{m_A} \tag{62}$$

$$= \frac{m_a}{m_A} \tag{63}$$

よって,

$$\tan \Theta_b \approx \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b + \frac{m_a}{m_A}} \tag{64}$$

となる。

< 微分散乱断面積 >

最後に微分散乱断面積の関係を導く。(微分散乱断面積の物理的な意味など については他章を参照のこと。) CM 系における散乱の微小立体角を $d\Omega$, Lab 系における微小立体角を $d\Omega'$ とすると,

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d\left(\cos\Theta_b\right)}{d\left(\cos\phi_b\right)} \tag{65}$$

であり, さらに

$$\cos\Theta_b = \frac{\gamma\left(\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}\right)}{\sqrt{\sin^2\theta_b + \gamma^2\left(\cos\theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}\right)^2}}$$
(66)

となることがわかる。これより,

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d\left(\cos\Theta_b\right)}{d\left(\cos\theta_b\right)} \tag{67}$$

$$= \frac{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos \theta_b\right)}{\left\{\sin^2 \theta_b + \gamma^2 \left(\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
(68)

を得る。これより, CM 系の微分散乱断面積と Lab 系のそれとの間には次の 関係が成り立つ。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\rm Lab} \left(\frac{d\Omega'}{d\Omega}\right) \tag{69}$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{Lab}} \frac{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{\beta_b} \cos \theta_b\right)}{\left\{\sin^2 \theta_b + \gamma^2 \left(\cos \theta_b + \frac{\beta}{\beta_b}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
(70)

特に $v\ll c$ のときには $\gammapprox 1$ かつ $rac{eta}{eta_b}pprox rac{m_a}{m_A}$ より,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\rm Lab} \frac{1 + \frac{m_a}{m_A}\cos\theta_b}{\left\{\sin^2\theta_b + \left(\cos\theta_b + \frac{m_a}{m_A}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
(71)

となる。

2.3 散乱理論

2.3.1 微分散乱断面積

原子核などの小さい範囲の構造やそれを支配している法則を調べる手段と して,散乱は非常に有効である。原子核に対しほかの原子核をぶつけること で,ある方向にどれくらいの入射粒子の軌道が曲げられるかを調べることに より,原子核についてある程度の情報が得られる。ここではその量を微分散 乱断面積として具体的に定義し,散乱における一般的なシュレーディンガー 方程式の解とその微分散乱断面積を求める。

まず,ターゲットを座標の中心とし,入射粒子の進む方向を z軸にとる。 フラックス $j_{inc}(/barn \cdot sec)$ の入射粒子をターゲットにあてた時,単位時間に 微小立体角 $d\Omega$ 方向に dN 個の粒子が散乱されるとすると,散乱粒子の動径 方向のフラックスを j_{sc} として,

$$dN = j_{\rm sc} r^2 d\Omega \tag{72}$$

また, dN は j_{inc} と $d\Omega$ に比例しているはずなので,

$$dN = j_{\rm inc} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{73}$$

とおける。この時の *d*Ω 方向での比例係数を微分散乱断面積と呼ぶ。式 (72), (73) より,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{\rm sc} r^2 d\Omega}{j_{\rm inc}} \frac{1}{d\Omega} \tag{74}$$

ターゲットの膜の厚さを $d \ge 0$, 面密度 $\rho d(g/barn)$, ビームが膜にあたる面積を S, ターゲットの原子 1 粒子あたりの質量を $m(g) \ge 0$ たら, ビームがあたった場所にある原子の個数は $\rho dS/m$ である。したがって式 (74) をこれで割れば 1 原子の微分散乱断面積が出る。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{atom}} = \frac{j_{\text{sc}} r^2 d\Omega}{j_{\text{inc}} S} \frac{m}{\rho d \cdot d\Omega}$$

$$= \frac{N_{\text{sc}}}{N_{\text{inc}}} \frac{m}{\rho d \cdot d\Omega}$$

$$(75)$$

ここで

$$N_{\rm sc} = \int j_{\rm sc} r^2 d\Omega dt \tag{76}$$

$$N_{\rm inc} = \int j_{\rm inc} S dt \tag{77}$$

とした。それぞれ $d\Omega$ 方向に散乱された総粒子数と総入射粒子数を意味する。 これが実際の実験に使える微分散乱断面積である。

2.3.2 部分波展開

次に,一般的な散乱におけるシュレーディンガー方程式の解と微分散乱断 面積の表式を求める。入射ビームを *z* 軸の正方向とすると,入射は次のよう に展開できる。

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$
(78)

$$\simeq_{r \to \infty} \sum_{l} (2l+1) \mathrm{i}^{l} P_{l}(\cos \theta) [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr - \frac{\pi}{2}l)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr - \frac{\pi}{2}l)}]$$
(79)

このように,平面波は内向きと外向きの球面波の重ね合わせで考えられる。散乱によって $r \to \infty$ で外向き球面波の成分に変化があると考え,複素数 $\eta_l e^{2i\delta_l}$ をかけると $(\eta_l \ \delta_l \in \mathbb{R})$

$$\Psi_{\rm tot} = \sum_{l} (2l+1) i^{l} P_{l}(\cos\theta) [\eta_{l} e^{2i\delta_{l}} e^{i(kr-\frac{\pi}{2}l)} - e^{-i(kr-\frac{\pi}{2}l)}]$$
(80)

これは弾性散乱の解である。散乱の場合の波動関数からもとの平面波を差し 引けば,散乱による波動関数が得られる。

$$\Psi_{\rm sc} = \Psi_{\rm tot} - \Psi_{\rm inc} \tag{81}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\imath k r}}{k r} \sum_{l} (2l+1) T_l P_l(\cos \theta) \tag{82}$$

$$T_l = \frac{\eta_l \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l} - 1}{2\mathrm{i}} \tag{83}$$

これは次の形にまとめられる。

$$\Psi_{\rm tot} = \Psi_{\rm sc} + \Psi_{\rm inc} \tag{84}$$

$$\Psi_{\rm inc} = e^{ikz} \tag{85}$$

$$\Psi_{\rm sc} = f(\theta) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{86}$$

$$f(\theta) \equiv \frac{1}{k} \sum_{l} (2l+1)T_l P_l(\cos\theta)$$
(87)

2.3.3 一般の微分散乱断面積

ここで,式(74)から微分散乱断面積を求めるために確率密度流を計算する。 フラックスは

$$\mathbf{j} = Re\left[\Psi^*\left(-\frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\nabla\right)\Psi\right] \tag{88}$$

と書けるので,式(88)に式(84)を代入し

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

= $\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ (89)

を使うと

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k}{\mu} \mathbf{e}_z + \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\hbar k}{\mu} \left\{ \operatorname{Re} \left[f(\theta) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}}{r} \right] (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z) - \operatorname{Im} \left[f(\theta) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}}{kr^2} \right] \mathbf{e}_r \right\} (90)$$

第3頃と第4頃は ψ_{inc} と ψ_{sc} の干渉項で,検出器のレンズの表面で積分すると激しく振動するので消える。第1頃は入射波のフラックス,第2頃は散乱によるフラックスであり,それぞれ j_{inc} , j_{sc} となる。式 (74)より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{\rm sc}r^2}{j_{\rm inc}} = |f(\theta)|^2 \tag{91}$$

と書ける。式 (87) から

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l} (2l+1)T_l P_l(\cos\theta) \right|^2 \tag{92}$$

となる。これが一般的な微分散乱断面積である。全断面積を考えることで $\eta e^{2i\delta}$ の意味が分かる。式 (80)の第1項から,ターゲットを中心とする球の外に出る量は単位時間当たり,

$$v \int d\Omega r^2 \left| \frac{1}{2kr} \sum_{l} (2l+1)\eta_l \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l} P_l(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} \right|^2 = \frac{\pi v}{k^2} \sum_{l} (2l+1)\eta_l^2 \quad (93)$$

同様に,式(80)の第2項から,球の中に入る量は単位時間当たり,

$$\frac{\pi v}{k^2} \sum_{l} (2l+1) \tag{94}$$

したがって,単位時間当たりに非弾性散乱の起きる量は式 (94) から式 (93) を 引くことで得られ,さらに v で割ると全断面積

$$\sigma_{\text{inelastic}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l} (2l+1)(1-\eta_l^2) \tag{95}$$

が得られる。式 (95) から, $\eta_l = 1$ のとき,内向き球面波の係数の絶対値は平面波の時と変わらず1で,非弾性散乱はなくなる。 $\eta_l = 0$ のときは式 (83) と式 (92) から,弾性散乱が非弾性散乱と同時に起きていることがわかる。

2.3.4 Coulomb 散乱

粒子同士がクーロン力によって相互作用するとき,そのハミルトニアンは $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ として

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}|)$$
(96)

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$
(97)

と書ける。この系の運動を重心の運動と粒子同士の相対的な運動とに分ける と,相対的な運動についての重心系におけるシュレディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right]\psi = E\psi \tag{98}$$

となる。ただし,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu v^2 \tag{99}$$

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \tag{100}$$

である。いま,純粋なクーロンポテンシャルのもとでの2粒子の衝突現象を 考えるために

$$e^{ikz}f(r-z) \tag{101}$$

という形の解を仮定すると,u = r - zとしてシュレディンガー方程式は

$$\left[u\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} + (1-\mathrm{i}ku)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} - \eta k\right]f(u) = 0 \tag{102}$$

のようなラプラス型の微分方程式に書きかえられる。この方程式の解のうち, 原点正則なものとして,合流型の超幾何級数 $F(-i\eta|1|v)$,v = ikuが知られ ている。これを用いてシュレディンガー方程式の解は,

$$\psi_c = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} F(-\mathrm{i}\eta |1| \mathrm{i}k(r-z)) \tag{103}$$

と書ける。合流型超幾何級数の漸近展開の式より,この解は十分遠方で

$$\psi = \psi_i + \psi_d \tag{104}$$

$$\psi_i = A e^{ikz} W_1(-i\eta |1| iku) \tag{105}$$

$$\psi_d = A e^{ikz} W_2(-i\eta |1| iku) \tag{106}$$

と二つの関数の和として書ける。ここで

$$W_{1}(\alpha|b|z) \underset{|r-z|\to\infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(n+\alpha-b+1)}{\Gamma(\alpha-b+1)} \frac{(-z)^{-n}}{n!} \right]$$
(107)

$$W_{2}(\alpha|b|z) \sim \frac{\Gamma(b)}{|r-z| \to \infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\alpha)} e^{z} (-z)^{\alpha-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \times \frac{\Gamma(n+b-\alpha)}{\Gamma(b-\alpha)} \frac{(-z)^{-n}}{n!} \right]$$
(108)

である。比例定数を

$$A = \Gamma(1 + \mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\eta} \tag{109}$$

と決めると二つの関数の漸近展開が

$$\psi_i \underset{|r-z| \to \infty}{\sim} e^{i[kz + \log(k(r-z))]} \left[1 + \frac{\eta^2}{ik(r-z)} + \cdots \right]$$
(110)

$$\psi_d \underset{|r-z| \to \infty}{\sim} -\frac{\eta}{k(r-z)} \frac{\Gamma(1+\mathrm{i}\eta)}{\Gamma(1-\mathrm{i}\eta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kr-\log(k(r-z))]} \left[1 + \frac{(1+\mathrm{i}\eta)^2}{\mathrm{i}k(r-z)} + \cdots\right]$$
(111)

と書ける。 $z = r \cos \theta$ であるから,特に ψ_d の漸近展開の初項は

$$\psi_d \sim \frac{1}{|r-z| \to \infty} \frac{1}{r} \exp(i(kr - \eta \log 2kr)) f_c(\theta)$$
 (112)

のように変数分離できる。ただし

$$f_c(\theta) = -\frac{\eta}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} \exp\left(-i\eta\log\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\delta_0\right)$$
(113)
$$\delta_0 = \arg\Gamma(1+i\eta)$$

である。

2.3.5 Rutherford 散乱

クーロン散乱で得られた ψ_i は , $z \to -\infty$ で密度 1 であり , 流れの密度が

$$\mathbf{j}_i = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}\mu} [\psi_i^* (\nabla \psi_i) - \psi_i (\nabla \psi_i)^*] \simeq \frac{\hbar k}{\mu}$$
(114)

となるので ψ_i は入射波と考えられる。次に ψ_d は , $r \to \infty$ で密度が $\frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2}$, 流れの密度が

$$\mathbf{j}_d = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}\mu} [\psi_d^*(\nabla\psi_d) - \psi_d(\nabla\psi_d)^*] \simeq \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2}$$
(115)

となるので, ψ_d は散乱波と考えられる。よって微分散乱断面積は,流れの密度の比をとって

$$\sigma_c(\Omega) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{j_d r^2}{j_i} = |f_c(\theta)|^2 \tag{116}$$

となる。実際に $f_c(\theta)$ の表式 (113) を代入すると,

$$\sigma_c(\Omega) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \tag{117}$$

となり, Rutherford の式が得られる。

2.3.6 Mott 散乱

クーロン相互作用のみを考えた場合の微分散乱断面積は「Mott の式」で与 えられる。Rutherford の式では考慮していなかった,同種粒子同士のスピン による波動関数の変化を取り入れる。まず簡単な例として,2つの陽子の衝 突の際の微分散乱断面積を考える。

