

2010年度後期 課題演習 A5 レポート

γ 線の角度相関による ^{60}Ni のスピン状態の決定

津村 美保
古野 達也
村上 洋平
毛利 宗一郎

概要

原子核のエネルギー準位はそれぞれ、核スピンと呼ばれる量子数を持っている。この量子数は原子核に固有の値である。原子核が γ 崩壊する際に放射される γ 線はこの核スピンに応じて角度相関を持つ。我々はこの性質を利用して ^{60}Ni の核スピン状態を理論、実験の両側面から調べた。

目次

| | |
|--|-----------|
| 第I部 理論 | 5 |
| 1 原子核からの放射 | 5 |
| 1.1 放射源がない時の多極展開 | 5 |
| 1.2 多極放射の角分布 | 9 |
| 1.3 放射源がある時の多極展開とモーメント | 10 |
| 2 γ崩壊の遷移確率と選択規則 | 13 |
| 2.1 γ 崩壊の遷移確率 | 13 |
| 2.2 放射の選択規則 | 15 |
| 3 半古典, 量子論による角相関関数の導出 | 17 |
| 3.1 原子核の遷移の半古典近似における方法 | 17 |
| 3.2 $\gamma - \gamma$ 相関の求め方 | 18 |
| 3.3 角相関関数の計算 | 19 |
| 3.4 量子論 | 22 |
| | |
| 第II部 実験 | 31 |
| 1 実験の原理 | 31 |
| 2 実験装置の説明 | 32 |
| 3 実験方法 | 34 |
| 3.1 回路 | 34 |
| 3.2 実験手順 | 37 |
| 4 解析 | 38 |
| 4.1 データの取り扱い | 38 |
| 4.2 ROOT による解析の方法 | 39 |
| 4.3 誤差の評価 | 44 |
| 5 結論：^{60}Niの核スピンを求める | 47 |
| 5.1 基底状態のスピンの場合 | 47 |
| 5.2 基底状態のスピンの場合 | 55 |
| | |
| 付録A 補助実験 | 58 |

| | |
|------------------------|----|
| 付録B シェルモデル | 60 |
| 付録C 特定の場合に角相関関数が一致すること | 68 |
| 参考文献 | 72 |

第I部 理論

1 原子核からの放射

原子核が γ 崩壊する時に放射される電磁場が角運動量と、それに応じた角分布を持ち、場の各成分は多極モーメントに関係していることを以下の数節で説明する。

1.1 放射源がない時の多極展開

放射源(原子核)のない領域を考えると Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{(I.1a)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(I.1b)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(I.1c)} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{(I.1d)} \end{cases}$$

電場, 磁場を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =: \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad \text{(I.2a)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =: \text{Re}\{\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad \text{(I.2b)}$$

とおくと,(I.1a) ~ (I.1d) は $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ として

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0 & \text{(I.3a)} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{(I.3b)} \\ \mathbf{B} = -\frac{i\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k}\nabla \times \mathbf{E} & \text{(I.3c)} \end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = 0 & \text{(I.4a)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(I.4b)} \\ \mathbf{E} = \frac{i}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\nabla \times \mathbf{B} & \text{(I.4c)} \end{cases}$$

これらにそれぞれ横波の条件

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{(I.3d)}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{(I.4d)}$$

を加えると, 式 (I.3) と式 (I.4) は独立な方程式になる.
 式 (I.3) の解を $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^M$, (I.4) の解を $\mathbf{E}^E, \mathbf{B}^E$ とおくと,
 Maxwell 方程式 (I.1) を満たす任意の解は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^E + \mathbf{E}^M \quad (\text{I.5a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^E + \mathbf{B}^M \quad (\text{I.5b})$$

これらはそれぞれ振動する磁氣的, 電氣的多極モーメントによって生じる (後述).

方程式 (I.3a), (I.4a) はスカラー Helmholtz 方程式より, 解は以下のように球 Hankel 関数 $h_l^{(1,2)}(kr)$ と球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ の積の無限級数に展開される (多極展開)

$$\mathbf{E}^M(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [e_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + e_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.6a})$$

$$\mathbf{B}^E(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [b_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + b_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.6b})$$

ここに

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) \quad (\text{I.7a})$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x) \quad (\text{I.7b})$$

$$j_l(x) := (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} \quad (\text{I.8a})$$

$$n_l(x) := (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{-x} \quad (\text{I.8b})$$

$e_{lm}^{(1,2)}, b_{lm}^{(1,2)}$ は境界条件によって定まるベクトルであり, $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は角運動量演算子 L, L_z に対する固有値が (l, m) の固有関数である.

横波の条件式 (I.3d), (I.4d) に加えて, $h_l^{(1,2)}$ がそれぞれ 1 次独立であることから

$$\mathbf{r} \cdot \sum_m e_{lm}^{(i)} Y_{lm}(\theta, \phi) = 0 \quad (\text{I.9a})$$

$$\mathbf{r} \cdot \sum_m b_{lm}^{(i)} Y_{lm}(\theta, \phi) = 0 \quad (\text{I.9b})$$

発散の条件式 (I.3b), (I.4b) より

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sum_{i=1}^2 \nabla \cdot [e_{lm}^{(i)} h_l^{(i)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)] = 0 \quad (\text{I.10a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^E(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sum_{i=1}^2 \nabla \cdot [b_{lm}^{(i)} h_l^{(i)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi)] = 0 \quad (\text{I.10b})$$

ここで、微分演算子 ∇ は角運動量演算子 $\mathbf{L} = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ を用いて $\nabla = \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{L}$ と表されるので、式 (I.10) は

$$\mathbf{r} \cdot \sum_{l,m} \frac{\partial h_l^{(i)}}{\partial r} \mathbf{e}_{lm}^{(i)} Y_{lm} - \sum_{l,m} \frac{i}{r} h_l^{(i)} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{e}_{lm}^{(i)}) Y_{lm} = 0 \quad (\text{I.11a})$$

$$\mathbf{r} \cdot \sum_{l,m} \frac{\partial h_l^{(i)}}{\partial r} \mathbf{b}_{lm}^{(i)} Y_{lm} - \sum_{l,m} \frac{i}{r} h_l^{(i)} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{b}_{lm}^{(i)}) Y_{lm} = 0 \quad (\text{I.11b})$$

なお動径 r のみの関数 $F(r)$ について、 $\mathbf{L}F(r) = 0$ を用いた。
ところが式 (I.9) より

$$\mathbf{r} \cdot [\mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{e}_{lm}^{(i)} Y_{lm}] h_l^{(i)} = 0 \quad (\text{I.12a})$$

$$\mathbf{r} \cdot [\mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{b}_{lm}^{(i)} Y_{lm}] h_l^{(i)} = 0 \quad (\text{I.12b})$$

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ と $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ に注意すると、これらの解は次の関係式を満たせばよいことがわかる。

$$\sum_m \mathbf{e}_{lm}^{(i)} Y_{lm} = \sum_m c_{lm}^{(i)} \mathbf{L} Y_{lm} \quad (\text{I.13a})$$

$$\sum_m \mathbf{b}_{lm}^{(i)} Y_{lm} = \sum_m d_{lm}^{(i)} \mathbf{L} Y_{lm} \quad (\text{I.13b})$$

ただし $c_{lm}^{(i)}, d_{lm}^{(i)}$ は定数。

これらの関係式を式 (I.6) に代入すると $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^E$ が求まり、さらに式 (I.3c), (I.4c) から B^M, E^E が求まる。

以上をベクトル球面調和関数

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) := \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm} \quad (\text{I.14})$$

を用いてまとめると

(E- l) 放射は

$$\mathbf{B}_l^E(\mathbf{r}) = \sum_m f_{lm}^E(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.15a})$$

$$\mathbf{E}_l^E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} k} (\nabla \times \mathbf{B}_l^E) \quad (\text{I.15b})$$

(M- l) 放射は

$$\mathbf{E}_l^M(\mathbf{r}) = \sum_m f_{lm}^M(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.16a})$$

$$\mathbf{B}_l^M(\mathbf{r}) = -\frac{i\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k}(\nabla \times \mathbf{E}_l^M) \quad (\text{I.16b})$$

ただし

$$f_{lm}^E(kr) := c_{lm}^{(1)} h_{lm}^{(1)}(kr) + c_{lm}^{(2)} h_{lm}^{(2)}(kr) \quad (\text{I.17a})$$

$$f_{lm}^M(kr) := d_{lm}^{(1)} h_{lm}^{(1)}(kr) + d_{lm}^{(2)} h_{lm}^{(2)}(kr) \quad (\text{I.17b})$$

であり, ベクトル球面調和関数は以下の規格直交性を満たす.

$$\int [\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)]^* \cdot [\mathbf{X}_{l'm'}(\theta, \phi)] d\Omega = \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'} \quad (\text{I.18})$$

ここで後の計算で用いる $|\mathbf{X}_{lm}|^2$ の表式を求めておく.
昇降演算子を

$$L_{\pm} := L_x \pm iL_y \quad (\text{I.19})$$

とすると

$$\mathbf{L} = \frac{\hat{x}}{2}(L_+ + L_-) + \frac{\hat{y}}{2i}(L_+ - L_-) + \hat{z}L_z \quad (\text{I.20})$$

($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル)
球面調和関数 Y_{lm} に昇降演算子が作用すると

$$L_+ Y_{lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l, m+1} \quad (\text{I.21a})$$

$$L_- Y_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l, m-1} \quad (\text{I.21b})$$

を満たす. これらを用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm} &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm} \\ &= \frac{1}{l(l+1)} \left[\frac{\hat{x}}{2}(L_+ + L_-) Y_{lm} + \frac{\hat{y}}{2i}(L_+ - L_-) Y_{lm} + \hat{z}L_z Y_{lm} \right] \\ &= -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}} Y_{l, m-1}(\theta, \phi) \chi_1^{+1} \\ &\quad + \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{lm}(\theta, \phi) \chi_1^0 \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{2l(l+1)}} Y_{l, m+1}(\theta, \phi) \chi_1^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

ここで, $\chi_1^{\pm 1} := \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{y})$, $\chi_1^0 := \hat{z}$ は大きさが 1 で z 成分が $\pm 1, 0$ の角運動量の固有ベクトルである. つまり電磁場のスピンの 1 であることを示す.

$\chi_1^{\pm 1}, \chi_1^0$ は互いに直交するので

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_{lm}|^2 &= \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{m(m+1)}{l(l+1)} \right] |Y_{l,m+1}|^2 + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{m(m-1)}{l(l+1)} \right] |Y_{l,m-1}|^2 + \frac{m^2}{l(l+1)} |Y_{lm}|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

ここで $l=0$ の時は $|\mathbf{X}_{00}|^2 = 0$ であることに注意する.

1.2 多極放射の角分布

原子核から放射される γ 線の角分布を計算するには, 放射源から遠く離れた波動域 ($kr \gg 1$) の場合を考えればよい. $kr \gg 1$ の時は $f_{lm}(kr)$ は外向き球面波になる.

$$f_{lm}(kr) \simeq h_l^{(1)}(kr) \simeq (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (\text{I.24})$$

$\frac{1}{kr}$ の高次の項を落とすと式 (I.14), (I.15) の電場, 磁場は

$$\mathbf{E}_{lm}^E(\mathbf{r}) \simeq c_{lm}^{(1)} (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{X}_{lm} \quad (\text{I.25a})$$

$$\mathbf{E}_{lm}^E(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \mathbf{B}_{lm}^E \times \hat{r} \quad (\text{I.25b})$$

$$\mathbf{E}_{lm}^M(\mathbf{r}) \simeq d_{lm}^{(1)} (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{X}_{lm} \quad (\text{I.26a})$$

$$\mathbf{B}_{lm}^M(\mathbf{r}) \simeq -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \mathbf{E}_{lm}^M \times \hat{r} \quad (\text{I.26b})$$

多極放射において単位時間当りに放出されるエネルギーの角分布は Poynting ベクトル

$$\mathbf{S} := \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) \quad (\text{I.27})$$

で与えられる.

波動域では $|\mathbf{E}| \simeq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |\mathbf{H}|$ で, それらは互いに垂直なので

$$|\mathbf{S}| \simeq c \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \simeq c \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \simeq \frac{c}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (\text{I.28})$$

となる.

式 (I.25), (I.26) より立体角 $d\Omega$ の中に放射されるエネルギーの時間平均は, 場の時間依存性の平均から出る因子 $\frac{1}{2}$ も考慮すると

$$dP = \frac{1}{2} \frac{c}{k^2 \mu_0} \left| \sum_{l,m} (-1)^{l+1} \{ c_{lm}^{(1)} \mathbf{X}_{lm} - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} d_{lm}^{(1)} \mathbf{X}_{lm} \times \hat{r} \} \right|^2 d\Omega \quad (\text{I.29})$$

純粋な (l, m) 次の電気あるいは磁気放射の場合の角分布は

$$dP_{lm}^E = \frac{1}{2} \frac{c}{k^2 \mu_0} |c_{lm}^{(1)}|^2 |\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)|^2 \quad (\text{I.30a})$$

$$dP_{lm}^M = \frac{1}{2} \frac{c \varepsilon_0}{k^2} |d_{lm}^{(1)}|^2 |\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)|^2 \quad (\text{I.30b})$$

で与えられる.

角度依存部分の $|\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)|^2$ は (I.23) で与えられ, $l = 1$ と $l = 2$ の場合の形を以下に示す.

$$|\mathbf{X}_{10}|^2 = \frac{3}{8\pi} (1 - \cos^2 \theta) \quad (\text{I.31a})$$

$$|\mathbf{X}_{1\pm 1}|^2 = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{I.31b})$$

$$|\mathbf{X}_{20}|^2 = \frac{15}{8\pi} (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) \quad (\text{I.31c})$$

$$|\mathbf{X}_{2\pm 1}|^2 = \frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta) \quad (\text{I.31d})$$

$$|\mathbf{X}_{2\pm 2}|^2 = \frac{5}{16\pi} (1 - \cos^4 \theta) \quad (\text{I.31e})$$

ここで $m \neq \pm 1$ で $\theta = 0$ の時は $|\mathbf{X}_{lm}(0, \phi)|^2 = 0$ となる. つまり $\theta = 0$ の方向には $m \neq \pm 1$ 以外の放射は起こらない.

また (l, m) 次放射の角分布は電氣的, 磁氣的どちらも同じであり両者を区別するには光子の偏極を測定しなければならない.

1.3 放射源がある時の多極展開とモーメント

次に放射源, つまり原子核近傍の場について考え, これが原子核の多極モーメントに関係していることをみる.

放射が局所的な電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, 磁化密度 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ によって発生しているとし, これらの時間依存性を $\exp(i\omega t)$ ($\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$) とする.

Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (\text{I.32a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (\text{I.32b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{ik}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \mathbf{B} =: ik \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (\mathbf{H} + \mathbf{M}) & (\text{I.32c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right] = \mathbf{j} - ik \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} & (\text{I.32d}) \end{cases}$$

また連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0 \quad (\text{I.33})$$

式 (I.33) を ρ について解き, 式 (I.32a) に代入すると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \quad (\text{I.34a})$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} := \mathbf{E} + \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{j} \quad (\text{I.34b})$$

式 (I.32) を $\boldsymbol{\mathcal{E}}, \mathbf{B}$ について書き直すと

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{\mathcal{E}} = -ik\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.35a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \\ \mathbf{B} = -\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k} \left(i\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{j} \right) \end{array} \right. \quad (\text{I.35b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = -\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{k} \left(i\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{j} \right) \\ (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mu_0(\nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}) \end{array} \right. \quad (\text{I.35c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mu_0(\nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.36a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{i}{k}(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\nabla \times \mathbf{M}) \end{array} \right. \quad (\text{I.36b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{i}{k}(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\nabla \times \mathbf{M}) \\ (\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mu_0(\nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}) \end{array} \right. \quad (\text{I.36c})$$

この方程式系は式 (I.3), (I.4) の一般系になっている. これらの解を式 (I.15)~(I.17) を一般化して次のようにおく.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{lm}^{\text{M}}(\mathbf{r}) = C_{lm}^{\text{M}} r^{-1} \chi_{lm}^{\text{M}}(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.37a})$$

$$\mathbf{B}_{lm}^{\text{E}}(\mathbf{r}) = C_{lm}^{\text{E}} r^{-1} \chi_{lm}^{\text{M}}(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{I.37b})$$

ここで $\chi_{lm}^{(\text{E},\text{M})}(r)$ は放射源が存在するときの動径関数である.

波動域では上の解は式 (I.15), (I.16) の解に接続されるものとする.

$$C_{lm}^{(\text{E},\text{M})} r^{-1} \chi_{lm}^{(\text{E},\text{M})}(r) \xrightarrow{kr \gg 1} f_{lm}^{(\text{E},\text{M})}(kr) \quad (\text{I.38})$$

これらの条件の元で式 (I.35), (I.36) を解くと放射源の近傍では

$$\chi_{lm}^{(\text{E})}(r) = ikr h_l^{(1)}(kr) \int_0^\infty r' j_l(kr') F_{lm}^{\text{E}}(r') dr' \quad (\text{I.39a})$$

$$F_{lm}^{\text{E}}(r) := \mu_0 r \int d\Omega \mathbf{X}_{lm}^*(\theta, \phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}) \quad (\text{I.39b})$$

また振幅 $C_{lm}^{(\text{E},\text{M})}$ は

$$C_{lm}^{\text{E}} = -\frac{ik^2}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int \mathbf{Y}_{lm}^* \left\{ \rho \partial_r(rj_l) - \left[-\frac{ik}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} - i\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} k \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) \right] j_l \right\} d^3r \quad (\text{I.40a})$$

$$C_{lm}^{\text{M}} = -\frac{ik^2}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int \mathbf{Y}_{lm}^* \left\{ [\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) - k^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M})] j_l + (\nabla \times \mathbf{M}) \partial_r(rj_l) \right\} d^3r \quad (\text{I.40b})$$

原子核による放射や吸収の遷移確率を計算するには、近傍域 $kr \gg 1$ の場合を扱えばよい。(原子核の大きさは 10^{-15}m 程度、 1MeV の γ 線の波長は 10^{-12}m 程度より、 $kr \sim 10^{-2}$ となるので、この近似は妥当である。)

$kr \gg 1$ での Bessel 関数の漸近式

$$j_l(kr) \simeq \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$$

を用いると、振幅は

$$C_{lm}^E \simeq \frac{2i}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} k^{l+2} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (Q_{lm} + Q'_{lm}) \quad (\text{I.41a})$$

$$Q_{lm} := \frac{1}{2} \int r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (\text{I.41b})$$

$$Q'_{lm} := \frac{-ik\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{2(l+1)} \int r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) [\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}] d^3r \quad (\text{I.41c})$$

$$C_{lm}^M \simeq \frac{2i}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} k^{l+2} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (M_{lm} + M'_{lm}) \quad (\text{I.42a})$$

$$M_{lm} := -\frac{1}{2(l+1)} \int r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) d^3r \quad (\text{I.42b})$$

$$M'_{lm} := -\frac{1}{2} \int r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \left(\nabla \cdot \mathbf{M} - \frac{k^2}{l+1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \right) d^3r \quad (\text{I.42c})$$

ここで Q_{lm}, M_{lm} は原子核内の振動する電荷による多極モーメントであり、また Q'_{lm}, M'_{lm} は核子のスピンに関連した固有の磁気モーメントによるものであると解釈出来る。

原子核からの (l, m) 次放射の単位時間当りの遷移確率を求めるには、放射される全エネルギー (式 (I.30) を $d\Omega$ で積分したもの) を光子のエネルギー $\hbar\omega = \hbar ck$ で割ればよい。純粋な (l, m) 次の電氣的、磁氣的放射による遷移確率をそれぞれ w_{lm}^E, w_{lm}^M とすると

$$w_{lm}^E = \frac{2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2 \quad (\text{I.43a})$$

$$w_{lm}^M = \frac{2\mu_0}{\hbar} \frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} |M_{lm} + M'_{lm}|^2 \quad (\text{I.43b})$$

となる。

2 γ 崩壊の遷移確率と選択規則

2.1 γ 崩壊の遷移確率

古典的には電気・磁気モーメントは式 (1.41),(1.42) で与えられた。これを電荷密度 ρ , 電流密度 j , 磁化密度 M について量子力学的に書き直して, 初期状態 ψ_i から終状態 ψ_f への遷移確率を考えよう。ここで, 磁化密度 M は核子のスピンにも依存するため, 波動関数 ψ は位置座標 r とスピン座標 σ の関数として定義しておく。

e を電気素量, M を核子の質量, μ を核磁子 (核子の磁気モーメント) とし, ρ, j, M がピークの振幅であることに注意すると,

$$\rho(\mathbf{r}, \sigma) = 2\psi_f^* e \psi_i \quad (\text{I.44a})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \sigma) = -2\frac{ie\hbar}{2M} [\psi_f^* \nabla \psi_i - (\nabla \psi_f^*) \psi_i] \quad (\text{I.44b})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \sigma) = 2\mu \frac{e\hbar}{2M} \psi_f^* \boldsymbol{\sigma} \psi_i \quad (\text{I.44c})$$

と表せる。ただし $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列で

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

原子の原子番号を Z , 質量数を A とし, j 番目の核子の座標, 質量等を $(\mathbf{r}_j, \sigma_j), M_j$ のように表すことにする。ここで, j の 1 から Z までを陽子のラベルとし, $Z+1$ から A までを中性子のラベルとする。

式 (I.41),(I.42) を多粒子系に拡張して式 (I.44) を用いると, 電気・磁気モーメントは

$$Q_{lm}(i, f) = \sum_{j=1}^Z e_j \int r_j^l Y_{lm}^* \psi_f^* \psi_i d^3 r d\sigma \quad (\text{I.46a})$$

$$Q'_{lm}(i, f) = -\frac{ik\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{l+1} \sum_{j=1}^Z \frac{e\hbar}{2M_j} \int r_j^l Y_{lm}^* [\mu_j \nabla \cdot (\psi_f^* \mathbf{r}_j \times \boldsymbol{\sigma}_j \psi_i) - 2i\psi_f^* (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi_i)] d^3 r d\sigma \quad (\text{I.46b})$$

$$M_{lm}(i, f) = -\frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^A \mu_j \frac{e\hbar}{M_j} \int r_j^l Y_{lm}^* \nabla \cdot (\psi_f^* \mathbf{L}_j \psi_i) d^3 r d\sigma \quad (\text{I.46c})$$

$$M'_{lm}(i, f) = -\sum_{j=1}^A \mu_j \frac{e\hbar}{2M_j} \int r_j^l Y_{lm}^* [\nabla \cdot (\psi_f^* \boldsymbol{\sigma}_j \psi_i) + \frac{k^2}{l+1} \psi_f^* \mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \psi_i] d^3 r d\sigma$$

$$\simeq -\sum_{j=1}^A \mu_j \frac{e\hbar}{2M_j} \int r_j^l Y_{lm}^* \nabla \cdot (\psi_f^* \boldsymbol{\sigma}_j \psi_i) d^3 r d\sigma \quad (\text{I.46d})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{第2項} \\ \text{第1項} \end{array} \sim (kR)^2 \ll 1 \text{ より} \right)$$

これらを用いて、遷移確率の大きさを見積もってみる。

$$\text{核半径 } R \sim 1\text{fm} \quad (\text{I.47})$$

$$\text{核子の質量 } M \simeq 2 \times 10^{-27}\text{kg} \quad (\text{I.48})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{陽子の質量 } M_p = 1.673 \cdots \times 10^{-27}\text{kg} \\ \text{中性子の質量 } M_n = 1.675 \cdots \times 10^{-27}\text{kg} \end{array} \right)$$

$$\text{核磁子 } \mu \sim 1 \quad (\text{I.49})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{陽子の核磁子 } \mu_p = 2.79 \cdots \\ \text{中性子の核磁子 } \mu_n = -1.91 \cdots \end{array} \right)$$

$$\gamma\text{線のエネルギー } \hbar\omega \sim 1\text{MeV} \quad (\text{I.50})$$

$$A \approx 2Z \quad (\text{I.51})$$

$$c \sim 3 \times 10^8\text{m/s} \quad (\text{I.52})$$

$$\hbar \sim 1 \times 10^{-34}\text{m}^2\text{kg/s} \quad (\text{I.53})$$

$$kR \sim 1 \times 10^{-2} \quad (\text{I.54})$$

$$Mc^2 \sim 1\text{GeV} \quad (\text{I.55})$$

$$c\hbar \sim 200\text{MeV} \cdot \text{m} \quad (\text{I.56})$$

とする. また $Y_{lm} \sim 1$, $\frac{L}{l+1} \sim 1$, $\sigma \sim 1$ と考えられる.
まず,

$$\frac{Q'_{lm}}{Q_{lm}} \sim \frac{\hbar k}{Mc} = \frac{\hbar \omega}{Mc^2} \sim 1 \times 10^{-3} \quad (\text{I.57})$$

$$\frac{M'_{lm}}{M_{lm}} \sim 1 \quad (\text{I.58})$$

であるから, 遷移確率の式 (I.43) を用いて

$$w_{lm}^E \sim Z^2 \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar R} \frac{(kR)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (\text{I.59a})$$

$$w_{lm}^M \sim A^2 \mu^2 \frac{e^2 \mu_0^2 \hbar}{M^2 R^3} \frac{(kR)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (\text{I.59b})$$

より, E 放射・M 放射ともに次数 l が大きくなると遷移確率は極端に小さくなりほとんど観測されなくなる.