陽子はスピン 1/2 の粒子であるのでフェルミオンである。そのため粒子の入れ替えに対して波動関数は反対称化されていなくてはならない。波動関数が空間座標による部分 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ とスピンによる部分 $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ に変数分離できるとすると,スピン部分が粒子の入れ替えに対して対称か反対称かどうかで,空間座標による波動関数の対称性が決まる。

スピンが対称 (3 重項状態) のときは

$$\chi(\sigma_1 \ \sigma_2) = |\uparrow\uparrow\rangle \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \ |\downarrow\downarrow\rangle$$

の3状態が考えられる。このとき空間部分 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は反対称である。

スピンが反対称(1重項状態)のときは

$$\chi(\sigma_1 \ \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

が考えられ,空間部分 $\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ は対称である。

すると微分散乱断面積 $\sigma(\Omega)$ は,3 重項,1 重項をとる確率を統計的重みを 考えてそれぞれ 1/4,3/4 として

$$\sigma(\Omega) = \frac{3}{4} |f_t(\theta) - f_t(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f_s(\theta) + f_s(\pi - \theta)|^2$$
(118)

と表せる。ここで f_t , f_s はそれぞれ 3 重項, 1 重項に対する散乱振幅である。 クーロン相互作用のみを考慮するとき, 微分散乱断面積は式 (113) を用いて,

$$\sigma(\Omega) = \left(\frac{e^2}{4E}\right)^2 \left[\sin^{-4}\frac{\theta}{2} + \cos^{-4}\frac{\theta}{2} - \sin^{-2}\frac{\theta}{2}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v}\log\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]$$
(119)

と表される。ここで*v*は2つの陽子の相対速度である。

以上で考えたのはスピンが 1/2 の同種粒子の衝突の場合だったが,次に一般のスピン S をもつ同種粒子の衝突の際の微分散乱断面積を求める。スピンの合成は全部で $(2S+1)^2$ 通りある。4S+1 重項まであるが, 4t+1 重項 $(t=0, 1/2, 1, \cdots, S)$ それぞれに対して 4t+1 重項存在する。合成スピン 4t+1の微分断面積は, t が整数なら対称化が必要で

微分断面積 =
$$|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$$

tが半整数なら反対称化が必要で

微分断面積 =
$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$$

となる。全スピンについて足し合わせた微分断面積 $\sigma(\Omega)$ は , これらに重み $(4t+1)/(2S+1)^2$ をつけて足し合わせたものなので、

$$\sigma(\Omega) = \sum_{t=0}^{S} \frac{1}{(2S+1)^2} \times (4t+1)|f(\theta) + (-1)^{2t}f(\pi-\theta)|^2$$
(120)

ここでクーロン散乱しか扱ってないので f はすべてクーロン散乱振幅 f_c であ り, (120) 式を計算して,

$$\sigma(\Omega) = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left[\sin^{-4}\frac{\theta}{2} + \cos^{-4}\frac{\theta}{2} + (-1)^{2S}\frac{2}{2S+1} \times \sin^{-2}\frac{\theta}{2}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{Z^2 e^2}{\hbar v}\log\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]$$
(121)

となる。これが「Mott の式」である。

2.3.7 Blair 散乱

Blair は相対角運動量が小さい部分波は核吸収されると考え,核吸収された 部分波は散乱断面積に寄与しなくなると考えた。そこで,クーロンの散乱振 幅から核吸収される角運動量の部分波を引いた,Blair の式を考案した。ここ ではその式の導出を行う。

< クーロンポテンシャル存在下の部分波展開 > 相対座標での波動関数 ψ を

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\varphi_l(kr)}{kr} P_l(\cos\theta)$$
(122)

と展開する。 φ_l は次のシュレディンガー方程式を満たす。

$$\varphi_l'' + \left[k^2 - \frac{2\eta k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\varphi_l = 0$$
(123)

ただし,
$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$
, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ とした。
ここで, φ_l を
 $\varphi_l = e^{ikr} (kr)^{l+1} u_l \ x = -2ikr$ (124)

のように置くと,シュレディンガー方程式は

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (2l+2-x)\frac{d}{dx} - (l+1+i\eta)\right]u_l(x) = 0$$
(125)

と書きかえられる。合流型超幾何関数の定数倍が解になっている。よって u_l は $F(l+1+i\eta|2l+2|-2ikr)$ の定数倍である。比例定数 C_l を

$$C_{l} = \frac{2^{l} |\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!} e^{-\frac{\pi}{2}\eta}$$
(126)

$$\delta_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta) \tag{127}$$

と置くと, φ_l は, (104) ~ (106) 式と同様, $F(l+1+i\eta|2l+2|-2ikr)$ を漸近
展開して,

$$\varphi_l = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_l}}{2\mathrm{i}} (u_l^{(+)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_l} - u_l^{(-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_l})$$
(128)

のように書ける。ここで , $u_l^{(+)}$, $u_l^{(-)}$ は ,

$$u_l^{(+)} = 2ie^{-i\delta_l}C_le^{ikr}(kr)^{l+1}W_1(l+1+i\eta|2l+2|-2ikr)$$
(129)

$$u_l^{(-)} = -2ie^{i\delta_l}C_l e^{ikr}(kr)^{l+1}W_2(l+1+i\eta|2l+2|-2ikr)$$
(130)

 W_1 , W_2 の漸近展開より , $u_l^{(+)}$, $u_l^{(-)}$ は ,

$$u_{l}^{(+)} \rightarrow \exp\left\{i\left(kr - \eta\log 2kr - l\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$u_{l}^{(-)} \rightarrow \exp\left\{-i\left(kr - \eta\log 2kr - l\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
(131)

と書ける。これらを用いて,

$$\varphi_c = \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathbf{i}^{l+1} (u_l^{(-)} - e^{2\mathbf{i}\delta_l} u_l^{(+)}) P_l(\cos\theta)$$
(132)

となる。これはそれぞれ,内向き球面波,外向き球面波の和になっている。外 向き球面波の漸近形は,

$$\frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} e^{2i\delta_l} (2l+1) P_l(\cos\theta) \frac{e^{i(kr-\eta\log 2kr)}}{r}$$
(133)

よって, クーロンポテンシャル存在下での散乱振幅の部分波展開は

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}$$
(134)

となっている。

<Blair Model >

これを使って, Blair の式を求める。このとき, 核吸収される部分波の最大の角運動量を l_{\max} とすると, Blair の式の散乱振幅は

$$f(\theta) = f_c(\theta) - \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l}$$
(135)

となる。これを一般のスピンSを持つ粒子に対するMottの式に当てはめて,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Blair}} = \sum_{t=0, 1/2, \dots, S} \frac{4t+1}{(2S+1)^2} \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \\
\Big| e^{2i\delta_0} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp\left(-i\eta \log \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\
+ (-1)^{2t} e^{2i\delta_0} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp\left(-i\eta \log \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \\
- \frac{i}{\eta} \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{2i\delta_l} \\
- (-1)^{2t} \frac{i}{\eta} \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} (2l+1) P_l(-\cos \theta) e^{2i\delta_l} \Big|^2$$
(136)

となる。 $\rm S=0$, 1/2 の粒子に対する $\rm Blair$ の式をそれぞれ求めると , $\rm S=0$ に対して ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Blair}} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left| e^{2i\delta_0} \sin^{-2}\frac{\theta}{2} \exp\left(-i\eta \log \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + e^{2i\delta_0} \cos^{-2}\frac{\theta}{2} \exp\left(-i\eta \log \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2i}{\eta} \sum_{l:\text{even}}^{l_{\text{max}}} (2l+1)P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} \right|^2$$
(137)

を得る。また,S=1/2に対して,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Blair}} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left\{\frac{3}{4}\Big|e^{2i\delta_0}\sin^{-2}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\eta\log\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
-e^{2i\delta_0}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\eta\log\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\
-\frac{2i}{\eta}\sum_{l:\text{odd}}^{l_{\text{max}}}(2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}\Big|^2 \\
+\frac{1}{4}\Big|e^{2i\delta_0}\sin^{-2}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\eta\log\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
+e^{2i\delta_0}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\eta\log\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\
-\frac{2i}{\eta}\sum_{l:\text{even}}^{l_{\text{max}}}(2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}\Big|^2\right\} (138)$$

3 実験

われわれはメインの粒子衝突実験の準備として,実験で用いる標的薄膜の 作成を行った。ここでは時系列にそってまず標的炭素薄膜の作成について解 説し,その後メインの粒子衝突実験について解説する。

3.1 標的炭素薄膜の作成

3.1.1 高真空蒸着装置

高真空蒸着装置はベルジャー,油拡散ポンプ,ロータリーポンプで構成されている。ベルジャー内で炭素棒に高電圧をかけ,高温にし,スライドガラ スに蒸着できるように作られている。ベルジャー内の写真は図3.1である。



図 3.1: 蒸着装置のベルジャー内

光っている部分が高温になった炭素棒である。今回使ったのは,機種名 VPC-1100(特)である。

ベルジャー内の圧力を下げるために油回転ポンプと油拡散ポンプを使った が、そのフローチャートは図 3.2 を参照。



図 3.2: フローチャート

3.1.2 実験手順

- 1. 炭素棒の先端をカッターナイフでとがらせ,先端の抵抗値を高くなるようにした。
- 2. 炭素棒をセットし,スライドガラスを所定の位置において塩化ナトリウ ムの粉末をボートに少量入れた。
- 3. ベルジャー内の圧力をはじめはロータリーポンプで下げ,十分な真空度 が得られたら,油拡散ポンプでさらに圧力を下げた。
- 4. 圧力が 2.0×10⁻³Pa 以下になったのを確認し,ボートに電圧をかけ,塩 化ナトリウムを融解させ,蒸発させた。これにより,スライドガラスに 塩化ナトリウムの薄膜ができた。これは炭素薄膜を得る際に,湯に入 れ,炭素薄膜がきれいにスライドガラスからはがれるために塩化ナト リウムの薄膜を作った。
- 5. ボート内の塩化ナトリウムがすべて蒸発して,その後炭素棒に電圧を かけた。炭素棒の先端は高電圧がかかり,温度が上昇し,炭素が蒸発し た。これによりスライドグラスに炭素薄膜が作られた。
- この時,電圧をかける時間,OFF にしている時間を一分半ずつにし, ON/OFF の時間を順々にくりかえした。
- 7. 手順6を4時間半行った。

- ベルジャー内の圧力を徐々に大気圧に戻し、スライドグラスを取り出した。そして、それを湯にゆっくりと浸すことで炭素膜の剥離を行った。 剥離した薄膜を、直径約1cmの穴が開いた厚さ約1mmの銅板ですくい上げた。しかし、結果として作成した炭素膜が薄すぎたため、膜を破らずに銅板の穴に膜を張ることができなかった。そのため、実験で使った薄膜は市販の¹²Cと¹³Cの薄膜を使った。
- 9. 膜を張ることに成功した薄膜をデシケーターに入れて乾燥させた。

3.1.3 薄膜膜厚測定

実験に使う ¹²C, ¹³C ターゲット試料の薄膜の面密度 ρd の測定を, 次の手順 で行った。まず MCA の線形応答の確認のため, パルサーを用いて Amplifier により,信号の 1.0, 0.5, 0.2 倍に対する信号を測定した。得られたヒスト グラムを ROOT 形式で読み取り (図 3.3), ガウスフィットにより入力信号の ピークに対応する中心値を読み取った。その 3 点から最小二乗法を用いて算 出した, 0V に対応するチャネル ch(0V) は次の通りである:

$$ch(0V) = 52.61 \pm 11.62$$

ch(0V)の誤差は最小二乗法による。近似直線を含む3点のグラフを図3.4 に 示す。図3.4 において, Bが0V に対応するチャネル値である。



図 3.3: パルサー入力のヒストグラム. ピークは右から順に 1.0, 0.5, 0.2 倍.