次に, E 放射と M 放射を比較する. 次節で述べるパリティの保存則の式 (I.62) より同時に同じ次数の E 放射と M 放射がおこることはないから, E- l 放射と M- $l+1$ 放射, E- $l+1$ 放射と M- l 放射について比べることにする.

$$\begin{aligned} \frac{w_{l+1,m}^M}{w_{lm}^E} &\simeq \varepsilon_0 \mu_0 \frac{l(l+2)}{(l+1)^2} \frac{k^2}{(2l+3)^2} \frac{|M_{l+1,m} + M'_{l+1,m}|^2}{|Q_{lm}|^2} \\ &\sim \frac{(kR)^2}{(2l+3)^2} \left(\frac{\hbar}{RMc} \right)^2 \sim \frac{1}{36} \frac{(kR)^2}{(2l+3)^2} \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{l+1,m}^E}{w_{lm}^M} &\simeq \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{l(l+2)}{(l+1)^2} \frac{k^2}{(2l+3)^2} \frac{|Q_{l+1,m}|^2}{|M_{lm} + M'_{lm}|^2} \\ &\sim \frac{(kR)^2}{(2l+3)^2} \left(\frac{Mc^2}{\hbar} \right)^2 \sim 25 \frac{(kR)^2}{(2l+3)^2} \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

となる.

これらのことから, 最低次の $l = l_{min}$ が E 放射のときはほぼ純粋な E- l_{min} 放射が, l_{min} が M 放射のときは少し E- $l_{min}+1$ 放射の混じった M- l_{min} 放射が観測されることがわかる.

2.2 放射の選択規則

多極放射のパリティは磁場 $B_{lm}^{(E,M)}$ のパリティで決まる. l のパリティは 1 , Y_{lm} のパリティは $(-1)^l$, ∇ のパリティは -1 なので, 式 (1.15.a), (1.16.b) より E- l 放射のパ

リティは $(-1)^l$, M-l 放射のリティは $(-1)^{l+1}$ である.

初期状態 ψ_i (角運動量 (J_i, M_i) , パリティ π_i) から終状態 ψ_f (角運動量 (J_f, M_f) , パリティ π_f) への遷移確率 $w_{lm}^{(E,M)}$ が 0 にならないための条件 (選択規則) は, パリティの保存則から

$$\begin{cases} \pi_i = (-1)^l \pi_f & (\text{E-l 放射}) \\ \pi_i = (-1)^{l+1} \pi_f & (\text{M-l 放射}) \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

角運動量の保存則 $J_i = J_f + l$ から

$$\begin{cases} M_i = M_f + m \\ |J_i - J_f| \leq l \leq J_i + J_f \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

ただし, $l = 0$ の多極放射は存在しないから式 (I.23) より $J_i = J_f = 0$ の遷移は起こり得ない.

観測されうる放射は, これらの選択規則と, E 放射と M 放射についてとりうる最低次の l のみを考えればよいことから, 次の表のようにまとめられる.

(A) $J_i \neq J_f$ のとき

| | E 放射 | M 放射 |
|--|---|---|
| $\pi_i \pi_f = (-1)^{J_i - J_f}$ (Parity-favored) | $l = J_i - J_f $ | $l = J_i - J_f + 1$ (J_i or $J_f = 0$ のときを除く) |
| $\pi_i \pi_f = (-1)^{J_i - J_f + 1}$ (Parity-unfavored) | $l = J_i - J_f + 1$ (J_i or $J_f = 0$ のときを除く) | $l = J_i - J_f $ |

表 1: 観測されうる放射 ($J_i \neq J_f$ のとき)

(B) $J_i = J_f \neq 0$ のとき

| | E 放射 | M 放射 |
|------------------|--|--|
| $\pi_i = \pi_f$ | $l = 2$ ($J_i = J_f = \frac{1}{2}$ のときを除く) | $l = 1$ |
| $\pi_i = -\pi_f$ | $l = 1$ | $l = 2$ ($J_i = J_f = \frac{1}{2}$ のときを除く) |

表 2: 観測されうる放射 ($J_i = J_f \neq 0$ のとき)

この表と式 (I.60), (I.61) より,

(A) $J_i \neq J_f$ のとき

Parity-favored のとき, 放射はほとんど純粋に $l = |J_i - J_f|$ 次の E 放射となる. Parity-unfavored のとき, 少し $l = |J_i - J_f| + 1$ 次の E 放射が混じるものの, 主に $l = |J_i - J_f|$ 次の M 放射となる. つまり, パリティの如何にかかわらず $l = |J_i - J_f|$ 次の放射を考えればよい.

(B) $J_i = J_f \neq 0$ のとき

$\pi_i = \pi_f$ のときはほぼ純粋な E1 放射となり, $\pi_i = -\pi_f$ のときは少し E2 放射の混じった M1 放射となる. つまりどちらの場合も $l = 1$ 次の放射を考えればよいことがわかる.

3 半古典, 量子論による角相関関数の導出

3.1 原子核の遷移の半古典近似における方法

この章では, 原子核の崩壊におけるそれぞれの準位や遷移の l, m の値やパリティ π の決定の方法を述べる. これらは直接的に決定されるのではなく, むしろ, 互いに関連のある多くの異なった実験から推定されるのが普通で, 崩壊や寿命に関するすべてのデータとうまく一致するように決められるのである.

それらを求めるためにある原子核から放出されるガンマ線の分布を観測して, それを対応する理論式と比較したとする. ところが原子核は室温ではあちこちに向いており, したがって, たとえ特定の一個の原子核の初期および終状態の l, m, π の値がどのようなであろうとも, 平均としては m のすべての値が系の初期および終状態の両方に等しく現われてくる. すると, 放射の値はある l, π に対して m についての和をとったものになり, その和は

$$\sum_m |X_{lm}|^2 = \frac{1}{4\pi}$$

であるから全分布は球対称になる.

しかし, もし初期状態が一定のバイアスのもとで, 例えば正の m の多い状態に置かれているとすと, 放出される放射もまた正の m の多いものとなるだろう. このようなことは高磁場をかけて原子核の向きを揃えることで実現される. 実際はこのような高磁場の中でも異なった m をもつ核準位間のエネルギーは低いため, ガンマ崩壊以外の遷移を禁ずるため低温度が必要である. 実際問題としてこのような高磁場, 低温度を得ることは面倒だから, あるバイアスを得るために別の方法を考える必要がある.

この問題に取り組むために, 一連のガンマ放射を用いることができる. 始状態 A から中間状態 B を経て終状態 C へと各段階で γ 線を放出して崩壊する原子核を考える. この現象をカスケードという. 最初の γ 線が放出されると, 初期状態 A の各値 l_A, m_A, π_A から中間状態の各値 l_B, m_B, π_B へと変化するが, このとき放出される γ 線

をある特定の方向で検出すると、 m_B のそれぞれの値はもはや同じ重みをもっていない。この状態から次の γ 線が放出されると前述のあるバイアスがかかった状態からの放出がおこることとなり、その放射は球対称でなくなる。

よって実際に実験で行うことによって得られるデータはある γ 線を一つの方向で検出した際の、もうひとつの γ 線が放出される方向とその個数である。最初の γ 線が放出される方向から角度 θ にある立体角 $d\Omega$ に検出される確率を $W(\theta)d\Omega$ を求めることになる。一つ目、二つ目の γ 線の区別はそれぞれの強度で区別することにする。この $I(\theta)$ を理論値と比較することで実際の遷移を知ることができる。

ひとつ考えなくてはいけないのは、中間状態 B の寿命が有意に長い場合である。このときはまわりの場によって中間状態が攪拌されてバイアスがなくなってしまうかもしれない、その時にはもはや分布を測定しても意味がない。しかし普通カスケードが起きる際の中間状態の寿命は *pico* 秒のオーダーであり、したがってそれが外場に影響されるとは考えなくてもよい。

3.2 $\gamma - \gamma$ 相関の求め方

γ 線の物理を理解するには様々な方法があるが、我々はこれを半古典的に取り扱うことにする。

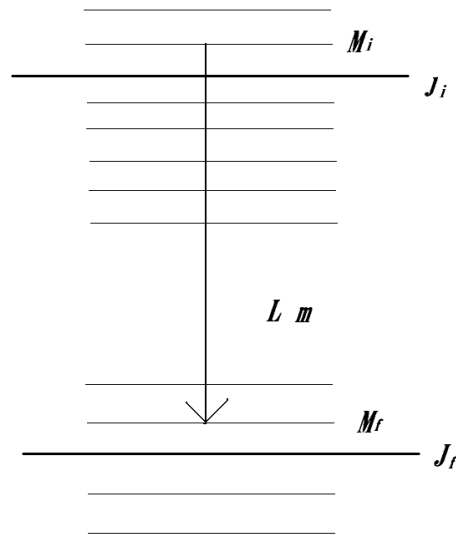


図 1: 初期状態と終状態間の遷移の準位図

図 (1) のように原子核のエネルギー準位間の遷移に伴う電磁放射は第 1 章で考察した電場や磁場の多極展開によって記述することができる。量子数 l, m は図のように初期状態 (全スピン J_i, z 成分 M_i) から終状態 (J_f, M_f) へと光子によって運び去

られる運動量も表わす. 角運動量の保存から, $J_i = l + J_f, M_i = m + M_f$ をうる. 量子数 l は $|J_i - J_f| \leq l \leq J_i + J_f$ という条件にしたがう. さらにこれに加えてパリティによる条件が加わる.

ところは $W(\theta)$ を起こりうる全ての遷移について計算することはほぼ不可能であるし, 実際は l の次数が一つ上がっただけで計算は大変面倒になる. これはそれぞれの次数の遷移が等確率では起こらないため, 全体の分布はそれらのある重みをつけたものの和になることによる. 量子力学を考慮すると話はもっと複雑になる. なぜなら異なる次数をもつ遷移では波動関数自身はそれぞれの次数の波動関数たちの重ね合わせによって記述できるが, 放射分布を計算するとそれらの干渉項が現われてきてしまうためである.

ところが放射については 2.1 節で述べたように次数が一つ上がると遷移確率は極端に下がるため, 実質最低次数のものだけを計算すればよい. このことは計算をとてても簡単にしてくれるし, 実際の実験で得られる情報と照らし合わせるときとてもよい近似になっている.

あと考えなければならないのはパリティについてであるが, これは角相関の実験からでは決定されない. パリティを決定するためには, 放射域における電場と磁場の偏極の 90° の相違を利用して実際に場を測定しなければならない.

3.3 角相関関数の計算

以下では角相関関数の一般的な導出と, その例を述べる.

図(2)にあるように, 状態が A → B, B → C と γ 線を放射してカスケードで崩壊していく原子核を考える. 始状態 A ではスピン J_A であり γ_1 を放出して中間状態のスピン J_B になり, さらに γ_2 を放出して終状態 J_C になるとする. それぞれの状態の z 成分を m_i ($i=A, B, C$) とすれば, おおのこの m_i のとりうる値は $-J_i \leq m_i \leq J_i$ となる. さらに γ_1 と γ_2 が原子核から運び去る角運動量をそれぞれ l_1, l_2 とおくことにする. すると角運動量の合成によりそれぞれの l がとりうる値は $-|J_A - J_B| \leq l_1 \leq J_A + J_B$, $-|J_B - J_C| \leq l_2 \leq J_C + J_B$ となる. 更に, γ 線の z 角運動量の z 成分を m_1, m_2 とすれば, それぞれ $-l_1 \leq m_1 \leq l_1, -l_2 \leq m_2 \leq l_2$ をとりうる.

以下では我々は l_1 および l_2 をそれがとりえる値の中で最小の値しか考えないことにする. 理由は (I.59) より高次の遷移は遷移確率が 4 桁ほど落ちて実質観測されないことや, 計算を簡単にするということにある. このような最低次の遷移のみ考慮し高次を無視することを純粋放射のみを考えるという.