次に 241 Am を α 線源 (5.486MeV) に用いて, MCA で入力信号を測定する。 その後ターゲット試料を α 線源と検出器の間に置きおいて測定した。こうし て薄膜の有無による α 線源からの入力信号の減少分 Δch を得て, 次式に従い



図 3.4: MCA の線形性

エネルギー減少分 dE を計算した:

$$dE = \frac{5.486}{ch(薄膜なし) - ch(0V)} \times \Delta ch$$
(139)

この dE を用いて薄膜の面密度 ρd を計算した。面密度の計算には次の「Bethe Bloch の式」を用いた: $dx \equiv d$ として,

$$-\frac{dE}{dx} = D\rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\log\left(\frac{2m_{\rm e}\gamma^2 v^2 W_{\rm max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]$$
(140)

$$D = 2\pi N_{\rm A} r_{\rm e}^2 m_{\rm e} c^2$$
$$= 0.1535 \text{MeV} \text{cm}^2/\text{g}$$

ここで各記号は表 3.1 のとおりである。

表 3.1: 各記号の意味

r _e :古典電子半径	ρ	:ターゲットの密度
$m_{ m e}$:電子の質量	\mathbf{Z}	: e 単位での入射粒子の電荷
N _A : アボガドロ数	β	: 入射粒子の v/c
I : 平均励起エネルギー	δ	: 密度補正
Z : ターゲットの 原子番号	C	: 殻補正
A : ターゲットの質量数	$W_{\rm max}$: 衝突での最大エネルギー遷移

運動学的計算では, W_{\max} は次で与えられる:

$$W_{\text{max}} = \frac{2m_e c^2 \gamma^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \gamma^2} + s^2}$$

$$\simeq 2m_e c^2 \gamma^2 \quad (M \gg m_e)$$
(141)

ただしMは入射粒子の質量 , $s=m_{
m e}/M$ である。平均励起エネルギー I は次で与えられる :

$$\frac{I}{Z} = \begin{cases} 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV} & Z < 13\\ 9.76 + 58.8Z^{-1.19} \text{ eV} & Z \ge 13 \end{cases}$$
(142)

今回は密度補正 δ , 殻補正 C がないとして式 (140) を用い,入射粒子のエネ ルギーが低いので W_{max} に近似式を用いた。また, $r_{\text{e}} = 2.817 \times 10^{-13}$ cm, $N_{\text{A}} = 6.022 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ として計算した。以上の操作と計算から得られた各 データを下に示す。 誤差は ch(0V) と Gaussian フィットによるピークの誤差 を含む。

		<i>※</i> シェビは、 の一日日の		
	<i>ch</i> (薄膜なし)	$dE(10^{-2} \mathrm{MeV})$	$\rho d \ (\mu \ {\rm g/cm^2})$	
¹² C 薄膜	7785 ± 0.3	-1.42 ± 0.04	34.3 ± 0.5	
¹³ C 薄膜	7795 ± 0.6	-3.54 ± 0.10	50.1 ± 1.2	

表 3.2: エネルギー減少量と薄膜の面密度

3.2 粒子衝突実験

3.2.1 マイクロイオンビーム解析実験装置



図 3.5: マイクロイオンビーム解析実験装置(於宇治キャンパス量子理工学教育研究センター)

3.2.2 装置構成・実験の流れ

今回使った装置は主に下図の機能部位から構成される。



図 3.6: マイクロイオンビーム解析実験装置の構成概要

・負イオン源 (Cs スパッタ型 (SNICS-II)) 加熱され電離した Cs⁺ が陽極の炭素薄膜に衝突し,その勢いで ${}^{m}C_{n}^{-1}$ なるイ オンクラスターが飛び出す (スパッタリング)。生成した ${}^{m}C_{n}^{-1}$ はイオン源開 口部の正電圧によって約 2KV まで加速され,前方の加速管内へと放出され る。



図 3.7: Cs スパッタ型イオン源概要図

・偏向電磁石

負イオン源より放出された ${}^m C_n^{-1}$ を加速器へと誘導する電磁石で, ローレン ツカを応用してすぐ隣に設置した加速器へ導きたいイオンだけを選択する。

・イオン加速器 (ペレトロン)

偏向電磁石により誘導された ${}^{m}C_{n}^{-1}$ はこのイオン加速器へと入射する。加速 器内ではペレットチェーンの可動によって中央電極に高い正電圧がかかって おり,入射した負イオンはこの電圧によって中央部まで加速される。さらに 中央の荷電ストリッパーで ${}^{m}C_{n}^{-1}$ は ${}^{m}C^{+3}$ へと変換され,開口部の設置した 電極による高い負電圧によって更に加速される。加速電圧は 1.875MV で,今 回の実験では加速器全体を通して ${}^{m}C^{+3}$ を 7.5MeV まで加速した。



図 3.8: 加速器概要図

・磁気四重極レンズ

加速器から出射したビームはまずこのレンズによりビーム口径が絞られる。 ・振分電磁石

磁気四十極レンズによって絞られたビームは振り分け電磁石によって解析チャンバの設置してある方向へと選択的に曲げられる。

・ファラデーカップ

ビームは解析チェンバに入射する前にこのファラデーカップによってそのビー ム強度が測定される。ファラデーカップは中心に直径2 mm の穴の開いたカッ プのような構造をしている。カップの内にビームが入ると,中心の穴の部分 を通るもの以外はこのカップの壁面に衝突し,そこに電流を生じさせる。こ の電流値からビーム強度や単位時間あたりにやってくる平均粒子数がを算出 することができる。





・解析チャンバー

この内部に標的薄膜と半導体検出器が設置してあり,実験時には真空ポンプ を用いて内部を真空にする。解析チャンバーに入射したビームは標的薄膜に 照射される前に,静電型四十極レンズでその口径を絞られる。標的で散乱さ れたビームはその前方の半導体検出器へと入射し,検出される。CCDカメラ は標的に照射するビームの位置を調整するために設置してある。目盛りは実 験室系における散乱の角度を大まかに見積もるために設置してある。



図 3.10: 解析チャンバー概要図

3.2.3 検出器

<原理と仕組>

半導体に荷電粒子や光電子が入ると,その通過線上に電子-正孔対が生成する。半導体に電場がかかっており,価電子帯にある電子が通過粒子によって 励起され,伝導体に移り価電子帯に正孔をつくる。

次にその励起された電子が電子正孔対を作り,フォノンを励起してエネルギー を失う。

その結果 , $10^{15} \sim 10^{17}$ 個/cm³ の濃度で電子 , 正孔のプラズマ管ができる。このようにしてできた電子正孔対が再び結合して消滅する前に電子を取り出したいので , バイアス電圧をかける。

以上のことから,入射荷電粒子のエネルギーに比例した大きさの電流を得られることが分かる。

<実験に使った検出器の説明> 機種 no. U-011-050-300 半導体としてシリコンを使っている。 検出器の検出部の面積:50mm² 半導体検出器とその回路図は,次の図3.11のようになっている。



図 3.11: 半導体検出器と周辺回路図

上図 3.11 の前置増幅器,増幅器はそれぞれ pre-Amplifier, Amplifier のことである。今回かけたバイアス電圧は 100V である。Multi-Channel Analyzer など回路の各モジュールに関しては回路の節で説明する。

3.2.4 検出用回路

今回の実験で使用したものと働きについてまとめる。

- Detector Bias Supply 検出器に電圧をかける。
- Pre-Amplifier 検出器からの微弱な電気信号を増幅する。
- Amplifier
 Preamplifier からの信号をさらに増幅する。また、信号の形を整える。
- Linear Gate Stretcher
 Gate に信号がある時のみ、信号を出す。
- Timing Single-Channel Analyzer 振幅によって信号を分類し、欲しい信号だけを取り出す。

- Universal Coincidence
 二つの信号が時間的に一致している時のみ、信号を送り出す。
- Multi-Channel Analyzer
 信号を波高によって分類して、スペクトルを作る。
- Logic fan-in fan-out
 一つの信号を同じ波高と形をもった信号に分裂させ、複数の回路に出す。
- Level Adapter NIM と TTL の変換を行う。
- Quad Gate/Delay Generator
 スイッチの働き。Gate 信号を作り出す。
- 8CH Visual Scaler 信号の数を数える。
- DCI

入射粒子をカウントする。 10^{-10} Cで1パルス作る。



図 3.12: 検出用 NIM 回路図

3.2.5 実験手順

粒子の統計性の違いによる量子力学的な振る舞いの差異を見ることを目的 とし,京都大学宇治キャンパスのマイクロイオンビーム解析実験装置にて,炭 素のビームを炭素薄膜に照射し,その微分散乱断面積を計測する実験を行っ た。その際,ビームと薄膜の炭素で¹²C,¹³Cの2つの質量数について考え られる組み合わせを尽くすため,都合3回同様の計測を行った。以下に実験 のながれを示す。

< セッティング >

- 1. 回路を図 3.12 で示したようにセッティングした。
- 2. 散乱槽内のアームに¹²C と¹³C, 2 枚の炭素膜を設置し真空に引いた。
- <入射ビーム量の決定>
- 1. ビームを収束するためのスリットにて遮られた粒子数と,スリットを透 過した粒子数をそれぞれファラデーカップで計測した。
- 2. 上記の2つのファラデーカップのとらえた粒子数の比を計算した。

スリットが炭素膜から見てビームの上流にあるため,散乱実験中にはスリットを透過した入射粒子数をファラデーカップで計測することができない。そのため,測定の度にスリットで遮られた粒子数のみ測定し,ここで求めた比をかけて入射粒子数を計算することにした。この操作はビーム量を変える度に行った。

- < ¹²Cのビームによる散乱実験 >
- 1. 散乱槽の窓から見て目視で検出器の位置を -16 °に合わせた。
- 2. 散乱槽内のカメラで見ながら,それぞれの炭素膜にビームが当たる位置にアームを動かし,その位置を記録した。
- 3. ¹²C にビームが入射するようにしてから,回路のスイッチ (Quad Gate) を入れ,ビームを発射した。
- 4. 検出器がある程度の数 (最低 5000 ほど)の粒子をとらえるまで, 8chVS で粒子数を見ながら計測を続けた。
- 5. ビームを止め, 遠隔操作で炭素膜をつけたアームを2で記録した位置 に動かし, ターゲットを¹³Cの方に切り替えた。
- 6. ¹²C と同様の手順で計測を行った。
7. ステッピングモーターをもちいて角度を2°変化させた。

再び炭素ターゲットを¹²Cに戻した後、交互に同様の計測を繰り返した.。後 方ほど散乱粒子が減るので途中何度かビーム量を大きくした。

< ¹³Cのビームによる散乱実験>

上と同様の手順で実験した。ただし,炭素膜は¹³Cのものだけを用いた。

3.2.6 実験詳細

散乱粒子数を2通りの方法で計測したのは,計測に用いたそれぞれの機器 の本質的な欠点を克服するためである。まず,8chVSはとらえた粒子の数を 正確に数えることができるが,粒子の種類を問わず同様に数え上げてしまう。 そのため,不純物による散乱などを分離することができない。一方で,マル チチャネルアナライザ(MCA)は粒子の持っているエネルギーとその数を同 時に記録するので,運動学的な計算により意図していない散乱による粒子を 排除できる。しかしながら,MCAは死時間のため必ずしも正確な粒子数を 記録するわけではない。それゆえ,これら2つの方法で同時に粒子数を測定 し,相補的に正確な炭素同士の散乱による粒子数を数えることを目指した。

また,散乱槽内で炭素膜を動かした時に,何度か炭素膜がビームから大き くずれていたことがあった。そのことには,角度を変えて計測をした際,明 らかに入射した粒子数に対して検出器がとらえた粒子数が少なくなっている ことで気が付いた。その時,散乱槽内を見たところ、ビームは炭素膜の枠の 部分に入射していた。

この問題に対し我々は,再び炭素膜をビームが当たる位置に移動させ,そ の角度から実験を再開するという決定を下した。万全を期するのであれば少 し前の角度でも炭素膜の位置がずれ始めていたことを考慮して、その角度か らではなく少し前の角度から再実験するべきであったことは否めない。しか しながら,実験装置を使用できる期間が1日限りであったこと,角度を変え る機構(ステッピングモーター)が一方向にしか動かないため手動で角度を 戻せば角度に新たに誤差が加わることなどの理由で再実験は断念した。

また,実験の際の暫定的な理論計算に基づいてグラフをプロットしたところ,大きく曲線から外れるデータがあるようには見えなかった。(この時の計算では,散乱粒子数に8chVSがとらえた粒子数をそのまま用いていたということを特記しておく。)

4 結果・解析

4.1 ¹²C(ビーム) 対 ¹³C(ターゲット)

ターゲットに ¹³C、入射ビームに ¹²C を使用しているので、検出器に入る 粒子は主に ¹³C により散乱された ¹²C と、¹²C により反跳を受けた ¹³C であ る。しかしそれ以外にもターゲットの中の不純物による ¹²C の散乱と ¹²C に よる反跳粒子も混ざっている。したがってヒストグラムの中から ¹³C による 散乱粒子 ¹²C のみを選び出してその数を使えば正しい微分散乱断面積が得ら れると考えられる。ターゲット作成の際に水と剥離剤を用いているので、不 純物としては水 (H 原子と O 原子) と剥離剤が考えられる。したがって特に、 ¹⁶O、¹H、および剥離剤による ¹²C の散乱と、¹²C による不純物の反跳粒子 を考慮する必要がある。しかし、後に分かるが ¹⁶O による ¹²C の散乱粒子数 i^{13} C による散乱粒子数に比べて小さいため、不純物として大部分を占める と思われる水のみについて考察すればよい。

そこでヒストグラムにおける複数のピークがどの粒子なのかを特定するた めに、それぞれの角度において理論的に得られる¹²C散乱粒子と¹³C反跳粒 子のエネルギーを表 4.1 にまとめた。すると、¹³C反跳粒子の方がエネルギー が低いことが分かる。また実験室系 50°でのヒストグラムを見てみると、大 きいピークが左に、小さいピークが右に隣あっていることが分かる。これは ラザフォード散乱とその反跳が起きているとした場合に一致していて、後方 では散乱粒子が少なく、反跳粒子が多いことになる。これら二つを分離して ¹²C散乱粒子の数だけを調べることで、実験を行った角度での微分散乱断面 積を計算できることになるが、残念ながらピークが最も離れている後方でも 二つを分離することはできなかった。したがって、これら二つをまとめてカ ウントして微分散乱断面積を求め、反跳も含めたラザフォード散乱と比較す ることにする。¹²Cと¹³Cは実験室系では同じ角度に飛んできているが、重 心系ではわずかに異なる角度なので、その分だけ誤差が生じることになる。

表 4.1: ¹²C 散乱エネルギーと ¹³C 反跳エネルギー. 角度の単位は [deg], エネ ルギーの単位は [MeV].

θ_{lab}	¹² C 散乱 E	¹³ C 反跳 E	$\theta_{\rm lab}$	¹² C 散乱 E	¹³ C 散乱 E
1.37	7.49	7.48	27.37	6.03	5.90
2.37	7.48	7.47	28.37	5.93	5.79
3.37	7.47	7.46	29.37	5.83	5.68
4.37	7.45	7.44	30.37	5.72	5.57
5.37	7.43	7.42	31.37	5.62	5.45
6.37	7.41	7.39	32.37	5.51	5.34
7.37	7.38	7.36	33.37	5.40	5.22
8.37	7.35	7.32	34.37	5.29	5.10
9.37	7.31	7.28	35.37	5.17	4.97
10.37	7.27	7.24	36.37	5.06	4.85
11.37	7.23	7.19	37.37	4.94	4.72
12.37	7.18	7.14	38.37	4.83	4.60
13.37	7.12	7.08	39.37	4.71	4.47
14.37	7.07	7.02	40.37	4.59	4.34
15.37	7.01	6.96	41.37	4.47	4.21
16.37	6.95	6.89	42.37	4.35	4.08
17.37	6.88	6.82	43.37	4.23	3.95
18.37	6.81	6.74	44.37	4.11	3.82
19.37	6.73	6.66	45.37	3.98	3.69
20.37	6.66	6.58	46.37	3.86	3.56
21.37	6.58	6.49	47.37	3.74	3.43
22.37	6.49	6.40	48.37	3.62	3.30
23.37	6.41	6.30	49.37	3.50	3.17
24.37	6.32	6.21	50.37	3.38	3.04
25.37	6.22	6.11	51.37	3.26	2.91
26.37	6.13	6.01	52.37	3.14	2.79

次に不純物による散乱と反跳を考える。



図 4.1: $\theta_{lab}=34$ °でのヒストグラムの一部

図 4.13 から、¹²C と ¹³C による散乱・反跳のピークのすぐ右にある小さな ピークは ¹⁶O による ¹²C 散乱粒子であることが分かる。そして ¹⁶O による ピークが¹²Cと¹³Cの散乱・反跳に比べて小さい(約2%)ことから、ヒスト グラムにおいて分離すべき不純物として¹⁶Oを考えれば十分である。今回、 散乱粒子数と反跳粒子数のピークを2ガウスフィットして、3σまでの数を数 えた。図 4.1 は 4424ch ~ 5106ch の数が ¹²C¹³C の散乱・反跳粒子であるとし た。¹⁶O によって散乱された¹²C のピークが 5206ch だとすると、5106ch~ 5520ch まででこの散乱粒子数の半分以上となることになる。すると、5106ch ~ 5520ch で 91 カウント、4424ch~5106ch に重なっていると思われる部分が、 5306ch~5520chの数であり、9カウントとなる。したがって¹⁶Oにより散乱 された¹²C がすべて重なっていたとしても数%程度の誤差であり、5206ch が ピークの中心であれば、 $\frac{9}{4626}$ ~ 0.1 % 程度の誤差となる。したがって、 $^{12}C^{13}C$ の散乱・反跳粒子数はピークから 3σの範囲でとっている場合、¹⁶Oによって 散乱された¹²Cはほぼ分離されたいると考える。¹⁶Oによる散乱の分離を正 確にしようとすると、5206ch付近の検出数が少ないので今回はあきらめるこ とにした。

そのようにして得られた¹³Cによる散乱粒子¹²Cを用いて微分散乱断面積 を計算し、重心系でグラフにすると次のようになる。



図 4.2: ¹²C-¹³C 実験結果

ここではラザフォード散乱と比較している。これを見ると実験室系で 36 ° ~46 °の結果が、明らかにラザフォード散乱の理論値と異なっていることが 分かる。そこで、すべての角度における入射粒子数とヒストグラムの 3σ内 (σはヒストグラムをガウスフィットした際に得られる標準偏差)に含まれる 粒子数の比を計算した。その結果を表 4.2 に示してある。

$\theta_{lab}(\deg)$	Integral	entry	ratio(Integral/entry)
12	9218	9781	0.9424
14	8642	9184	0.9410
16	8378	8894	0.9420
18	7806	8318	0.9384
20	5063	5419	0.9343
22	4927	5296	0.9303
24	4722	5152	0.9165
26	4784	5221	0.9163
28	4711	5137	0.9171
30	4635	5085	0.9115
32	5005	5534	0.9044
34	4626	5114	0.9046
36	3528	5153	0.6846
38	3476	5184	0.6705
40	3831	5438	0.7045
42	3872	5071	0.7636
44	3996	5104	0.7829
46	3923	5094	0.7701
48	4871	5071	0.9606
50	4981	5056	0.9852

表 4.2: 補正前の入射と 3σ の比

これを見ると実験室系 36 °~46 °での値だけが他と大きく異なっていることが分かる。これは 36 °~46 °の実験を行った際に、ターゲットの炭素薄膜が本来セットされるべき場所から少しずれてしまっていたことを考えると納得できる。つまり、銅板によって散乱されていたかもしれない。実験室系 48 °以降はそのずれに気が付き、修正した。そこで、36 °~46 °における入射粒子と 3 σ 内粒子数の比をそれ以外の実験データの平均で置き換えて修正した。その結果を表 4.3 に示す。

$\theta_{lab}(\text{deg})$	Integral	Entry	Ratio(Integral/Entry)
12	9218	9781	0.9317
14	8642	9184	0.9317
16	8378	8894	0.9317
18	7806	8318	0.9317
20	5063	5419	0.9317
22	4927	5296	0.9317
24	4722	5152	0.9317
26	4784	5221	0.9317
28	4711	5137	0.9317
30	4635	5085	0.9317
32	5005	5534	0.9317
34	4626	5114	0.9317
36	4801	5153	0.9317
38	4830	5184	0.9317
40	5066	5438	0.9317
42	4724	5071	0.9317
44	4755	5104	0.9317
46	4746	5094	0.9317
48	4871	5071	0.9317
50	4981	5056	0.9317

表 4.3: 補正後の入射と 3σ の比

このような修正をして微分散乱断面積を計算した。それを重心系のグラフ にしてラザフォード散乱と比較したのが図 4.3 である。



図 4.3: 3σ 修正後のグラフ

さらに定数倍と角度補正も加え、カイ二乗が最小になるようにすると、図 4.4 が得られる。ここで、定数倍は 0.826、角度補正は + 1.37 °であった。



図 4.4: 定数倍・角度補正をしたグラフ

このような修正を加えると、実験結果とラザフォード散乱はかなり一致する。最後に,各修正に対するカイ二乗の値を表 4.4 に示す。

操作	function	χ^2
補正なし	Rutherford	6.9
1.05 倍	Rutherford	5.6
36-46 °修正, 0.976 倍	Rutherford	4.9
36-46 °修正,0.826倍,角度補正1.37 °	Rutherford	0.31

表 4.4: カイニ乗まとめ

4.2
$${}^{12}C(ビーム) 対 {}^{12}C(ターゲット)$$

4.2.1 補正とスピンの決定

¹²C-¹³C と同様に微分散乱断面積を求める。¹²C はボソンであるので,ス ピンは整数の値を持つ。核子を12 個持っているので,考えられるスピンは S=0,1,2,3,4,5,6 である。実験データとそれぞれの Mott の式の グラフは図 4.5,4.6 である。定数倍した実験データと S=0~6 の Mott の式と の間のカイニ乗をそれぞれ表 4.5 にまとめた。



図 4.5: 実験データと S=0,1,2の Mott の式



図 4.6: 実験データと S=3,4,5,6の Mott の式

表 4.5: S=0, 1, ···, 6の Mott とのカイ二乗

function	χ^2
Mott , S=0	9.1
Mott , S=1	150
Mott , S=2	200
Mott , S= 3	220
Mott , S=4	230
Mott , S=5 $$	240
Mott , S= 6	250

カイ二乗が最も小さく、グラフの形からも判断して、 12 CのスピンはS=0と決定した。

次に,実験データには定数倍のずれと,角度のずれがあるとして,カイ二乗が小さくなるように補正をした(図 4.7 参照)。グラフ中の滑らかな線は S=0 のときの Mott の式である。



図 4.7: 補正後実験データと S=0 の Mott の式

4.2.2¹³Cの含有について

角度補正後,作成したターゲットには ${}^{13}C$ が含まれていたかもしれないと 考えた。つまり, ${}^{13}C$ が含まれている分 Rutherford 散乱が起こると考えた。 補正としては,理論値を

$$\beta \times \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} + (1 - \beta) \times \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}}$$
(143)

とし, さらに実験値には先程と同様定数倍のズレがあると考え, 実験値を補 正して

$$\alpha \times \text{Experiment}$$
 (144)

とした。カイニ乗が小さくなるように $\alpha \beta$ の値を決めると,

$$\alpha = 0.95 \ \beta = 0.96$$

となった。 実験データと比較すると,



図 4.8: 補正後実験データと Mott, Rutherford の式

4.2.3 ¹²C-¹²C の解析まとめ

表 4.6 は S=0 について解析した際のカイ二乗のまとめである。

S=0	function	χ^2
補正なし	Mott	8.7
0.95 倍	Mott	9.1
0.90 倍, +0.23 °修正	Mott	6.9
1.1 倍	Mott+Rutherford	10
0.98 倍, +0.32 °修正	Mott+Rutherford	5.0

表 4.6: 各解析のカイニ乗まとめ

4.2.4 考察

・角度補正について

¹²C-¹²C の実験は ¹²C-¹³C と同時に行ったので, ¹²C-¹³C との角度補正は同じ

になるのが望ましい。だが,実際には ${}^{12}C^{-13}C$ の角度補正が 1.37 °, ${}^{12}C^{-12}C$ の角度補正は 0.23 °と違う値になってしまっている。この原因として考えられるのは, ${}^{12}C^{-13}C$ の解析の際,ターゲットのズレによる不自然な散乱粒子数を得たことに対する補正を行ったことである。グラフ上で理論値によく合うように補正することができたが,適切な角度補正を行えるほどの補正が行なえたとは判断できない。よって,今回の実験は ${}^{12}C^{-13}C$ ではなく, ${}^{12}C^{-12}C$ の角度補正が真値に近いと判断した。

Rutherford の式による補正について
 Rutherford 散乱による補正の結果,¹²Cのターゲットに¹³Cが約3.5%含まれていたといえる。しかし,実際の¹²C,¹³Cの自然界での同位体比は99:1
 程度であるため,3.5%というのは不自然である。このような結果が出た原因は,実験装置による角度の幅があることによることが考えられる。

4.3.1 補正とスピンの決定

今までと同様に微分散乱断面積を求める。¹³C はフェルミオンであるので, スピンは半整数の値を持つ。核子を13 個持っているので,考えられるスピン は S=0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5 である。実験データとそれぞれ の Mott の式のグラフは図 4.9、4.10 である。実験データとスピンが 0.5~6.5 のモットの式との間のカイ二乗をそれぞれ表 4.7 にまとめた。



図 4.9: 実験データと S=0.5, 1.5, 2.5 の Mott の式



図 4.10: 実験データと S=3.5, 4.5, 5.5, 6.5 の Mott の式

表 4.7: S=0.5, 1.5, ···, 6.5の Mott とのカイ二乗

function	χ^2
Mott, $S=0.5$	8.1
Mott, $S=1.5$	10
Mott, S= 2.5	14
Mott, S= 3.5	16
Mott, $S=4.5$	18
Mott, $S=5.5$	19
Mott, $S=6.5$	20

カイ二乗が最も小さく、グラフの形からも判断して、 13 CのスピンはS=0.5と決定した。

次に,実験データには定数倍のずれと,角度のずれがあるとして,カイ二 乗が小さくなるように補正をした (図 4.11 参照)。グラフ中の滑らかな線は S=0.5 のときの Mott の式である。



図 4.11: 補正後実験データと S=0.5 の Mott の式

4.3.2¹²Cの含有について

角度補正後,作成したターゲットには ¹³C が含まれていたかもしれないと 考えた。つまり, ¹³C が含まれている分 Rutherford 散乱が起こると考えた。 ¹²C-¹²C のときと同様、補正としては,理論値を式 (143) とし,さらに実験値 には先程と同様定数倍のズレがあると考え,実験値の補正を式 (144) で行っ た。カイ二乗が小さくなるように $\alpha \beta$ の値を決めると,

$$lpha=0.80$$
 , $\ \ eta=0.85$

となった。 実験データと比較すると,



図 4.12: 補正後実験データと Mott, Rutherford の式

4.3.3 まとめ

以下の表はs=0 について解析した際のカイ二乗のまとめである。

S=0.5	function	χ^2
補正なし	Mott	7.4
0.94 倍	Mott	8.1
0.90 倍,+0.76 °修正	Mott	2.7
0.96 倍	Mott+Rutherford	7.6
0.80 倍,+0.80 °修正	Mott+Rutherford	2.3

表 4.8: 各解析のカイニ乗まとめ

4.3.4 考察

・Rutherford の式による補正について Rutherford 散乱による補正の結果,¹³Cのターゲットに¹²Cが約15%含まれ ていたということになる。しかし,実験で使った¹³Cの膜の純度は99.9%異 常であり,フィッティングによってよく一致したのには別の要因があること になる。現員の一つとして検出器の幅があることによって振幅が小さくなる ことが挙げられるが,それによる効果はせいぜい1%であり,十分に説明で きない。この分に関してはこれ以上解明できなかった。

4.4 不純物の同定

実験で得たエネルギースペクトルには炭素同士の散乱による大きなピーク の他に,小さなピークがいくつか存在する。ここではこれらのピークがどの ような原子同士の散乱によるものなのかを,運動学的に考察する。実際に調 べるピークは,次の図 4.13 で示す 2 つのピークである。



図 4.13: 不純物散乱による 2 つのピーク. 横軸がチャネル, 縦軸がカウント数 である.