始状態 A では原子核はいろいろな方向を向いているため, それぞれの m_A は同じ重みで存在すると考えられる. ここから γ_1 が放出されると中間状態 B に偏りができるが, この時に放出される γ_1 の進行方向を z 軸に, つまり量子化軸とおくことにする. すると γ 線の helicity が ± 1 であることより m_1 のとりうる値は ± 1 のみとなる. これより, 一つの始状態から到達できる中間状態は (始状態の m_A の値) ± 1 のみ

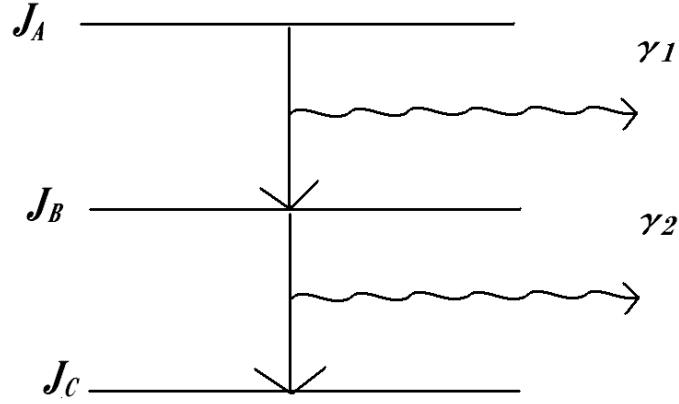


図 2: カスケードの模式図

であることがいえる. このあと中間状態の偏りを計算するには Clebsch-Gordan 係数を用いる. 始状態が中間状態と γ_1 の状態によって以下のように展開されるとする.

$$|J_A, m_A\rangle = \sum_{m_B m_1} |l_1, m_1, J_B, m_B\rangle \langle l_1, m_1, J_B, m_B | J_A, m_A\rangle \quad (\text{I.64})$$

このときの展開式の第二項目が Clebsch-Gordan 係数であり, この場合の二つの状態の間で遷移が起こる確率はこの係数の 2 乗で与えられる. 今 m_1 の値として ± 1 しかとりえないことを考えれば, ある中間状態 m_B の重みを $p(m_B)$ と定義すれば

$$p(m_B) = |\langle l_1, 1, J_B, m_B | J_A, m_A - 1\rangle|^2 + |\langle l_1, -1, J_B, m_B | J_A, m_A + 1\rangle|^2 \quad (\text{I.65})$$

によって計算される.

次に γ_2 が放出される過程を考える. ある遷移の角相関関数は, ある中間状態とある終状態の間の遷移が Clebsch-Gordan 係数の 2 乗で与えられることや各遷移間の分布関数は式 (I.31) で与えられること, および中間状態に偏りがあるためもはやそれらの遷移が等確率では起こらないことに注意すれば容易に計算することができ, その形は

$$W(\theta) = \sum_{m_C m_2} |\langle l_2, m_2, J_C, m_C | J_B, m_B\rangle|^2 p(m_B) Z_{l_2, m_2}(\cos \theta) \quad (\text{I.66})$$

以下に例として 4-2-0 遷移における角相関関数の計算を述べる. この遷移は図 (3) のように起こる.

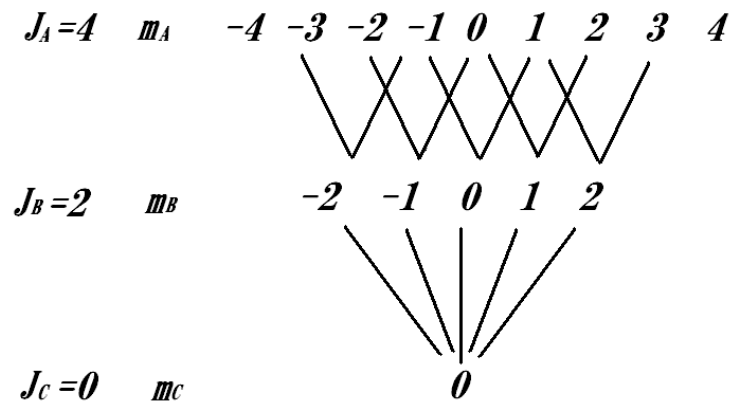


図 3: 4-2-0 遷移の模式図

一つ目の γ 線が放出される際の各遷移間の Clebsch-Gordan 係数は

$$\begin{aligned}
 m_B = 2 : \quad & \langle 2, 2, 2, 1 | 4, 3 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \\
 & \langle 2, 2, 2, -1 | 4, 2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{14}} \\
 m_B = 1 : \quad & \langle 2, 1, 2, 1 | 4, 2 \rangle = \sqrt{\frac{4}{7}} \\
 & \langle 2, 1, 2, -1 | 4, 0 \rangle = \sqrt{\frac{8}{35}} \\
 m_B = 0 : \quad & \langle 2, 0, 2, 1 | 4, 1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{7}} \\
 & \langle 2, 0, 2, -1 | 4, -1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{7}} \\
 m_B = -1 : \quad & \langle 2, -1, 2, 1 | 4, 0 \rangle = \sqrt{\frac{8}{35}} \\
 & \langle 2, -1, 2, -1 | 4, -2 \rangle = \sqrt{\frac{4}{7}} \\
 m_B = -2 : \quad & \langle 2, -2, 2, 1 | 4, -1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{14}} \\
 & \langle 2, -2, 2, -1 | 4, -3 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

で与えられる. これよりそれぞれの中間状態の偏りは

$$\begin{aligned}
 p(2) &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{14}}\right)^2 = \frac{4}{7} \\
 p(1) &= \left(\sqrt{\frac{4}{7}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{8}{35}}\right)^2 = \frac{4}{5} \\
 p(0) &= \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 = \frac{6}{7} \\
 p(-1) &= \left(\sqrt{\frac{4}{7}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{8}{35}}\right)^2 = \frac{4}{5} \\
 p(-2) &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{14}}\right)^2 = \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

だから, それらの比は以下のようなになる.

$$p(2) : p(1) : p(0) : p(-1) : p(-2) = \frac{4}{7} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7} : \frac{4}{5} : \frac{4}{7} = 10 : 14 : 15 : 14 : 10$$

これを式 (I.66) に代入すると角相関関数は残りの遷移の Clebsch-Gordan 係数は 1 であることを用いて

$$\begin{aligned}
 W(\theta) &= 10 \times Z_{2,2}(\cos \theta) + 14 \times Z_{2,1}(\cos \theta) + 15 \times Z_{2,0}(\cos \theta) \\
 &\quad + 14 \times Z_{2,-1}(\cos \theta) + 10 \times Z_{2,-2}(\cos \theta) \\
 &\propto 1 + \frac{1}{8} \cos^2 \theta + \frac{1}{24} \cos^4 \theta
 \end{aligned}$$

で与えられる. ここで我々は定数倍を気にしていないが, それは実際観測されるのが角度依存性のみであり, 定数倍は考慮しなくてよいからである.

3.4 量子論

半古典的に導いた角相関関数と結果は同じになるが, ここからは量子力学に基づいて一般的に角相関関数を計算する.

状態 (の集まり) $|lm\rangle$ が $-l < m < l$ について縮退しているとすると, 原子核は $|\psi_l\rangle = \sum_m C_m |lm\rangle$ で記述される 1 つの状態に存在する. このとき, 原子核を状態 $|lm\rangle$ に見いだす確率は $P_m = |C_m|^2$ である. 各状態の存在確率 P_m を指定しただけでは, 次の 2 つの状態を区別することができない.

1. 系は多数個の粒子からなり, そのすべてが $|\psi_l\rangle = \sum_m C_m |lm\rangle$ で記述される同じ状態にある.
2. 系は N 個の粒子からなり, 各々が「純粋」状態 $|lm\rangle$ の 1 つに存在する. ただし, 各状態に存在する粒子の数は $n_m = |C_m|^2 N$ である.

この 2 つは物理的には完全に違ったもので, 1. の場合には異なった状態 $|lm\rangle$ 間の干渉効果が重要となるが, 2. の場合には干渉効果は起こらない.

この問題をうまく処理するために, 次のような密度行列を導入する. 密度行列は, 1. のようなある 1 つの状態 $|\psi_l\rangle = \sum_m C_m |lm\rangle$ に対しては,

$$\begin{aligned} \langle l'm'|P|lm\rangle &= \delta_{ll'} \langle l'm'|\psi_l\rangle \langle \psi_l|lm\rangle \\ &\equiv \delta_{ll'} C_{m'} C_m^* \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

である. 混合状態に対しては,

$$\langle l'm'|P|lm\rangle = \delta_{ll'} \frac{1}{N} \sum_k n_k \langle l'm'|\psi_k\rangle \langle \psi_k|lm\rangle \quad (\text{I.68})$$

となる. ここで, n_k は状態 $|\psi_k\rangle$ に存在する粒子の数である. 特にもし 2. のように各粒子が「純粋」状態 $|lm''\rangle$ に存在すると, 式 (I.68) から

$$\begin{aligned} \langle l'm'|P|lm\rangle &= \delta_{ll'} \sum_{m''} \frac{n_{m''}}{N} \langle l'm'|lm''\rangle \langle lm''|lm\rangle \\ &= \frac{n_m}{N} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

となる. すなわち, 各々が 1 つの「純粋」状態 $|lm\rangle$ に存在する粒子の系に対しては密度行列は対角的となるが, 均質系に対しては対角的にならず, 式 (I.67) の形が便利である. $\langle l'm'|P|lm\rangle$ の対角項は状態 $|lm\rangle$ に原子核を見いだす確率にちょうど等しく, $\text{Tr}(P) = 1$ である.

この密度行列を用いて $W(\theta)$ の公式を導くことができる. 2 個の γ 線を放出して連続的に起こる過程 $A \rightarrow B \rightarrow C$ を考える. ここで, 状態 A は量子数 J_A, m_A, π_A (パリティ) によって特徴づけられており, B, C もそれぞれ同様である. 状態 A がどの状態にどれだけ存在するかは密度行列 $\langle m'_A|A|m_A\rangle$ (l_A は省略している) によって特徴づけられ, B, C も同様である. 縮退している場合は, 異なる m_A 間のエネルギー差は無視できるから, それらはすべて等しい分布を持っており, 次の式が成り立つ. (今の場合, 2. の状況なので式 (I.69) を用いる. $N = 2J_A + 1, l = l'$ である.)

$$\langle m'_A|P_A|m_A\rangle = \frac{\delta_{m'_A m_A}}{2J_A + 1} \quad (\text{I.70})$$

遷移 $A \rightarrow B + \gamma_1$ の遷移確率は核の終状態 m_B と光子の方向 Ω_1 とに依存する。(1 は核が $A \rightarrow B$ と遷移するときに出される光子のラベル) フェルミの黄金律から, 遷移確率は,

$$\rho_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m_A \rangle|^2 \rho_1(\Omega_1) d\Omega_1 \quad (\text{I.71})$$

である。ここで, σ_1 は γ 線の偏光, $\rho_1(\Omega)$ は単位エネルギー・単位立体角当たりの状態密度である。いま, $P_1(\Omega_1 \sigma_1) d\Omega_1$ を $\Omega_1 = (\theta, \phi)$ の方向に偏光 σ_1 の γ 線が立体角 $d\Omega_1$ で放出する確率, $P_A(m_A), P_B(m_B)$ を始状態 A の z 方向の角運動量が m_A である確率, 中間状態 B の z 方向の角運動量が m_B である確率とする。最終的な確率は $P_B(m_B) P_1(\Omega_1 \sigma_1) d\Omega_1$ となる。これは, 次のように書ける。

$$P_B(m_B) P_1(\Omega_1 \sigma_1) \propto \sum_{m_A} |\langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m_A \rangle|^2 P_A(m_A) \rho_1(\Omega_1) \quad (\text{I.72})$$

密度行列を用いて, これを表わすと次のようになる。

$$\langle m_B | P_B | m_B \rangle P_1(\Omega_1 \sigma_1) \propto \sum_{m_A} \langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m_A \rangle \langle m_A | P_A | m_A \rangle \langle m_A | H_I | m_B \Omega_1 \sigma_1 \rangle \rho_1(\Omega_1) \quad (\text{I.73})$$

さらに, これを一般化すると,

$$\langle m'_B | P_B | m_B \rangle P_1(\Omega_1 \sigma_1) \propto \sum_{m_A} \sum_{m'_A} \langle m'_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m'_A \rangle \langle m'_A | P_A | m_A \rangle \langle m_A | H_I | m_B \Omega_1 \sigma_1 \rangle \rho_1(\Omega_1) \quad (\text{I.74})$$