4.4.1 不純物と考えられるもの

薄膜作成にあたって用いたものはお湯である。そのためお湯に含まれる物 質,特に水分子中の元素 O,H が不純物として考えられる。また,スライド ガラスから炭素を剥がすために剥離剤を用いており,それに含まれる元素も 含まれる可能性がある。

4.4.2 運動学的エネルギー角分布

今回の実験で用いた入射粒子のもつ運動エネルギーは 7.5MeV であるため, 非相対論的な場合を考える (図 4.14)。既に述べた実験室系と重心系での散乱 角の関係式 (64) を用いて, 質量 m₁の粒子がエネルギー E₁を持って質量の粒 子 m₂の粒子と弾性散乱を起こしたとき,散乱後の各粒子がもつエネルギー

 E'_1 , E'_2 は,散乱角と反跳角をそれぞれ θ_1 , θ_2 として次のように表される:

$$E_1' = E_1 \left[1 + \frac{2x}{(1+x)^2} (\cos \Phi - 1) \right]$$
(145)

$$\cos\Phi = -x\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + (1-x^2)\sin^2\theta_1} \qquad (146)$$

$$E_2' = E_1 \frac{4x}{(1+x)^2} \cos^2 \theta_2 \tag{147}$$



図 4.14: 弾性散乱の概略図

上式で計算される,不純物と考えられるいくつかの元素と炭素での散乱に よるエネルギー角分布を図 4.15,4.16 に示す。

4.4.3 同定方法

まずは ROOT データから,各スペクトルごとに小ピークに対応するチャネ ルを調べ,角度ごとに運動学上得られるエネルギーを対応させる。これらを エネルギー分布 A とする。次に炭素同士の散乱による大ピークから,A と同 様にして得られた分布 B,および B から得られる近似直線のグラフと分布 A を同時プロットする。そのグラフで線形分布しているかどうかで判断を行う。

4.4.4 同定結果と考察

上記の方法で同定を行った結果を下図 4.17,4.18,4.19 に示す。まずグラ フから,入射した炭素原子が¹⁶O により散乱された場合と,入射粒子により ¹H が反跳を受けた場合がもっともよく分布 B に沿っていると分かる。これ より薄膜には水分子が含まれていたといえる。他に考えられる元素と炭素で の散乱もエネルギースペクトルに含まれるであろうが,それらは今回調べた 2 つの小ピーク以外に見られる部分に含まれると考えられる。例えば図 4.15,



図 4.15:入射粒子¹²Cに対する散乱・反跳エネルギーの角分布



図 4.16:入射粒子 ¹³C に対する散乱・反跳エネルギーの角分布

4.16 から判断できることとして,反跳を受けて検出された¹⁶O原子が,炭素 同士の散乱による大ピークの中に現れていることが考えられる。



図 4.17: ¹²C-¹²C 散乱での E-チャネル対応

次に最小二乗法で得られた近似直線から,0Vに相当するチャネルの値に非 常にばらつきがある。また,O原子の分布はその直線の下側で,H原子の分 布は上側で沿っている。その理由は次の4つが考えられる。

- 1. 散乱粒子の通過経路
- 2. 検出器の大きさ
- 3. 非弹性散乱
- 4. ピークのフィットによるばらつき

1 について,炭素膜には有限の厚さが存在し,入射した炭素は散乱される ならば厚さdのうちどこかで散乱される(図4.20)。それにより前方散乱に比 べて後方散乱の方がエネルギー損失が大きく,C-C散乱のデータにおいてエ ネルギーが低くなるほど対応チャネルが実際より小さくなり,結果として今 回の E-チャネル対応が下がったものと考えられる。



図 4.18: ¹²C-¹³C 散乱での E-チャネル対応



図 4.19: ¹³C-¹³C 散乱での E-チャネル対応



図 4.20: エネルギー損失の距離依存性.正面散乱する粒子に対して散乱粒子 は,第2散乱以降を受ける確率が距離にして 1/cos θ₁ 倍ある.

2 について,検出器は横幅 0.8mm,縦幅 7.0mmの大きさをもち,標的から 65mm離れて設置されていた。その大きさにより,調べたい角度に対して横方向に $\pm \Delta \theta$ の検出幅が生じる:

$$\Delta \theta = \arctan\left(\frac{0.8}{2 \times 65}\right) \simeq 0.35 \quad (\text{deg})$$

この検出幅もスペクトル幅の広がりの原因であろう。

3 について,今回のデータ処理ではエネルギーが散乱・反跳を受けた2粒 子間で保存されるとした。しかし炭素膜と入射粒子が非弾性散乱を起こした 場合には2粒子間でのエネルギーが保存されない。

4 について,1~3 と関連してスペクトル幅が後方になるにつれて広がり, Gaussian フィット時にもっとも確からしいと見られる場所より下方にピーク を見出している可能性がある。たとえば図 4.21 について,16 °ではほぼ左右 対称なピークであるが42 °では非対称になっており,フィットのピークと見 かけのピークがずれている。この誤差はフィットする者の手腕によってより 精度を上げることができる。



図 4.21: フィッティングの様子 (上: C12-C12 散乱の 16 °, 下: C12-C12 散 乱の 42 °)

5 考察

5.1 Mott の式を用いることの妥当性

今回の実験は実験室系で 7.5MeV という低エネルギーでの散乱だったため, 同種粒子どうしの散乱解析では Mott の式を用いた。ここではその Mott の式 を用いることに関して,その妥当性について考察する。考察の手順としては, まず核力の影響があるものと仮定し,初等的な計算および数値計算によって その核力の作用がほぼ無視できる程度のものなのかどうかを確認する。そし て,その結果を用いて Mott の式を用いることが妥当であるかどうか検討する。

5.1.1 最近接距離の考察

核力を考慮した原子のポテンシャルとして図 (5.1) のようなものを考える。 これは衝突粒子が標的粒子に対してある距離 r_{nuc} より近くまで接近した場合に $-V_0$ なる引力が衝突粒子に対して作用し、それより離れた距離では $V(r) \propto r^{-1}$ なるクーロンポテンシャルが作用するというものである。



図 5.1: 想定する原子のポテンシャル

古典的には角運動量 lを持った粒子には遠心力ポテンシャル $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ が作用する。よって、この粒子が図 5.1 のポテンシャル場中を運動するとき、その粒子には有効ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < r_{nuc}) \\ \frac{Z^2 e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} & (r_{nuc} < r) \end{cases}$$
(148)

が作用する。粒子のエネルギーを E とすると、この粒子が満たすべき条件は

$$E = \frac{Z^2 e^2}{r} + \frac{l(l+1)h^2}{2\mu r^2} \tag{149}$$

と書ける。つまり,この粒子の可能な最近接距離 r_l には

$$r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$$
 (150)

という制約があることがわかる。これより,角運動量が *l* = 0 の場合の最近 接距離 *r*₀ と核力の作用する距離 *r*_{nuc} とを比べることによりこの粒子に対す る核力の作用の有無を判定することができる。

$$r_0 = \frac{Z^2 e^2}{E} \ [m] \tag{151}$$

式 151 に今回の実験で扱った炭素原子の値 $Z = 6, \mu \simeq 6/N_A, E \simeq 7.5/2[MeV]$ を代入することにより

$$r_0 \simeq 1.4 \times 10^{-14} \ [m]$$
 (152)

を得る。この値は炭素原子核の半径 $r_{nuc} \simeq 2.5 \times 10^{-15} [m]$ よりも大きい。つまり,古典的には今回の炭素原子は核力の作用の範囲よりも十分遠方までしか近づかないことがわかる。

5.1.2 透過確率の考察

Gamov の透過因子

$$T \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_{nuc}}^{r_l} dx \sqrt{2m\left(V\left(x\right) - E\right)}\right)$$
(153)

より、今回の炭素原子に対するトンネル効果による波束の透過確率 Tは、

$$T \simeq \exp(-16) \simeq 1.1 \times 10^{-7}$$
 (154)

となり、これより量子力学的にも今回の条件では波束の透過量は十分少なく、 核力との相互作用はほとんどないことが予想される。

5.1.3 数値計算による部分波の吸収についての考察

前述したように,粒子の統計性から導かれた Mott の式に対し,さらに核力の作用による部分波の吸収までも加えた Blair の式というものがある。ここでは Blair の式の部分波の吸収に関して,さらに各部分波ごとの吸収率のばらつきまでも想定し,実験値とのカイ二乗値を最小にするような吸収係数 $g_l(l=0,1,2,\cdots)$ の組み合わせを数値計算により求め,それによって核力の

作用の有無を判定し、その結果を用いて Mott の式を用いることの妥当性について検討する。

ここでは角運動量 lに依った部分波の吸収率のばらつきを吸収係数 g_l で表すことにする。すると Blair の式と合わせて微分散乱断面積は次のように表される。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Blair} = \sum_{t=0,1/2,\cdots,S} \frac{4t+1}{(2S+1)^2} \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \\
\left| e^{2i\delta_0} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\eta \log \sin^2 \frac{\theta}{2}) + (-1)^{2t} e^{2i\delta_0} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp(-i\eta \log \cos^2 \frac{\theta}{2}) - \frac{i}{\eta} \sum_{l=0}^{l_{max}} g_l \times (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{2i\delta_l} - (-1)^{2t} \frac{i}{\eta} \sum_{l=0}^{l_{max}} g_l \times (2l+1) P_l(-\cos \theta) e^{2i\delta_l} \Big|^2 \quad (155)$$

これより¹²C-¹²C 散乱の微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Blair} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left| e^{2i\delta_0} \sin^{-2}\frac{\theta}{2} \exp(-i\eta\log\sin^2\frac{\theta}{2}) + e^{2i\delta_0} \cos^{-2}\frac{\theta}{2} \exp(-i\eta\log\cos^2\frac{\theta}{2}) - \frac{2i}{\eta} \sum_{l:even}^{l_{max}} g_l \times (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l} \right|^2$$
(156)

となり,¹³C-¹³C 散乱の微分散乱断面積は,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Blair} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left\{\frac{3}{4}\Big|e^{2i\delta_0}\sin^{-2}\frac{\theta}{2}\exp(-i\eta\log\sin^2\frac{\theta}{2}) \\
-e^{2i\delta_0}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\exp(-i\eta\log\cos^2\frac{\theta}{2}) \\
-\frac{2i}{\eta}\sum_{l:odd}^{l_{max}} g_l \times (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}\Big|^2 \\
+\frac{1}{4}\Big|e^{2i\delta_0}\sin^{-2}\frac{\theta}{2}\exp(-i\eta\log\sin^2\frac{\theta}{2}) \\
+e^{2i\delta_0}\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\exp(-i\eta\log\cos^2\frac{\theta}{2}) \\
-\frac{2i}{\eta}\sum_{l:even}^{l_{max}} g_l \times (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}\Big|^2\right\} (157)$$

となる。それぞれ, Blair の式の各角運動量 *l* の部分波の吸収の項に対し, 吸 収係数 *g_l* を掛けあわせた。

各々の吸収係数 g_l の値を 0 1 の範囲で 1% の精度であらゆる値に振り, 各々 の吸収係数の組み合わせ (g_0, g_1, g_3, \cdots) に対して, すべての観測散乱角にお ける実験値に対するカイ二乗値を計算し, もっともカイ二乗値が小さくなる組 み合わせを数値計算した。すると, 最もカイ二乗値が小さくなったのはすべて の吸収係数 g_l がゼロの場合であった。(表 5.1)

	${}^{12}\text{C}{}^{-12}\text{C}$	$^{13}C-^{13}C$
換算カイニ乗値	13.2	8.27
l_{max}	4	3
吸収係数	$g_0 = 0.0$	$g_0 = 0.0$
	$g_2 = 0.0$	$g_1 = 0.0$
	$g_4 = 0.0$	$g_2 = 0.0$
	$g_6 = 0.0$	$g_3 = 0.0$
		$g_4 = 0.0$

表 5.1: 吸収係数の最適化 (その1)

表 5.1 の数値計算結果より,今回の散乱実験では部分波の吸収は全く起こっ ていないということが示唆された。だが,このとき算出したカイ自乗値は Mott の式で算出した理論値に対しエクセルを用いて実験値に定数倍と角度補正を 施して算出した場合のカイ自乗値とは異なる値を示していた。この原因とし てはそれらの定数倍と角度補正とを別々に行ってしまったことが考えられる。 いまは,カイ自乗値として定数倍と角度補正とを同時に行いながら,最もそ の値(カイ二乗値)が小さくなる場合を計算しているので,それらの補正値を 別々に行い,各々の場合について最適化したものと値が異なってしまうのも ごく当然の結果であると考えている。だが,現時点ではそのカイ自乗値のズ レの原因に関してはこれ以外の原因について検討できていない。

5.1.4 結論

以上,古典的な最近接距離の計算,量子力学的な波束の透過確率の計算,および部分波吸収を考慮した散乱断面積の数値計算,すべての場合において数値 計算の結果には疑問点も残るが,おそらく今回の実験条件では Mott の式を 用いて解析を行うことは妥当であることが示唆された。これらの結果をもっ て本考察の結論とする。 5.1.5 追記(その1)