となる。また, 行列を用いた表わし方では,

$$P_B P_1 \propto \rho_1 H_I P_A H_I \quad (\text{I.75})$$

となる。 ρ_1 は角度とは無関係な定数因子となるので, 異なる方向の放射の相対的強度のみを問題にする場合は落としてかまわない。

第1の放射は固定した角度にある1個の検出器で検出され, その方向を z 軸とすることができるから求める関数 $W(\theta)$ は確率の積 $P_1(\theta = 0) P_2(\theta) d\Omega$, すなわち, 第1の γ 線は $\theta = 0$ に放射され, 第2の γ 線が環 $[\theta, \theta + d\theta]$ に放射される確率に等しい。 P_2 は上で P_1 に用いたのと同じ手続きを遷移 $B \rightarrow C + \gamma_2$ に応用すれば求められる。結果は,

$$\langle m'_C | P_C | m_C \rangle P_2(\Omega_2 \sigma_2) \propto \sum_{m_B m'_B} \langle m'_C \Omega_2 \sigma_2 | H_I | m'_B \rangle \langle m'_B | P_B | m_B \rangle \langle m_B | H_I | m_C \Omega_2 \sigma_2 \rangle \quad (\text{I.76})$$

または,

$$P_C P_2 \propto H_I P_B H_I \quad (\text{I.77})$$

である. 実験では $P_2(\Omega_1\sigma_2)$ のみを問題としており, また状態 $|m_C\rangle$ は直接観測されないので, m_C についての和, すなわち対角和をとる.

$$\text{Tr}[P_C(m_C)]P_2(\Omega_2\sigma_2) \propto \sum_{m_C} \sum_{m_B m'_B} \langle m_C \Omega_2 \sigma_2 | H_I | m'_B \rangle \langle m'_B | P_B | m_B \rangle \langle m_B | H_I | m_C \Omega_2 \sigma_2 \rangle \quad (\text{I.78})$$

対角和 $\text{Tr}[P_C(m_C)]$ は 1 であるから落とすことができ, この結果と式 (I.74), 式 (I.70) と合わせて用いると,

$$\begin{aligned} W(\theta) &= P_2(\Omega_2\sigma_2)P_1(\Omega_1\sigma_1) \\ &\propto \sum_{m_C} \sum_{m_B m'_B} \sum_{m_A} m_A m'_A \langle m_C \Omega_2 \sigma_2 | H_I | m'_B \rangle \langle m'_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m'_A \rangle \langle m'_A | P_A | m_A \rangle \\ &\quad \times \langle m_A | H_I | m_B \Omega_1 \sigma_1 \rangle \langle m_B | H_I | m_C \Omega_2 \sigma_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2J_A + 1} \sum_{m_C} \sum_{m_B m'_B} \sum_{m_A} \langle m_C \Omega_2 \sigma_2 | H_I | m'_B \rangle \langle m'_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m'_A \rangle \\ &\quad \times \langle m_A | H_I | m_B \Omega_1 \sigma_1 \rangle \langle m_B | H_I | m_C \Omega_2 \sigma_2 \rangle \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned} W(\theta) &\propto \sum_{m_C} \sum_{m_B m'_B} \sum_{m_A} m_A \langle m_C | H_2 | m'_B \rangle \langle m'_B | H_1 | m'_A \rangle \langle m_A | H_1 | m_B \rangle \langle m_B | H_2 | m_C \rangle \\ &= \text{Tr}[H_2 H_1 H_1 H_2] \quad (\text{I.79}) \end{aligned}$$

となる. ここで, H_1, H_2 は方向 Ω_1, Ω_2 をもち, 偏極 σ_1, σ_2 をもつ光子に対して求めた相互作用を表わしている.

角相関関数 $W(\theta)$ は Tr の中の行列が有限次元の時には可換であることを用いて, 次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} W(\theta) &\propto \text{Tr}[H_2 H_2 H_1 H_1] \\ &= \text{Tr}[AB] \quad (\text{I.80}) \end{aligned}$$

このとき行列形式では $B = H_2^2, A = H_1^2$ で, 代数的には,

$$\langle m_B | A | m'_B \rangle = \sum_{m_A} \langle m_B | H_1 | m_A \rangle \langle m_A | H_1 | m'_B \rangle \quad (\text{I.81})$$

$$\langle m_B | B | m'_B \rangle = \sum_{m_C} \langle m_B | H_2 | m_C \rangle \langle m_C | H_2 | m'_B \rangle \quad (\text{I.82})$$

である. このように分けると, あきらかに各光子について別々に変形を進めることができる. そこで, A, B の展開のなかの典型的な項, たとえば $\langle m_B | H_1 | m_A \rangle$ について考察する (他の項は同様に扱える). 定義から,

$$\langle m_B | H_1 | m_A \rangle = \langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_1 | m_A \rangle \quad (\text{I.83})$$

である. エネルギー差 $E_A - E_B$ は光子の運動量の大きさを与え, Ω_1, σ_1 はその方向と偏光を与える. この行列要素を多極展開の行列要素と結びつけ, 光子の特性を角運動量とパリティによって表わすためには変換行列が必要である. すなわち, 角運動量とパリティの量子数をそれぞれ L_1, M_1, π_1 とすると, 行列 $\langle L_1 M_1 \pi_1 | \Omega_1 \sigma_1 \rangle$ が必要である. したがって, 式 (I.81) の各項はいろいろな $L_1 (|J_B - J_A| \leq L_1 \leq J_B + J_A)$ と M_1 についての和に分解される (パリティは保存され $\pi_1 = \pi_A \pi_B$ であるから, π_1 についての和は必要ない). z 軸を $\Omega_1 = 0$ とすると, 特別な場合 $\langle L_1 M_1 \pi_1 | 0 \sigma_1 \rangle$ を求めることになる.

角運動量 L に属する固有関数は行列 D^L によって,

$$\langle LM\pi | \Omega\sigma \rangle = \sum_m D_{Mm}^L(R^{-1}) \langle LM\pi | 0\sigma \rangle \quad (\text{I.84})$$

のように変換する. ここで, R は z 軸から放射の方向 Ω への回転を表わす. そこで, 式 (I.81) の第 1 項は次のように変形できる.

$$\langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m_A \rangle = \sum_{L_1 M_1} \langle \Omega_1 \sigma_1 | L_1 M_1 \pi_1 \rangle \langle m_B L_1 M_1 \pi_1 | H_I | m_A \rangle \quad (\text{I.85})$$

Clebsch-gordan 係数を用いて, 式 (I.85) の最後の項は, (ずっと明記しなかった J を復活させて) 次のように表わせる.

$$\langle J_B m_B L_1 M_1 \pi_1 | H_I | J_A m_A \rangle = \sum_{J'_A m'_A} \langle J_B m_B L_1 M_1 | J'_A m'_A \rangle \langle J'_A m'_A J_B L_1 \pi_1 | H_I | J_A m_A \rangle \quad (\text{I.86})$$

H_I は基本的には回転不変であるから, 最後の行列要素は $J'_A = J_A$ のときのみ 0 でなく, m_A とは無関係である. 残った「換算」行列要素を $(J_B || L_1 \pi_1 || J_A)$ と書くと, これは実にとることができ, 式 (I.86) は

$$\langle J_B m_B L_1 M_1 \pi_1 | H_I | J_A m_A \rangle = \langle J_B m_B L_1 M_1 | J_A m_A \rangle (J_B || L_1 \pi_1 || J_A) \quad (\text{I.87})$$

となる. これを式 (I.84), (I.85) とあわせると次式をえる.

$$\begin{aligned} \langle m_B | H_I | m_A \rangle &= \langle m_B \Omega_1 \sigma_1 | H_I | m_A \rangle \\ &= \sum_{L_1 M_1 m} \langle 0 \sigma_1 | L_1 m \pi_1 \rangle D_{Mm}^L \langle J_B m_B L_1 M_1 | J_A m_A \rangle \\ &\quad \times (J_B || L_1 \pi_1 || J_A) \end{aligned} \quad (\text{I.88})$$

その結果をそのまま式 (I.81) に使うと, 結果は極めてこみいってしまうが, 次の関係式を用いると簡単化できる.

$$(D_{Mm}^L)^* = (-1)^{M-m} D_{-M, -m}^L \quad (\text{I.89})$$

$$D_{Mm}^L D_{M'm'}^{L'} = \sum_l \langle Lm L'm' | l, m+m' \rangle \langle L M L' M' | l, M+M' \rangle D_{M+M', m+m'}^l \quad (\text{I.90})$$

また, Racah 係数 W を用いると, 簡単化できる. 3 つの Clebsch-gordan 係数の積について,

$$\begin{aligned} & \sum \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle \langle l_3 m_3 l_4 m_4 | l_5 m_5 \rangle \langle l_2 m_2 l_4 m_4 | l_6 m_6 \rangle \\ & = \sqrt{(2l_3 + 1)(2l_6 + 1)} \langle l_1 m_1 l_6 m_6 | l_5 m_5 \rangle W(l_1 l_2 l_5 l_4; l_3 l_6) \end{aligned} \quad (I.91)$$

行列 A, B の最終的な結果を書く前に, 次の「放射パラメーター」を導入する.

$$C_{lm}(LL') = \sum_{\mu\mu'} (-1)^{L'-\mu'} \langle LL'\mu, -\mu' | lm \rangle \langle 0\sigma | L\mu\pi \rangle^* \langle 0\sigma' | L'\mu'\pi' \rangle \quad (I.92)$$

このパラメーターは, 変換行列 $\langle 0\sigma | L\mu\pi \rangle$ を通して, 放出される放射の特性を表わしている. また, それらは偶然にも全角運動量演算子の固有値 l, m をもつ固有関数になっている.

そこで A, B の行列は次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle m'_B | A | m_B \rangle & = \sum_{L_1 L'_1} \sum_{l_1 m_1 m'_1} (-1)^{J_B - m_B - l_1} (2J_A + 1) (J_B || L_1 \pi_1 || J_A) \\ & \quad \times (J_B || L'_1 \pi'_1 || J_A) \langle J_B J_B m_B, -m'_B | l_1 m'_1 \rangle \\ & \quad \times W(J_B J_A l_1 L'_1; L_1 J_B) C_{l_1 m_1}(L'_1 L_1) D_{m'_1 m_1}^{l_1}(R_1^{-1}) \end{aligned} \quad (I.93)$$

$$\begin{aligned} \langle m'_B | B | m_B \rangle & = \sum_{L_2 L'_2} \sum_{l_2 m_2 m'_2} (-1)^{J_B - m_B - l_2} (2J_B + 1) (J_C || L_2 \pi_2 || J_B) \\ & \quad \times (J_C || L'_2 \pi'_2 || J_B) \langle J_B J_B m_B, -m'_B | l_2 m'_2 \rangle \\ & \quad \times W(J_B J_C l_2 L'_2; L_2 J_B) C_{l_2 m_2}(L'_2 L_2) D_{m'_2 m_2}^{l_2}(R_2^{-1}) \end{aligned} \quad (I.94)$$

これらを $W(\theta)$ の要素の式 (I.80) に代入し, Clebsch-Gordan 係数の直交性を用いる. 特に次の関係式

$$\sum_{m_B m'_B} \langle J_B J_B m_B, -m'_B | l_1 m'_1 \rangle \langle J_B J_B m_B, -m'_B | l_2 m'_2 \rangle = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m'_1 m'_2} \quad (I.95)$$

を使う. また, すでに l_1 は l_2 に等しく, $m'_1 = m'_2$ であるから, D の 2 つの表現を結合することができる.

$$\sum_{m'} D_{m' m_2}^l(R_2^{-1}) D_{m' m_1}^l(R_1^{-1}) = D_{m_1 m_2}^l(R_2^{-1} R_1) \quad (I.96)$$

したがって, この最終的な D は回転 $R_2^{-1} R_1$, すなわち第 2 の回転を第 1 の回転に合成した回転 (角度 θ) の表現となる. それゆえ, それを $D_{m_1 m_2}^l(\theta)$ と表わす. 結果は

$$\begin{aligned} W(\theta) & \propto \sum (-1)^l (J_B || L_1 \pi_1 || J_A) (J_B || L'_1 \pi'_1 || J_A) (J_C || L_2 \pi_2 || J_B) \\ & \quad \times (J_C || L'_2 \pi'_2 || J_B) W(J_B J_A l L'_1; L_1 J_B) \\ & \quad \times W(J_B J_C l L'_2; L_2 J_B) C_{l m_1}(L'_1 L_1) C_{l m_2}(L_2 L'_2) D_{m_1 m_2}^l(\theta) \end{aligned} \quad (I.97)$$

となる. ここで, 和は $L_1, L'_1, L_2, L'_2, l, m_1, m_2$ についてとる. この式は複雑に見えるが, もし 2 個の γ 線が本質的に純粋な多極放射であるとかかなり簡単になる. そのときは $L_1 = L'_1, L_2 = L'_2$ であり, また換算行列要素は定数となり繰り出すことができる. したがってこの場合には

$$W(\theta) \propto \sum_{lm_1m_2} (-1)^l W(J_B J_A l L_1; L_1 J_B) W(J_B J_C l L_2; L_2 J_B) \times C_{lm_1}(L_1 L_1) C_{lm_2}(L_2 L_2) D_{m_1 m_2}^l(\theta) \quad (\text{I.98})$$

となる.