口頭発表では上記の結果を述べたが、後日異なる条件で数値計算をやり直し たところ、当初に意図していなかった結果が出たのでここにそれについて追記 しておく。

以前の数値計算では,まず散乱断面積の実験値を Mott の理論値に合うように定数倍と角度補正を行い,その補正済みの実験値を用いて吸収係数を最適化した。その後で,Blair モデルを参考にしながら Mott の理論値に対して最適化した散乱断面積の中に部分波の吸収分がどれほど寄与しているかを計算した。そして,その結果はすべての吸収係数 gl がゼロというものだった。(その際のカイ自乗値については表 5.1 を参照。)

一方,今回の数値計算では,実験値として上で述べた Mott の式に対する最 適化補正を行う前の「生の散乱断面積」の値を用い,それを「理論値」の方に 合うように,定数倍の値と角度補正の値と,さらには部分波の吸収量までも考 慮しながら,カイ二乗値が最小になるようなそれぞれのパラメターの最適値 を計算した。すると,その結果は表 5.2 のようになった。

	$^{12}C^{-12}C$	$^{13}C-^{13}C$
換算カイニ乗値	0.047	0.041
定数	1.27	1.00
角度補正 (CM 系)	1.0 °	1.3 °
l_{max}	4	3
吸収係数	$g_0 = 0.0$	$g_0 = 1.0$
	$g_2 = 0.1$	$g_1 = 0.3$
	$g_4 = 0.0$	$g_2 = 0.0$
		$g_3 = 0.0$

表 5.2: 吸収係数の最適化 (その2)

表 5.2 の通り, この場合の吸収係数 gl の値は全てがゼロというものにはな らなかった。つまり, この結果からは部分波の吸収は少ないながらあったこ とになる。だが,前の節で計算したように,今回の実験条件では波束の透過 確率は非常に小さく,部分波の吸収はほとんど観測にかからないはずである。 上の理論計算を否定することは経験的に正しいことが認められているはずの 「理論」を否定することになるのだが,今回はそのようなことを試みる気は毛 頭なく,ここでは暗に理論の方が正しいものであると認める立場を取る。こ こで試しにこれらの最適化したパラメター値の組を用いて変形した理論値と Mott の式から計算した散乱断面積とを同じグラフにプロットしてみると次の ようになった。



図 5.2: ¹²C-¹²C 散乱における実験値と各種パラメターを最適化した理論値の グラフ



図 5.3: ¹³C-¹³C 散乱における実験値と各種パラメターを最適化した理論値の グラフ

これらのグラフを見る限り,上記の最適化パラメターを用いて変形した理 論値は実験値とよく合っている。では,次にすべきことは2つのフィッティ ングで最終的に算出したカイ自乗値の比較なのだが,表5.1と表5.2よりわ かるとおり,これらの2つの場合で換算カイ自乗値の値はオーダーが全く異 なる。単にカイ自乗値が小さいほうがよいと考えるのであれば、定数倍と角度 補正の最適化も同時に行った場合のほうが圧倒的によいと考えることができ る。だが、幾分この換算カイ自乗値の値は小さすぎるようにも思われる。

残念ながら,今回の解析ではこれらのカイ自乗値の大きなズレの原因を特 定することは出来なかった。だが,原因がなんであれ上記の最近接距離と透 過確率の計算結果より,やはり部分波の吸収はほぼないと考える方が妥当で あり(理論を暗黙に正しいと仮定する立場),上の結果は解析手法に何らか の問題があったことを示唆していると真摯に受け止めるべきだろう。しかし ながら,いざ原因を検討しようとしても,問題を引き起こしうる要素があま りに多すぎて何が特に結果に寄与しているのかを判断することは全く出来な かった。今回は既に新学期が始まってしまっていることもあって,この問題 に関しての検討はここで打ち切ることにした。最低限の誠意を示すために本 考察の数値計算で用いた計算コードを巻末に載せる。今回はそれでご容赦願 いたい。

5.1.6 追記(その2)

最後の最後で Blair モデルの数値計算がそもそも間違っているのではない かという疑念が生じたので,ここにその結果を掲載しておく。問題となった のは下図 5.4 と図 5.5 の計算結果のl = 0 での位相に関してである。Bromley らによる計算結果 [2] や過去の A5 の数値計算結果と見比べると少しずれてい るように見えた。この問題に関してはそもそもそれは本当にズレているのか どうかの判断もすることができなかった。



図 5.4: Blair モデルによる ¹²C-¹²C 散乱の数値計算結果



図 5.5: Blair モデルによる ¹³C-¹³C 散乱の数値計算結果

6 結論

われわれは今回の実験を通して以下のことを結論付けた。

・実験室系で 7.5MeV の低エネルギー散乱においては異種粒子間の微分散乱断 面積は Rutherford の式に,同種粒子間の微分散乱断面積は Mott の式に従っ た。

・スピンの大きさに関しては Mott の式を用いた解析によって,¹²C は 0 で あり,¹³C は 1/2 であると同定した。つまり同種粒子間の対称性を確認した。 ・不純物として標的内に水が含まれていることも確認した。

謝辞

本演習では理論を京都大学理学研究科准教授 菅沼秀夫先生に,実験を同研 究科講師 村上哲也先生に主にご指導いただきました。宇治キャンパスでのイ オンビーム加速器を用いた実験においては,京都大学工学研究科准教授 土田 秀次先生ならびに同研究科助教 間嶋拓也先生にご指導いただきました。なお, 理学研究科修士過程の角谷朋亮さんにも TA として半年間サポートしていた だきました。これらの皆様に深く感謝の意を申し上げます。

参考文献

- W.M. Gibson, "The physics of nuclear reactions: a new edition of the author's Nuclear reactions, for use as a main text for an honours degree course in nuclear physics", Pergamon Press, 1980
- [2] D. A. Bromley, J. A. Kuehner, E. Almqvist, "HEAVY-ION RE-ACTION MECHANISMS. ELASTIC SCATTERING DATA", Proc. of the Second Conference on Interactions of Complex Nuclei, John Wiley (New York), 1960
- [3] William R. Leo, "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, A how-to Approach, Second Revised Edition", Springer-Verlag, 1994
- [4] A. メシア, "量子力学 2", 東京図書, 1971
- [5] 猪樹 慶治, 川合光, "量子力学 2", 講談社, 1994

付録

数値計算のソースコード数値計算で使用したプログラムを載せる。この意図 は、「自分なりの最大限の努力はしました」という誠意を示すところにある。

なお、この数値計算は高森が単独で行ったものであり、誤りがあればその 責任はすべて高森個人にあります。コードの中に誤り等を見つけられた方が いらっしゃいましたら、ぜひ sho.takamori2*gmail.com までご一報ください (*=@)。お詫びとお礼を申し上げます。なお、時間の都合上どのように計算 したのかきちんと説明することができませんでした。本当に申し訳ありませ ん。ですが、もしご要望さえあればきちんと説明するつもりでもおりますの で、その際にも気兼ねなくご連絡ください。

Listing 1: 12C-12C 散乱における Blair モデルを用いた微分散乱断面積の計算

1	//Blairモデルを用いた微分散乱断面積の計算
2	//計算はメイン関数の中で一括して行った
3	//特殊関数の計算にはGNUサイエンティフィックライフラリ(GSL)の定義関数を用いた
4	
5	#include <stdio.h></stdio.h>
6	#include <math.h></math.h>
7	<pre>#include <gsl gsl_sf.h=""></gsl></pre>
8	<pre>#include <gsl gsl_complex.h=""></gsl></pre>
9	<pre>#include <gsl gsl_complex_math.h=""></gsl></pre>
10	
11	
12	int n, j, i, imax, i_p, 2;
13	double A,B,C,D,G,A;
14	double phi,pi,phi,Ecm,Elab,eta,n,n_p,mu,Na,Na_p;
15	double epsiton, epsiton_p, tr, tr_p;
16	
10	
18	gs_si_fesuit inii,ini2,ini3,ini4;
19	gsi_si_result theta1, theta2, theta3, theta4;
20	g_{S_1,S_1} lesuit a;
21	gs1_complex Z1,ZZ,Z3,Z4,Z1,Z0,
22	FILE *fout·
23	Till "Tout,
25	//諸物理定数
26	Z = 6:
27	pi = 3.14159265:
28	Elab = 7.5:
29	Ecm = Elab/2:
30	h = 6.626068e - 34;
31	mu = 6;
32	Na = 6.0221415e+23;
33	tr=1.6021765e-19;
34	epsilon=8.85418782e-12;
35	
36	//計算の便宜を図るための変換
37	h_p = h*1.0e+34;
38	$Na_p = Na*1.0e-23;$
39	$tr_p = tr*1.0e+19;$
40	<pre>epsilon_p = epsilon*1.0e+12;</pre>
41	
42	eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2
43	A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
44	
45	//用いる定義関数に代入する初期値
46	gsl_complex p;
47	GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
48	
49	//削迫用連動重の取入他に応した書さ出しノアイルの調整
50	for(1=0;1<=4;1++)1

```
lmax = 2*1;
 51
 52
     1_p=1;
 53
     if(lmax==0){
 54
     fout=fopen("blair_1212_lmax=0.dat","w");
55
 56
     else if(lmax==2){
 57
 58
     fout=fopen("blair_1212_lmax=2.dat","w");
 59
     }
     else if(lmax==4){
60
     fout=fopen("blair_1212_lmax=4.dat","w");
 61
 62
     }
     else if(lmax==6){
 63
     fout=fopen("blair_1212_lmax=6.dat","w");
 64
 65
     }
     else if(lmax==8){
fout=fopen("blair_1212_lmax=8.dat","w");
 66
67
     }
 68
 69
 70
      //散乱角の値(重心系での値)を振るためのループ
 71
     for(n=0;n<=120;n++){
 72
        phi = (20+1*(double)n)/180*pi;
 73
        int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
printf("status1 = %s\n", gsl_strerror(status1));
 74
 75
         int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
 76
 77
        printf("status2 = %s\n", gsl_strerror(status2));
 78
         B = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(sin(phi/2),2);
 79
         C = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(cos(phi/2),2);
 80
 81
 82
         double theta_dif=theta1.val-theta2.val;
        z1 = gsl_complex_polar(B,theta_dif-eta*log(pow(sin(phi/2),2)));
z2 = gsl_complex_polar(C,theta_dif-eta*log(pow(cos(phi/2),2)));
 83
 84
 85
        z7 = gsl complex add(z1,z2);
 86
 87
 88
        z4 = p;
 89
 90
         for(j=0;j<=1_p;j++){
            int status_legendre = gsl_sf_legendre_Pl_e(2*j,cos(phi),&a);
 91
            printf("status_legendre = %s\n", gsl_strerror(status_legendre));
 92
 93
            int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,eta,&lnr3,&theta3);
 ^{94}
            printf("status3 = %s\n", gsl_strerror(status3));
 95
 96
            int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,-eta,&lnr4,&theta4);
printf("status4 = %s\n", gsl_strerror(status4));
97
98
99
100
            D = (2*2*j+1)*a.val*exp(lnr3.val-lnr4.val);
101
            z3 = gsl_complex_polar(2*D/eta,pi/2+theta3.val-theta4.val);
            z4 = gsl_complex_add(z4,z3);
102
103
           3
104
         z8 = gsl_complex_sub(z7,z4);
105
        G = gsl_complex_abs2(z8);
X = A*G*1.0e+28;
106
107
108
        PHI=phi*180/pi;
fprintf(fout,"%lf\t%e\n",PHI,X);
109
110
111
     }
112
113
     fclose(fout);
114
115
     return 0;
     }
116
```
Listing 2: 13C-13C 散乱における Blair モデルを用いた微分散乱断面積の計算

```
//Blairモデルを用いた微分散乱断面積の計算
1
2
3
    #include <stdio.h>
    #include <math.h>
#include <gsl/gsl_sf.h>
4
5
    #include <gsl/gsl_complex.h>
6
    #include <gsl/gsl_complex_math.h>
7
    int main(void){
9
    int n,j,k,l,lmax,l_p;
10
    int Z;
    double A, B, C, D, F, G, H, X1, X2, X;
11
    double a,h;
12
    double phi, pi, PHI;
^{13}
    double Ecm, Elab, eta;
14
    double h_p,mu,Na,Na_p;
15
16
    double epsilon,epsilon_p,tr,tr_p;
17
    gsl_sf_result lnr1,lnr2,lnr3,lnr4,lnr5,lnr6;
gsl_sf_result theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6;
18
19
20
    gsl_complex z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10;
^{21}
^{22}
    FILE *fout;
23
    Z = 6;
^{24}
    pi = 3.14159265;
Elab = 7.5;
Ecm = Elab/2;
25
26
27
28
    h = 6.626068e - 34;
29
    mu = 6.5;
Na = 6.0221415e+23;
30
    tr=1.6021765e-19;
31
    epsilon=8.85418782e-12;
32
33
^{34}
    h_p = h*1.0e+34;
    Na_p = Na*1.0e-23;
tr_p = tr*1.0e+19;
35
36
    epsilon_p = epsilon*1.0e+12;
37
38
    eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2;
39
40
41
    A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
42
    gsl_complex p;
43
    GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
44
45
46
    for(1=0;1<=4;1++){</pre>
47
    lmax=2*1;
48
    l_p=1;
49
    if(lmax==0){
50
51
    fout=fopen("blair_1313_lmax=0.dat","w");
52
    }
53
    else if(lmax==2){
    fout=fopen("blair_1313_lmax=2.dat","w");
54
55
    }
    else if(lmax==4){
56
    fout=fopen("blair_1313_lmax=4.dat","w");
57
58
    }
59
    else if(lmax==6){
60
    fout=fopen("blair_1313_lmax=6.dat","w");
61
    }
    else if(lmax==8){
62
    fout=fopen("blair_1313_lmax=8.dat","w");
63
    }
64
65
66
    for (n=0; n \le 120; n++) {
       phi = (20+1*(double)n)/180*pi;
67
68
        int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
69
        int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
70
71
```

```
B = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(sin(phi/2),2);
 72
          C = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(cos(phi/2),2);
 73
 74
          double theta dif-theta1.val-theta2.val:
 75
      z1 = gsl_complex_polar(B,theta1.val-theta2.val-eta*log(pow(sin(phi/2),2)));
 76
      z2 = gsl_complex_polar(C,theta1.val-theta2.val-eta*log(pow(cos(phi/2),2)));
 77
          z4 = p;
z7 = gsl_complex_sub(z1,z2);
 78
 79
 80
          for(j=0;j<1_p;j++){
 81
              a = gsl_sf_legendre_P1(2*j+1,cos(phi));
int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1+1,eta,&lnr3,&theta3);
printf("status3 = %s\n", gsl_strerror(status3));
 82
 83
 84
               int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1+1,-eta,&lnr4,&theta4);
 85
              printf("status4 = %s\n", gsl_strerror(status4));
D = (2*(2*j+1)+1)*a*exp(lnr3.val-lnr4.val);
double c1=pi/2+theta3.val-theta4.val;
 86
 87
 88
              z3 = gsl_complex_polar(2*D/eta,c1);
 89
              z4 = gsl_complex_add(z4,z3);
 90
 ^{91}
             }
 92
 93
          z8 = gsl_complex_sub(z7,z4);
 94
          G = gsl_complex_abs2(z8);
X1 = A*G*1.0e+28;
 95
          z6 = p;
 96
          z10 = gsl_complex_add(z1,z2);
 97
 98
          for(k=0;k<=1_p;k++){
99
              a = gsl_sf_legendre_Pl(2*k,cos(phi));
int status5 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k+1,eta,&lnr5,&theta5);
printf("status5 = %s\n", gsl_strerror(status5));
100
101
102
103
               int status6 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k+1,-eta,&lnr6,&theta6);
              printf("status6 = %s\n", gsl_strerror(status6));
F = (2*(2*k)+1)*a*exp(lnr5.val)/exp(lnr6.val);
104
105
              double c2=pi/2+theta5.val-theta6.val;
z5 = gsl_complex_polar(2*F/eta,c2);
106
107
              z6 = gsl_complex_add(z6, z5);
108
          }
109
110
111
          z9 = gsl_complex_sub(z10,z6);
          H = gsl_complex_abs2(z9);
X2 = A*H*1.0e+28;
112
113
          X = 3 * X 1 / 4 + X 2 / 4;
114
115
          PHI=phi*180/pi;
fprintf(fout,"%lf\t%e\n",PHI,X);
116
117
      }
118
      }
119
120
121
      fclose(fout);
      return 0;
122
      }
123
```

Listing 3: 12C-12C 散乱における吸収係数の最適化

```
//吸収係数の最適化
 1
    //計算はメイン関数の中で一括して行った
 2
 3
    //特殊関数の計算にはGNUサイエンティフィックライブラリ(GSL)の定義関数を用いた
 4
    #include <stdio.h>
 5
    #include <math.h>
 6
    #include <gsl/gsl_sf.h>
 7
    #include <gsl/gsl_complex.h>
#include <gsl/gsl_complex_math.h>
 9
10
11
    #define N 5
    #define K 20
12
    #define M 2
13
14
15
    int main(void){
16
    int n,j,lmax,Z;
17
    int w0,w2,w4,w6,w8,k,l,s,q;
18
    double A,B,C,D,G,X;
    double a,h,phi,pi,Ecm,Elab,eta,h_p,mu,Na,Na_p,epsilon,epsilon_p,tr,tr_p;
19
20
    double g0,g2,g4,g6,g8,g[N];
    double dif,chi,CHI,Input[M][K],Error[M][K];
^{21}
^{22}
    gsl_sf_result lnr1,lnr2,lnr3,lnr4;
gsl_sf_result theta1,theta2,theta3,theta4;
23
^{24}
    gsl_complex z1,z2,z3,z4,z7,z8;
25
26
27
    FILE *fin,*fin2;
    fin=fopen("exp_1212_angle_modified_const_multiplied.txt","r");
^{28}
    fin2=fopen("errors_for_exp_1212_angle_modified_const_multiplied.txt","r");
29
30
    //実験値の読み込み
31
    for(l=0;l<K;l++){</pre>
32
        for(k=0;k<M;k++){
33
          fscanf(fin, "%lf",&Input[k][1]);
34
35
           }
        fprintf(fin,"\n");
36
37
38
    fclose(fin);
39
40
    //実験値の誤差の読み込み
41
42
    for(q=0;q<K;q++){
    for(s=0;s<M;s++){</pre>
^{43}
          fscanf(fin2,"%lf",&Error[s][q]);
^{44}
^{45}
46
        fprintf(fin2,"\n");
47
        7
^{48}
    fclose(fin2):
49
50
    Z = 6;
51
    pi = 3.14159265;
52
    Elab = 7.5;
Ecm = Elab/2;
53
54
55
    h = 6.626068e - 34;
    mu = 6;
Na = 6.0221415e+23;
56
57
    tr=1.6021765e-19;
58
    epsilon=8.85418782e-12;
59
60
    h_p = h*1.0e+34;
61
    Na_p = Na*1.0e-23;
tr_p = tr*1.0e+19;
epsilon_p = epsilon*1.0e+12;
62
63
64
65
66
    eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2;
    A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
67
68
    gsl_complex p;
69
    GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
70
71
```

```
lmax = 8;
 72
 73
      CHI=100; //初期値(とりあえず大きな数)
 74
 75
      //重み関数を振り分けるためのループ
 76
      for(w0=0;w0<=10;w0++){
 77
          g[0] = (double) w0/100;
 78
 79
          for(w2=0;w2<=10;w2++){
             g[1]=(double)w2/100;
 80
 81
              for (w4=0:w4 \le 10:w4++)
                  g[2]=(double)w4/100;
 82
                  for(w6=0;w6<=10;w6++){
 83
                      g[3]=(double)w6/100;
 84
                      for(w8=0;w8<=10;w8++){
 85
 86
                         g[4]=(double)w8/100;
 87
      //散乱角の値(重心系での値)を振るためのループ
 88
      for(n=0;n<=19;n++){
 89
        phi = (24+4*(double)n)/180*pi;
 90
 91
         int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
 92
 93
 94
          B = exp(lnr1.val)/(exp(lnr2.val)*pow(sin(phi/2),2));
 95
          C = exp(lnr1.val)/(exp(lnr2.val)*pow(cos(phi/2),2));
 96
 97
 98
          double theta_dif = theta1.val-theta2.val;
         z1 = gsl_complex_polar(B,theta_dif-eta*log(pow(sin(phi/2),2)));
z2 = gsl_complex_polar(C,theta_dif-eta*log(pow(cos(phi/2),2)));
99
100
101
102
          z4 = p;
103
          for(j=0;j<=lmax/2;j++){</pre>
104
             a = gsl_sf_legendre_P1(2*j,cos(phi));
int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,eta,&lnr3,&theta3);
int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,-eta,&lnr4,&theta4);
D = (2*2*j+1)*a*exp(lnr3.val)/exp(lnr4.val);
105
106
107
108
              double c1=pi/2+theta3.val-theta4.val;
109
110
111
              z3 = gsl_complex_polar(g[j]*2*D/eta,c1);
              z4 = gsl_complex_add(z4,z3);
112
            3
113
114
          z7 = gsl_complex_add(z1,z2);
115
          z8 = gsl_complex_sub(z7, z4);
116
         G = gsl_complex_abs2(z8);
X = A*G*1.0e+28;
117
118
119
         dif = dif + pow((Input[1][n]-X),2)/pow(Error[1][n],2);
120
        3
121
122
      chi=dif/19;
123
124
      //換算カイ二乗値がより小さい場合を探索
if(chi < CHI){</pre>
125
126
127
        CHI = chi;
        g0 = g[0];
128
        g2 = g[1];
g4 = g[2];
129
      g' = g[2];
g6 = g[3];
g8 = g[4];
}
130
131
132
133
134
      }}}}
135
136
      printf("Chi-squared = %lf\n",CHI);
137
      printf("Best estimates are:\ng0=%e\ng2=%e\ng4=%e\n",g0,g2,g4);
printf("g6=%e\ng8=%e\n",g6,g8);
138
139
      return 0;
140
      }
141
```

Listing 4: 13C-13C 散乱における吸収係数の最適化

```
//吸収係数の最適化
 1
 ^{2}
 3
     #include <stdio.h>
     #include <math.h>
#include <time.h>
 4
 5
     #include <gsl/gsl_sf.h>
 6
     #include <gsl/gsl_complex.h>
 7
     #include <gsl/gsl_complex_math.h>
 9
10
     #define N 5
     #define K 21
#define M 2
11
12
13
     int main(void){
14
15
     int n,j,lmax,l_p,s,q;
16
     int Z;
     double A, B, C, D, F, G, H, X1, X2, X;
17
     double a,h;
double phi,pi;
double Ecm,Elab,eta;
18
19
20
     double h_p,mu,Na,Na_p;
^{21}
     double epsilon,epsilon_p,tr,tr_p;
double g0,g1,g2,g3,g4;
double dif,CHI,chi;
^{22}
23
^{24}
     int w0,w1,w2,w3,w4;
25
     int k,1,m;
26
27
     double Input[M][K],Error[M][K];
     double g[N];
28
29
     gsl_sf_result lnr1,lnr2,lnr3,lnr4,lnr5,lnr6;
gsl_sf_result theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6;
gsl_complex z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10;
30
31
^{32}
33
     gsl_complex p;
^{34}
     GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
35
     FILE *fin,*fin2;
fin=fopen("exp_1313_angle_modified_const_multiplied.txt","r");
fin2=fopen("errors_for_exp_1313_angle_modified_const_multiplied.txt","r");
36
37
38
39
40
41
     for(1=0;1<K;1++){
         for(m=0;m<M;m++){
42
             fscanf(fin, "%lf", &Input[m][1]);
43
       }
^{44}
         fprintf(fin,"\n");
^{45}
     }
46
47
     fclose(fin);
^{48}
49
     for(q=0;q<K;q++){
50
51
         for(s=0;s<M;s++){
             fscanf(fin2,"%lf",&Error[s][q]);
52
53
       }
         fprintf(fin2,"\n");
54
     }
55
56
     fclose(fin2);
57
58
     Z = 6;
59
     pi = 3.14159265;
Elab = 7.5;
Ecm = Elab/2;
60
61
62
     h = 6.626068e - 34;
63
     mu = 6.5;
64
     Na = 6.0221415e+23;
65
     tr=1.6021765e-19;
epsilon=8.85418782e-12;
66
67
68
69 h_p = h*1.0e+34;
70 Na_p = Na*1.0e-23;
71 tr_p = tr*1.0e+19;
```

```
epsilon_p = epsilon*1.0e+12;
 72
 73
     eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2;
 74
 75
     A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
 76
 77
     lmax = 4;
 78
 79
     l_p=lmax/2;
 80
     CHT = 100:
 81
 82
     for(w0=0;w0<=10;w0++){
 83
         g[0]=(double)w0/100;
 84
         for(w1=0;w1<=10;w1++){
 85
            g[1]=(double)w1/100;
 86
            for(w2=0;w2<=10;w2++){
    g[2]=(double)w2/100;</pre>
 87
 88
                for(w3=0;w3<=10;w3++){
 89
                   g[3]=(double)w3/100;
 90
                    for(w4=0;w4<=10;w4++){
 91
 92
                       g[4]=(double)w4/100;
93
94
     for (n=0:n<=20:n++) {
        if(n==0){
95
        phi=32;
96
        3
 97
 98
         else if(n==1){
99
        phi=40;
100
       }
         else if (n==13) {
101
102
        continue;
103
       }
         else{
104
        phi = (40+4*(double)n)/180*pi;
105
       3
106
107
        int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
108
109
110
111
         B = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(sin(phi/2),2);
         C = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(cos(phi/2),2);
112
113
         double theta_dif=theta1.val-theta2.val;
114
         z1 = gsl_complex_polar(B,theta_dif-eta*log(pow(sin(phi/2),2)));
115
        z2 = gsl_complex_polar(C, theta_dif-eta*log(pow(cos(phi/2),2)));
116
117
118
         z4 = p:
119
         //波動関数の空間部分が反対称の場合
120
121
         z7 = gsl_complex_sub(z1,z2);
122
         for(j=0;j<1_p;j++){
    a = gs1_sf_legendre_Pl(2*j+1,cos(phi));</pre>
123
124
125
            int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,eta,&lnr3,&theta3);
126
127
            int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,-eta,&lnr4,&theta4);
128
129
            D = (2*(2*j+1)+1)*a*exp(lnr3.val)/exp(lnr4.val);
130
            double c1=pi/2+theta3.val-theta4.val;
131
            z3 = gsl_complex_polar(g[2*j+1]*2*D/eta,c1);
z4 = gsl_complex_add(z4,z3);
132
133
134
           }
135
136
         z8 = gsl_complex_sub(z7,z4);
        G = gsl_complex_abs2(z8);
X1 = A*G*1.0e+28;
137
138
139
140
         z6 = p;
141
142
         //波動関数の空間部分が対称な場合
143
         z10 = gsl_complex_add(z1,z2);
144
         for(k=0;k<=1_p;k++){</pre>
145
```

```
146
                 a = gsl_sf_legendre_Pl(2*k,cos(phi));
147
                int status5 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k,eta,&lnr5,&theta5);
int status6 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k,-eta,&lnr6,&theta6);
148
149
150
151
                 F = (2*(2*k)+1)*a*exp(lnr5.val)/exp(lnr6.val);
152
                double c2=pi/2+theta5.val-theta6.val;
z5 = gsl_complex_polar(g[2*k]*2*F/eta,c2);
z6 = gsl_complex_add(z6,z5);
153
154
155
         }
156
157
158
            z9 = gsl_complex_sub(z10,z6);
           H = gsl_complex_abs2(z9);
X2 = A*H*1.0e+28;
159
160
161
            X = 3 * X 1 / 4 + X 2 / 4;
162
163
       dif = dif + pow((Input[1][n]-X),2)/pow(Error[1][n],2);
164
165
       }
166
       chi = dif/7;
167
       if(chi < CHI){
   CHI = chi;</pre>
168
169
        CHI = chi;
g0 = g[0];
g1 = g[1];
g2 = g[2];
g3 = g[3];
g4 = g[4];
}
170
171
172
173
174
175
176
177
       }}}}
178
       printf("Reduced chi square = %lf\n",CHI);
printf("Best estimates are\ng0=%lf\ng1=%lf\ng2=%lf\n",g0,g1,g2);
printf("g3=%lf\ng4=%lf\n",g3,g4);
179
180
      return 0;
}
181
182
183
```