相関関数は式 (I.97) で与えられるように, 2 種類のカスケード $J_A(L_1)J_B(L_2)J_C$ と $J_C(L_2)J_B(L_1)J_A$ について同じである. このことは式 (I.79) から直接理解できる. さらに, 角運動量の 3 つの組 $(l_1 l_2 l_5), (l_3 l_4 l_5), (l_1 l_3 l_6), (l_2 l_4 l_6)$ が, それぞれ三角形をつくらないかぎり, Racah 係数 $W(l_1 l_2 l_3 l_4; l_5 l_6)$ はゼロになる. この制限を式 (I.97) に使うと l についての選択則

$$0 \leq l \leq \text{Min}(2J_B, 2L_1, 2L_2) \quad (\text{I.99})$$

が得られる. 直線偏光した γ 線については l はいつも偶数である.

純粋な多極の場合の γ γ 方向相関

方向相関だけを観測するときには, 検出器はすべての直線偏光の和をとり m とは無関係 (m_1 と m_2 は検出器への方向を z 軸として測定される) になり, 関数 C_{lm} は $m = 0$ のみを含む. この場合 D^l は Legendre 多項式となり, l が式 (I.99) の制限をうけるとして, W は

$$W(\theta) = \sum_{l=\text{even}} A_l P_l(\cos \theta) \quad (\text{I.100})$$

と表わすことができる.

式 (I.100) の A_l の計算はそれが (A と B の行列に対応して) 次の 2 つの因子に分解される事実により容易に遂行できる.

$$A_l = F_l(L_1 J_A J_B) F_l(L_2 J_C J_B) \quad (\text{I.101})$$

式 (I.98) と式 (I.99) から,

$$F_l(L_1 J_A J_B) = W(J_B J_A l L; L J_B) C_{l0}(LL) \quad (\text{I.102})$$

を得る. 放射パラメーター $C_{l0}(LL)$ は式 (I.92) から得られ,

$$C_{l0}(LL) = \sum_{\mu} (-1)^{L-\mu} \langle LL\mu, -\mu | l0 \rangle \sum_{\sigma} \langle 0\sigma | L\mu\pi \rangle^* \langle 0\sigma | L\mu\pi \rangle \quad (\text{I.103})$$

となる. ここで, $\mu = \pm 1$ である. σ についての和は簡単に実行でき, $2L + 1$ に比例するので,

$$C_{l_0}(LL) \propto (-1)^{L-1}(2L+1)\langle LL1, -1|l_0\rangle \quad (\text{I.104})$$

となる. したがって,

$$F_l(L_1 J_A J_B) \propto (-1)^{L-1}(2L+1)\langle LL1, -1|l_0\rangle W(J_B J_A l L; L J_B) \quad (\text{I.105})$$

となる. こうして, 係数 F_l は Clebsch-Gordan 係数と Racah 係数から数値的に計算できる.

例:4(2)2(2)0

量子論を用いて導いた式 (I.100) を使って, 線源の始状態, 中間状態, 終状態の角運動量がそれぞれ 4, 2, 0 の場合の相関関数 $W(\theta)$ を導いてみる. この時, 始状態から中間状態の遷移の際にでるガンマ線 γ_1 の角運動量は合成の規則 ($|2-4| < l_1 < 4+2$) より 2 から 6 までとりうるが, その割合は角運動量 2 のものが圧倒的に多いので, 放射は γ_1 の角運動量が純粋な 2 とする. 中間状態から終状態の遷移の際にでるガンマ線 γ_2 の角運動量は $|2-0| < l_1 < 0+2$ より 2 である.

式 (I.105) より,

$$\begin{aligned} F_l(L_1 J_A J_B) &\propto (-1)^{L-1}(2L+1)\langle LL1, -1|l_0\rangle W(J_B J_A l L; L J_B) \\ &= (-1)^{l+J_A+J_B+1}(2L+1)\langle LL1, -1|l_0\rangle \left\{ \begin{matrix} J_B & J_A & L \\ L & l & J_B \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

ここで, $\left\{ \begin{matrix} & & \\ L & l & J_B \end{matrix} \right\}$ は 6j 記号である. これを用いて,

$$\begin{aligned} F_0(2, 4, 2) &= (-1)^{0+4+2+1}(5)\langle 221, -1|00\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot -1 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\ F_2(2, 4, 2) &= (-1)^{2+4+2+1}(5)\langle 221, -1|20\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{2}{35} = -\frac{1}{7} \sqrt{\frac{2}{7}} \\ F_4(2, 4, 2) &= (-1)^{4+4+2+1}(5)\langle 221, -1|40\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{35}} \cdot \frac{1}{630} = -\frac{1}{63} \sqrt{\frac{2}{35}} \\ F_0(2, 0, 2) &= (-1)^{0+0+2+1}(5)\langle 221, -1|00\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot -1 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\ F_2(2, 0, 2) &= (-1)^{2+0+2+1}(5)\langle 221, -1|20\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{1}{5} = -\sqrt{\frac{1}{14}} \\ F_4(2, 0, 2) &= (-1)^{4+0+2+1}(5)\langle 221, -1|40\rangle \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix} \right\} = -1 \cdot 5 \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{35}} \cdot \frac{1}{5} = -2 \sqrt{\frac{2}{35}} \end{aligned}$$

今回の実験では, 角度 θ ごとの相対的な γ 線の数 は測定できるが, その方向に飛んできた数の絶対値はシンチレーターの性能などに依るため分からないので, $F_0 = 1$ になるように規格化する. すると, F の各値は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 F_0(2, 4, 2) &= 1 \\
 F_2(2, 4, 2) &= -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{10}{7}} = -0.170747 \\
 F_4(2, 4, 2) &= -\frac{1}{63}\sqrt{\frac{2}{7}} = -0.00848448 \\
 F_0(2, 0, 2) &= 1 \\
 F_2(2, 0, 2) &= -\sqrt{\frac{5}{14}} = -0.597614 \\
 F_4(2, 0, 2) &= -2\sqrt{\frac{2}{7}} = -1.06904
 \end{aligned}$$

これを用いて, 式 (I.101) から, A_l を求めると,

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 \\
 A_2 &= 0.102041 \\
 A_4 &= 0.00907025
 \end{aligned}$$

したがって, 相関関数は次のように求められる.

$$W(4 \rightarrow 2 \rightarrow 0, 2, 2, \theta) = 1 + 0.102041P_2(\theta) + 0.00907025P_4(\theta) \quad (\text{I.107})$$

この相関関数は, 検出器において, m , 偏光が測定できないことから, これらについて和をとったものである.

第II部 実験

第I部で予想された角度相関を実験的に確かめる.

1 実験の原理

^{60}Co は約 5.27 年の半減期で 崩壊を起こして ^{60}Ni になる. その際, ^{60}Ni の基底状態に崩壊するのではなく, まず ^{60}Ni の励起状態に崩壊してその後 γ 崩壊を起こして基底状態になる.

^{60}Co のエネルギースペクトルを NaI 検出器を用いて観測すると図 4 のようになる. また, この検出器のノイズスペクトル (線源を除いた時のエネルギースペクトル) は

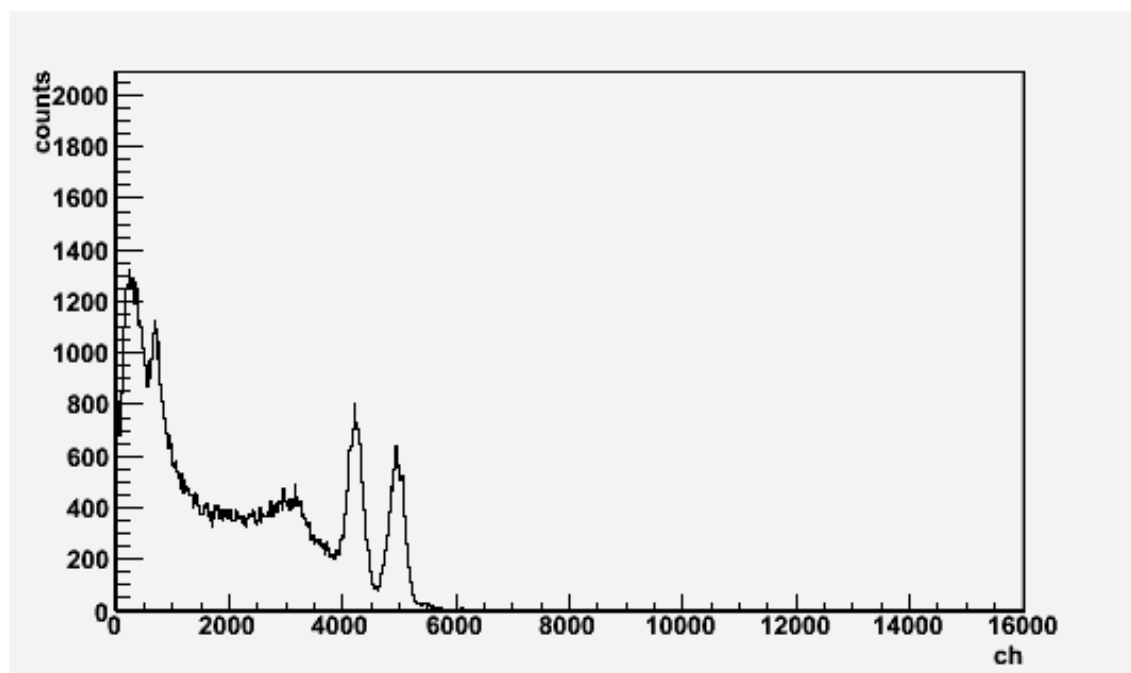


図 4: ^{60}Co のエネルギースペクトル

図 5 のようになる.

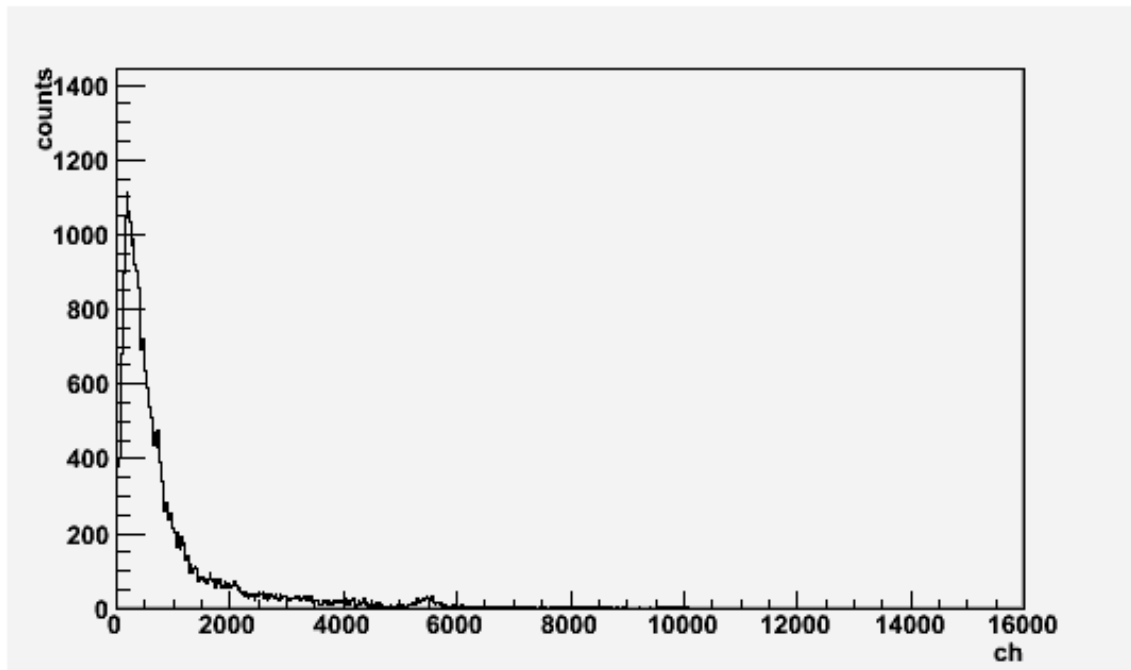


図 5: ノイズスペクトル.5500ch 付近のピークは ^{40}Ca の自然放射線と考えられる.

2つのグラフを比べると, 図1の4200ch付近と5000ch付近のピークは ^{60}Co からの γ 線と考えられる. 文献値によるとこれらのエネルギーは1.17MeVと1.33MeVである. また2つの γ 線はカスケードによるものであり, 前の章で得たような角度相関が得られると予想される.

実験的に角度相関を得るには次のようにすればよい.

2つの γ 線検出器を用意する (フォトマル①とフォトマル②とする).

①に1.17MeVの γ 線が入ってきた時に, ①に対して角度 θ の方向に設置された②に入ってくる γ 線を観測する. ②のスペクトルから1.33MeVに相当する γ 線の個数を計測することで, 角度 θ におけるカスケードの rate を求める事が出来る.

角度ごとに得られたカスケードの rate を理論で求めた相関関数と比較することで ^{60}Co の核スピン状態を決定する事が出来る.

2 実験装置の説明

γ 線検出器には以下のものを使用した.

- NaIシンチレーター

γ 線が入ってきたときに, そのエネルギーに比例した蛍光を発生させる結晶.

- 光電子増倍管
シンチレーターからの光を光電効果により電気信号に変換し,それを増幅する装置.

次に実験で使用したモジュールを説明する.

- Amplifier(ORTEC d572A,571)
信号を増幅する.UNIからは増幅した信号をそのまま,BIからはコンデンサを通し,微分した形にした信号を出す.
- Timing Single Channel Analyzer(ORETC 551 × 2)
入力した信号を指定した電圧の領域以外をカットし,論理信号に変換する.
- Delay Modul(ORTEC 427A,427A, 海津製作所 Dual variable delay)
信号を遅らせる.
- Channel Discriminater(LeCroy model 520BL)
入力信号を論理信号に変換する.
- Pulser(ORTEC 480)
一定の周期 (60Hz) でパルスを出す.測定時間を計測するために用いた.
- TAC(ORTEC 467)
二つの入力信号 (start 信号と stop 信号) の時間差に比例した高さの信号を出す.
- Universal Coincidence(ORTEC 418A)
複数の Input から,指定した個数以上の論理信号が同時に入っている時のみ信号を出す.
- Logic Unit(Le Croy model 365 AL)
Universal Coinsidence と同じ役割をする.
- Level adapter(海津製作所)
論理信号の NIM 信号と TTL 信号を相互に変換する.
- Gate Generator(PS model 794)
入力信号に対して出力信号を任意の遅延時間,パルス幅で出力することができる.
- Scalar(テクノランド N-OR425)
入ってきた NIM 信号の数を数える.
- High Voltage Power Supply(林栄精器 model RPH-032)
光電子増倍管に電圧を供給する.

- Attenuator(海津製作所 320)
入力信号の高さを減らす.

データの記録には CAMAC システムを用いた.

- Crete 電源 (TOYO MODEL PS-6000)
各ユニットに電源を供給する.
- Pulse height(テクノランド C-TM 405)
モジュールからのアナログ信号をデジタル信号に変換する.
- Output register(テクノランド 16bit output register)
PC からの output 信号をモジュールに送る.

今回の実験では線源に Co60(社団法人 日本アイソトープ協会 番号 1353) を用いた. 我々は γ 線の計測を約 1 カ月かけて行った. 半減期は 5.27 年より, この計測期間で 崩壊によって ^{60}Co がおよそ 98.9 % に減少したと考えられるが, この影響による γ 線の強度減少は解析誤差の範囲内である.

3 実験方法

3.1 回路

以下にモジュールの回路図を示す.

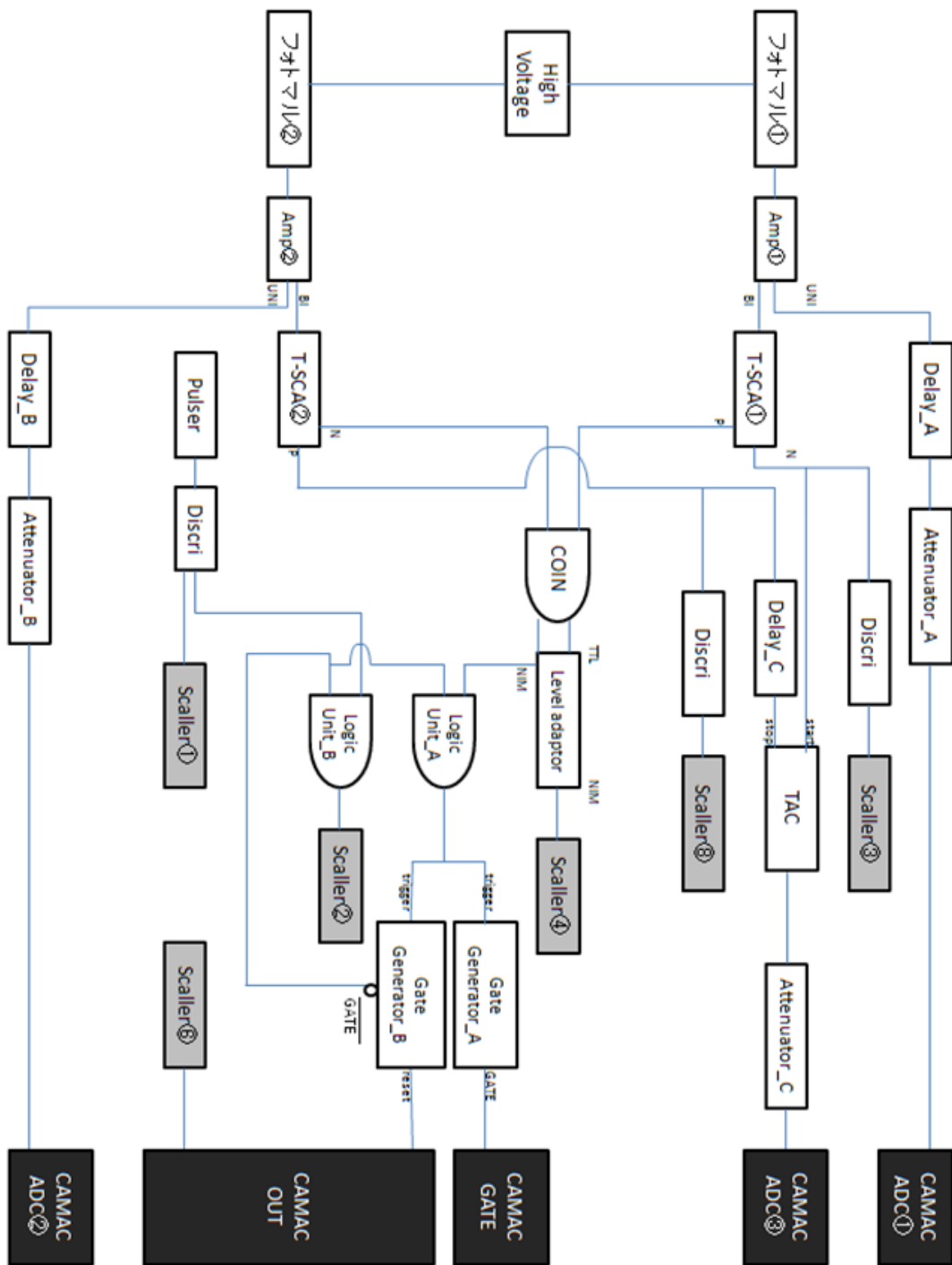


図 6: 回路図

我々は上の回路図において、フォトマル①とフォトマル②から出てきた信号を2つの Amp を用いて増幅させた。これらの2つの信号で coincidence が取れたときの

み adc1~adc3 の gate を開くように設定した.

- gate についての注意点

連続した gate 信号の間隔が短すぎると,PC の処理が追いつかなくなりフリーズしてしまう可能性があるため,以下のようにして PC での信号の記録が終わるまでは次の gate が開かないようにした.

まず,“coin” からの信号は“Logic Unit A”を通り,“Gate Generator A”で CAMAC の gate を開く.gate が開いている時のみに adc1~adc3 に入ってきた信号が記録される.

また gate が開いて信号を記録している時は,“Gate Generator B”の gate bar からは信号が出力されなくなり,“coin”から新たに gate を開けようとする信号が来ても“Logic Unit A”で coincidence を取ることはなく,gate を開くことはない.

PC でデータ記録が終了すると,“CAMAC OUT”から reset 信号が出力され“Gate Generator B”から gate bar 信号が出力されるようになり,新たな gate を開くことが出来るようになる.

- TAC についての注意点

必ず STOP 信号が START 信号の後に入るようにするため,TAC の STOP 信号の前に“Delay_C”を挿入した.またそれにより時間差の分布のピークが原点からずれて全容がわかりやすくなる.

- CAMAC について

CAMAC(Computer Automated Measurement and Control)とは,モジュールとコンピュータの仲介として,アナログ信号とデジタル信号との間の変換を行ったり信号を送ったりするものである.1種類のデータのみであれば Multichannel Analyzer もしくは Pulse height Analyzer を用いればよいが,今回は一度に複数のデータを取り扱う必要があるためそれに対応した規格として CAMAC を用いた.

CAMAC は gate 信号がくると adc1~adc3 に入力されたアナログ信号(電圧)をデジタル信号に変換する.そして PC に LAM(Look At Me!)信号を立ててデジタル信号を読み取るよう指令を送る.

PC は LAM 信号を受け取ると CAMAC にある 3 つの adc の信号を読み取り,記録する.記録が終了すると CAMAC の LAM,adc の信号をリセットし,新たな LAM 信号を待つ.

- CAMAC で以下のデータを記録するよう設定した.

ADC① … フォトマル①に入ってきた γ 線のエネルギー

ADC② … フォトマル②に入ってきた γ 線のエネルギー

ADC③ … フォトマル①と②に γ 線が入ってきたときの時間差(TAC の START 信号と STOP 信号の時間差)

- Scaler では次の値を記録するようにした.
 - ① … Pulser の信号数
 - ② … CAMAC の GATE が開いている間の Pulser の信号数
 - ③ … フォトマル①に入った γ 線のうち Timing SCA①で制限した範囲のエネルギーをもつものの数
 - ④ … CAMAC の GATE を開こうとした回数
 - ⑥ … コンピューターに記録されたイベント数
 - ⑧ … フォトマル②に入った γ 線のうち Timing SCA②で制限した範囲のエネルギーをもつものの数

3.2 実験手順

1. モジュールの各値の設定は次のようにした.
 - High Voltage① … 1973V
 - High Voltage② … 1804V
 - Amp① … GAIN 61.6 倍, Shaping time $0.5\mu\text{s}$
 - Amp② … GAIN 41.4 倍, Shaping time $0.5\mu\text{s}$
 - Timing SCA① … lower 4.0, upper 6.4, delay $0.23\mu\text{s}$
 - Timing SCA② … lower 2.0, upper 10.0
 - Universal Coincidence … range $1.24\mu\text{s}$
 - TAC … range $0.5\mu\text{s}$
 - Delay_A … $2.25\mu\text{s}$
 - Delay_B … $2.25\mu\text{s}$
 - Delay_C … 27ns
 - Attenuater_A … 12db(1/4 倍)
 - Attenuater_B … 12db(1/4 倍)
 - Attenuater_C … 6db(1/2 倍)
 - Gate generater_A … gate width 0.1ms

ここで, Timing SCA の値は ^{60}Co からの 1.17MeV と 1.33MeV の γ 線のエネルギーの山両方が入るように設定した.

2. 線源を中心に据え, フォトマル①とフォトマル②を線源がフォトマルの軸上に位置するように置いた. 線源の中心と NaI シンチレーターの結晶の中心の距離 d を 200mm とした. このように設定したのは, d が大きすぎると多くの count 数を得ることが難しくなり, また d が小さすぎると γ 線が検出器に対して斜めに入射する割合が大きくなり検出効率が悪くなるうえ, 検出器の有限の立体角が無視できなくなるためである.

3. フォトマル①とフォトマル②のなす角 θ を 15° ずつ変化させて $\theta = 30^\circ$ から $\theta = 180^\circ$ まで測定を行った. このとき線源とフォトマル①を固定しフォトマル②のみを動かした.

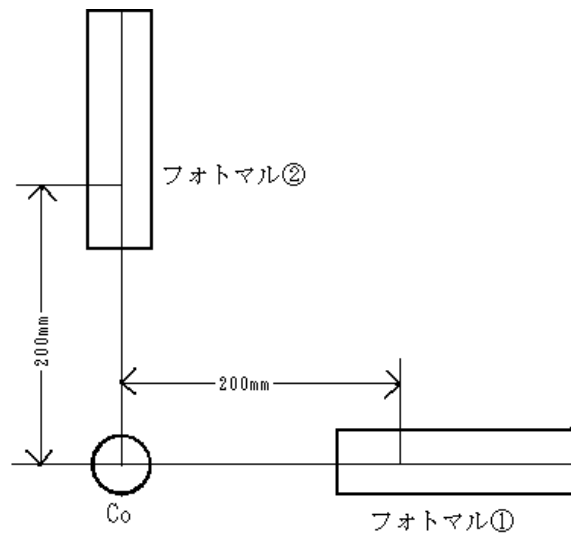


図 7: フォトマルの配置図

4 解析

以下では, 実験によって得たデータを解析し, 角度ごとの rate を計算する.