Listing 5: 12C-12C 散乱における実験値に対する理論値の定数倍・角度補正・ 吸収係数の同時最適化

```
//実験値に対する理論値の定数倍・角度補正・吸収係数の同時最適化
 1
 2
 3
     #include <stdio.h>
     #include <math.h>
 4
    #include <gsl/gsl_sf.h>
 5
     #include <gsl/gsl_complex.h>
 6
     #include <gsl/gsl_complex_math.h>
 8
    #define N 3
#define K 20
 9
10
     #define M 2
11
12
     int main(void){
13
     int i,n,j,k,l,s,q,lmax,m,w0,w2,w4,Z;
double A,B,C,D,G,X,Y,Const;
14
15
     double Phi, pi, dphi, dPhi, Ecm, Elab, eta;
16
    double in,h,p,mu,Na,Na_p;
double epsilon,epsilon_p,tr,tr_p;
double g0,g2,g4,dif,chi,CHI;
double Input[M][K],g[N];
17
18
^{19}
20
21
    gsl_sf_result lnr1,lnr2,lnr3,lnr4;
gsl_sf_result theta1,theta2,theta3,theta4;
22
23
    gsl_complex z1,z2,z3,z4,z7,z8;
^{24}
^{25}
    FILE *fin;
fin=fopen("exp_1212.txt","r");
26
27
28
     //実験値の読み込み
29
    for(l=0;l<K;l++){
30
        for(k=0;k<M;k++){
31
            fscanf(fin, "%1f", &Input[k][1]);
32
33
         r
         fprintf(fin,"\n");
34
    }
35
36
    fclose(fin);
37
38
     Z = 6;
39
    pi = 3.14159265;
Elab = 7.5;
Ecm = Elab/2;
40
41
42
     h = 6.626068e - 34;
43
    mu = 6;

Na = 6.0221415e+23;
^{44}
^{45}
46
    tr=1.6021765e-19;
    epsilon=8.85418782e-12;
47
^{48}
    h_p = h*1.0e+34;
49
    Na_p = Na*1.0e-23;
tr_p = tr*1.0e+19;
50
51
52
     epsilon_p = epsilon*1.0e+12;
     eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2;
53
    A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
54
55
    gsl_complex p;
GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
56
57
58
    lmax = 4;
59
60
     CHI=100;
61
62
    for(w0=0;w0<=10;w0++){
63
64
       g[0]=(double)w0/100;
65
        for(w2=0;w2<=10;w2++){
            g[1]=(double)w2/100;
for(w4=0;w4<=10;w4++){
g[2]=(double)w4/100;
66
67
68
69
70 for(i=1;i<=200;i++){
```

```
Y=0.01*(double)i;//定数倍の値を振る
 71
 72
            for (m=0; m \le 40; m++) {
                 dphi=-2+0.1*(double)m;//角度補正値を振る
 73
                  dif=0:
 74
 75
       for(n=0;n<=19;n++){
 76
            Phi = (24+4*(double)n+dphi)/180*pi;
 77
            int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
B = exp(lnr1.val)/(exp(lnr2.val)*pow(sin(Phi/2),2));
C = exp(lnr1.val)/(exp(lnr2.val)*pow(cos(Phi/2),2));
double theta_dif = theta1.val-theta2.val;
 78
 79
 80
 81
 82
            z1 = gsl_complex_polar(B,theta_dif-eta*log(pow(sin(Phi/2),2)));
 83
            z2 = gsl_complex_polar(C,theta_dif-eta*log(pow(cos(Phi/2),2)));
 84
 85
            z4 = p;
 86
 87
            for(j=0; j<=lmax/2; j++){</pre>
 88
                a = gsl_sf_legendre_P1(2*j,cos(Phi));
int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,eta,&lnr3,&theta3);
int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,-eta,&lnr4,&theta4);
 89
 90
 91
                 D = (2*2*j+1)*a*exp(lnr3.val)/exp(lnr4.val);
double c1=pi/2+theta3.val-theta4.val;
z3 = gsl_complex_polar(g[j]*2*D/eta,c1);
 92
 93
 ^{94}
 95
                 z4 = gsl_complex_add(z4, z3);
            }
 96
 97
            z7 = gsl_complex_add(z1,z2);
z8 = gsl_complex_sub(z7,z4);
 98
99
            G = gsl_complex_abs2(z8);
X = A*G*1.0e+28;
100
101
102
       dif = dif + pow((Input[1][n]-Y*X),2)/(Y*X);
103
       }
104
       chi = dif / 15:
105
106
       //カイ二乗値がより小さい場合を探索
107
       108
109
110
111
112
113
          dPhi = dphi;
114
       }
115
116
       else continue;
117
       }
       }
118
119
       }}}
120
121
       printf("Reduced chi square = %lf\n",CHI);
printf("Best estmts of abs coeffs are\ng0=%lf\ng2=%lf\ng4=%lf\n",g0,g2,g4);
printf("Best estmts of cnsts are\nConst=%lf\ndPhi=%lf\n",Const,dPhi);
122
123
124
       return 0;
125
126
       }
```

Listing 6: 13C-13C 散乱における実験値に対する理論値の定数倍・角度補正・ 吸収係数の同時最適化

```
//実験値に対する理論値の定数倍・角度補正・吸収係数の同時最適化
 1
 2
 3
     #include <stdio.h>
     #include <math.h>
 4
    #include <gsl/gsl_sf.h>
 5
     #include <gsl/gsl_complex.h>
 6
     #include <gsl/gsl_complex_math.h>
    #define N 3
#define K 20
 9
10
     #define M 3
11
12
13
     int main(void){
14
     int n,j,s,q,Z,k,l,m,i,t;
    int lmax,l_p,w0,w1,w2;
double A,B,C,D,F,G,H,X1,X2,X,Y,Const;
double Phi,dphi,dPhi,pi,Ecm,Elab,eta;
double a,h,h_p,mu,Na,Na_p;
15
16
17
18
     double epsilon,epsilon_p,tr,tr_p;
^{19}
     double g0,g1,g2,dif,CHI,chi;
double Input[M][K],g[N];
20
21
22
     gsl_sf_result lnr1,lnr2,lnr3,lnr4,lnr5,lnr6;
23
    gsl_sf_result theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6;
gsl_complex z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8,z9,z10;
^{24}
^{25}
26
     gsl_complex p;
    GSL_SET_COMPLEX(&p,0,0);
27
28
    FILE *fin;
fin=fopen("exp_1313.txt","r");
29
30
31
     for(l=0;l<K;l++){</pre>
32
        for(m=0;m<M;m++){
fscanf(fin,"%lf",&Input[m][1]);</pre>
33
34
35
         fprintf(fin,"\n");
36
    }
37
38
    fclose(fin);
39
40
41
     Z = 6;
    pi = 3.14159265;
42
     Elab = 7.5;
43
     Ecm = Elab/2;
^{44}
^{45}
     h = 6.626068e - 34;
    mu = 6.5;
Na = 6.0221415e+23;
46
47
     tr=1.6021765e-19;
48
     epsilon=8.85418782e-12;
49
50
     h_p = h*1.0e+34;
51
    Na_p = Na*1.0e-23;
tr_p = tr*1.0e+19;
52
53
     epsilon_p = epsilon*1.0e+12;
54
55
     eta=Z*Z*tr_p*tr_p*sqrt(mu)/(2*epsilon_p*h_p*sqrt(20*Ecm*tr_p*Na_p))*1.0e+2;
56
    A = pow((Z*Z*tr_p)/(8*Elab*pi*epsilon_p),2)*1.0e-26;
57
58
59
     lmax = 2;
    l_p=lmax/2;
CHI=100;
60
61
62
     for(w0=0;w0<=10;w0++){
63
64
       g[0]=(double)w0/10;
         for(w1=0;w1<=10;w1++){
65
             g[1]=(double)w1/10;
66
             for (w2=0; w2<=10; w2++) {
    g[2]=(double)w2/10;</pre>
67
68
69
70 for(i=1;i<=20;i++){
```

```
Y=0.1*(double)i;
71
          for(t=0;t<=40;t++){
72
              dphi = -2+0.1*(double)t;
73
              dif=0:
74
75
     for(n=0;n<20;n++){
76
         if(n==0){
 77
78
           Phi=(32+dphi)/180*pi;
79
            }
80
          else if(n==1){
            Phi=(40+dphi)/180*pi;
81
82
          else if(n<12){
83
            Phi=(40+4*(double)n+dphi)/180*pi;
84
85
            7
86
          else if(n==12){
87
           continue:
            }
88
          else{
89
            Phi=(44+4*(double)n+dphi)/180*pi;
90
91
            l
92
     int status1 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,eta,&lnr1,&theta1);
int status2 = gsl_sf_lngamma_complex_e(1,-eta,&lnr2,&theta2);
93
^{94}
     B = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(sin(Phi/2),2);
95
      C = exp(lnr1.val-lnr2.val)/pow(cos(Phi/2),2);
96
97
     z1 = gsl_complex_polar(B,theta1.val-theta2.val-eta*log(pow(sin(Phi/2),2)))
     z2 = gsl_complex_polar(C,theta1.val-theta2.val-eta*log(pow(cos(Phi/2),2)));
z4 = p;
98
99
100
      //波動関数の空間部分が反対称な場合
101
102
     z7 = gsl_complex_sub(z1,z2);
103
104
     for(j=0;j<1_p;j++){
         a = gsl_sf_legendre_Pl(2*j+1,cos(Phi));
int status3 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,eta,&lnr3,&theta3);
int status4 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*j+1,-eta,&lnr4,&theta4);
105
106
107
          D = (2*(2*j+1)+1)*a*exp(lnr3.val)/exp(lnr4.val);
108
         double c1=pi/2+theta3.val-theta4.val;
z3 = gsl_complex_polar(g[2*j+1]*2*D/eta,c1);
109
110
         z4 = gsl_complex_add(z4,z3);
111
112
     z8 = gsl_complex_sub(z7,z4);
113
     G = gsl_complex_abs2(z8);
114
     X1 = A * G * 1.0 e + 28;
115
116
      //波動関数の空間部分が対称の場合
117
     z6 = p;
z10 = gsl_complex_add(z1,z2);
118
119
120
     for(k=0;k<=1_p;k++){
121
          a = gsl_sf_legendre_Pl(2*k,cos(Phi));
122
         int status5 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k,eta,&lnr5,&theta5);
int status6 = gsl_sf_lngamma_complex_e(2*k,-eta,&lnr6,&theta6);
F = (2*(2*k)+1)*a*exp(lnr5.val)/exp(lnr6.val);
123
124
125
126
         double c2=pi/2+theta5.val-theta6.val;
         z5 = gsl_complex_polar(g[2*k]*2*F/eta,c2);
127
128
         z6 = gsl_complex_add(z6,z5);
129
         3
130
     z9 = gsl_complex_sub(z10,z6);
131
     Lo = gsl_complex_sub(210,
H = gsl_complex_abs2(z9);
X2 = A*H*1.0e+28;
132
133
     X = 3 * X 1 / 4 + X 2 / 4;
134
     dif = dif + pow((Input[1][n]-Y*X),2)/(Y*X);
135
136
     }
137
     chi=dif/14;
138
139
140
     if(chi < CHI){
      CHI = chi;
g0 = g[0];
g1 = g[1];
g2 = g[2];
141
142
143
144
```

```
Const = Y;
dPhi = dphi;
145
146
147
            }
        else continue;
}
}
148
149
150
151
        printf("Reduced chi square = %lf\n",CHI);
printf("Best estmts of abs coeffs are\ng0=%lf\ng1=%lf\ng2=%lf\n",g0,g1,g2);
printf("Best estmts of cnsts are\nConst=%lf\ndPhi=%lf\n",Const,dPhi);
return 0;
}
152
153
154 \\ 155
156
157
158
```