4.1 データの取り扱い

今回は解析ソフトとして ROOT を用いた. ROOT とは CERN(欧州合同素粒子原子核研究機構) で開発されており, 様々な処理を行うことができる. なお, 言語は C++ をベースとしている.

今回の実験で得られたのはスケーラーの値とパソコンに取り込まれたデータであった. パソコンのデータは binary のデータになっている. 解析で実際に使う解析ソフトは ROOT なので, binary のデータを以下のようにして ROOT ファイルに変換した.

1. データが入っているパソコンの Linux 上でわれわれが使う “daq-a5” というディレクトリに入った.

2. daq-a5 にはまずパソコンにあるデータを Ntple 形式のファイルに変換するプログラムが入っている.Ntple 形式とは PAW という解析ソフトで扱うための形式である.
3. daq-a5 には Ntple 形式のデータを ROOT ファイルに変換する h2root というプログラムも入っている.これを用いて Ntple 形式のファイルを ROOT ファイルに変換した.つまりわれわれはパソコンに入っているデータをいったん PAW で使える形にしてから,それを ROOT ファイルにするという操作を行った.

このようにして得られた ROOT データを以下で解析する.

4.2 ROOT による解析の方法

まず得られた ADC①,ADC②,ADC③のデータについて ROOT を用いてヒストグラムを描くと次のようになる.

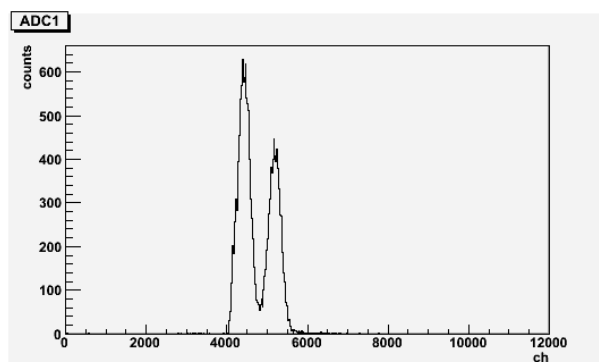


図 8: ADC①のヒストグラム

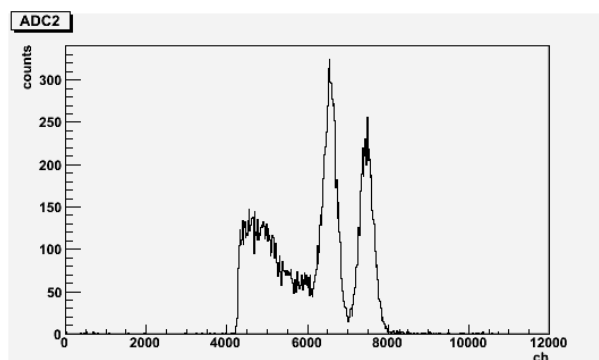


図 9: ADC②のヒストグラム

ADC①,ADC②のヒストグラムには,確かに 1.17MeV と 1.33MeV の 2つのピークが見えている.

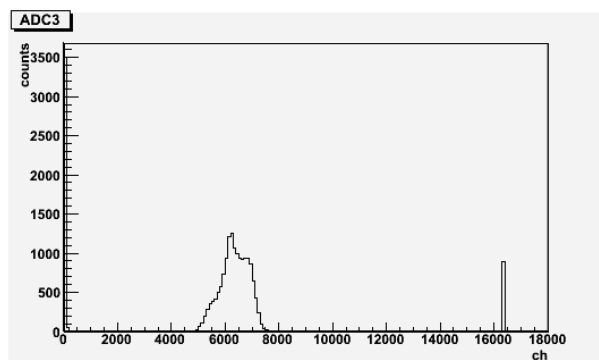


図 10: ADC③のヒストグラム

ADC③のヒストグラムは,4500 ~ 8000ch 付近に 1つの分布が見える. また TAC の時間幅 $0.5\mu\text{s}$ の間に START 信号が入らなかったものが 0ch に, STOP 信号が入らなかったものが 16400ch にたまっていると考えられる. これは CAMAC の GATE を開くための”COIN”の時間幅 ($1.24\mu\text{s}$) が TAC の時間幅 ($0.5\mu\text{s}$) より長いことに起因する.

$\theta = 180^\circ$ の場合を例にとり ROOT による解析の方法を示す. 誤差の取り扱いについては次節で述べることにし,ここでは大まかな手順を説明する.

fitting のルール

fitting の際のデータ点を多くするためヒストグラムの bin 幅 b は 20ch とした. それぞれのピークについて ~ 式のようなガウス分布であると仮定してパラメータ C, μ, σ を得た. (γ 線が検出器にエネルギーを与える事象・エネルギーを電気信号に変換する事象などはすべて統計的であることから,測定されたスペクトルのピークはガウス分布に従うとしてよい.) また $\tilde{\chi}^2 = \chi^2/ndf$ の値に注意して 5% の有意水準で棄却されないように範囲を指定した.

$$f(x) = C \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{II.1})$$

1. まず ADC①の下のピークについて fitting を行い, そのパラメータを C_1, μ_1, σ_1 とする. $\theta = 180^\circ$ のとき, $C_1 = 614.088, \mu_1 = 4428.45, \sigma_1 = 147.314$ であった.

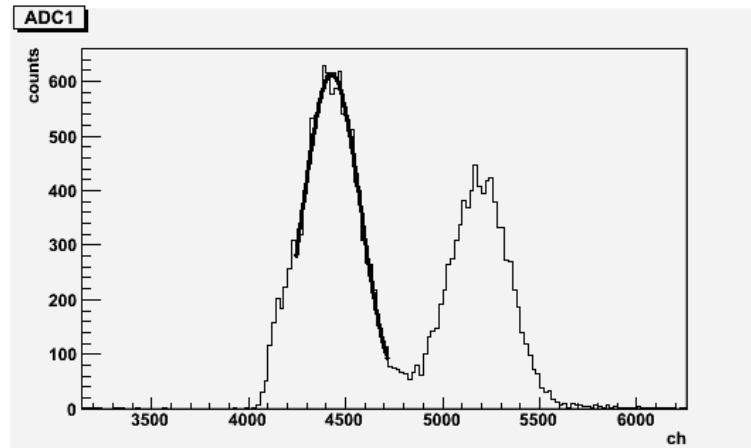


図 11: ADC①の下のピークについて fitting の図

2. 実際にフォトマル②で検出されたスペクトルは次のようである.

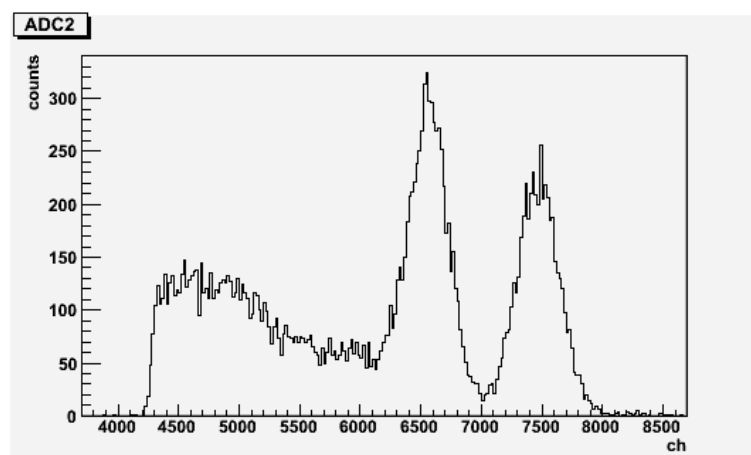


図 12: フォトマル②で検出されたスペクトル

(A) フォトマル①で 1.17MeV の γ 線が検出されている
 (B) その 1.17MeV の γ 線がカスケードによるものである
 という 2 つの条件をみたすときにフォトマル②で検出される γ 線のスペクトルを調べたい。

(A) に相当する条件として, $\mu_1 - 2\sigma_1 < ADC < \mu_1 + 2\sigma_1$ であることを課す. ここで, $\sigma_1(\theta)$ に関連した量で制限したのはそれぞれの角度 θ について統一的に論じるためである. (B) に相当する条件としては $4500 < ADC < 8000$ を課す. (すべての角度 θ について ADC③のカスケードであると思われる分布はこの範囲に入って

いる。) この制限により accidental な事象による影響を軽減できる。

データの組 (ADC①,ADC②,ADC③) のうち, 条件 (A)4134<ADC①<4723 かつ (B)4500 <ADC③< 8000 をみたすような ADC②のヒストグラムを表示させると, 次のようになる。

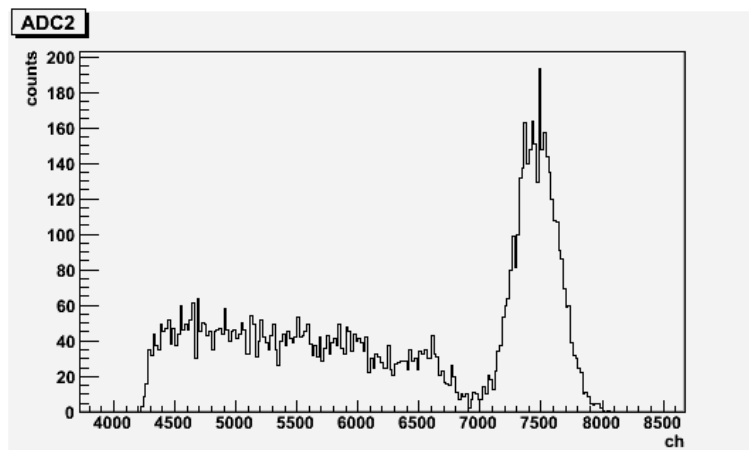


図 13: 制限をかけた ADC②のヒストグラム

このヒストグラムは 7500ch 付近にピークをもつことから, 1.33MeV の γ 線が多く検出されることがわかる. この γ 線の個数を n とおく.

3. ADC②の上のピークについて fitting を行いそのパラメータを C_2, μ_2, σ_2 とする.

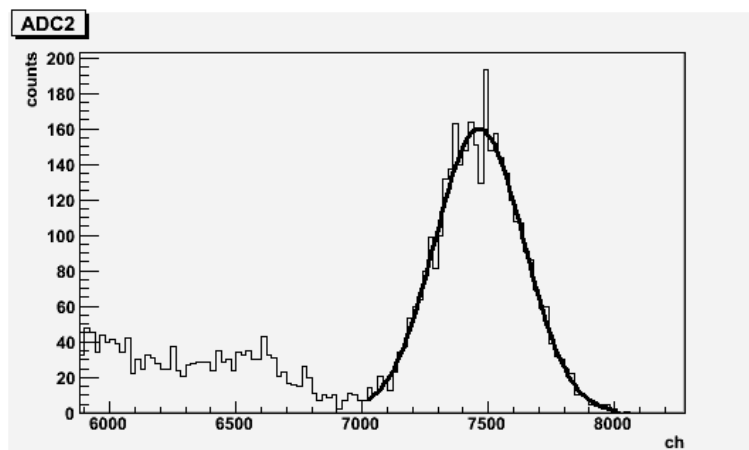


図 14: ADC②の fitting の図

1.33MeV のガウス分布の面積は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_2 \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{2\pi} C_2 \sigma^2 \quad (\text{II.2})$$

であるから, ヒストグラムの bin 幅を b とおくと

$$n = \sqrt{2\pi} \frac{C_2 \sigma_2}{b} \quad (\text{II.3})$$

また Scaller②の値を S_2 とすると実際にデータが記録された時間は $S_2/60[\text{s}]$ であるから, rate は $60\sqrt{2\pi} \frac{C_2 \sigma_2}{S_2 b}$ と表せる.

$$W(\theta) = \frac{C_2 \sigma_2}{S_2 b} \quad (\text{II.4})$$

とおくと, $b = 20[\text{ch}]$ であり, $\theta = 180$ のとき $C_2 = 159.961$, $\sigma_2 = 175.741$, $S_2 = 4744530$ であるから $W(180^\circ) = 2.9627 \times 10^{-4}$ となった.

測定したすべての角度 θ について上の 1 ~ 3 の手順で $W(\theta)$ を求めると次のようになった.

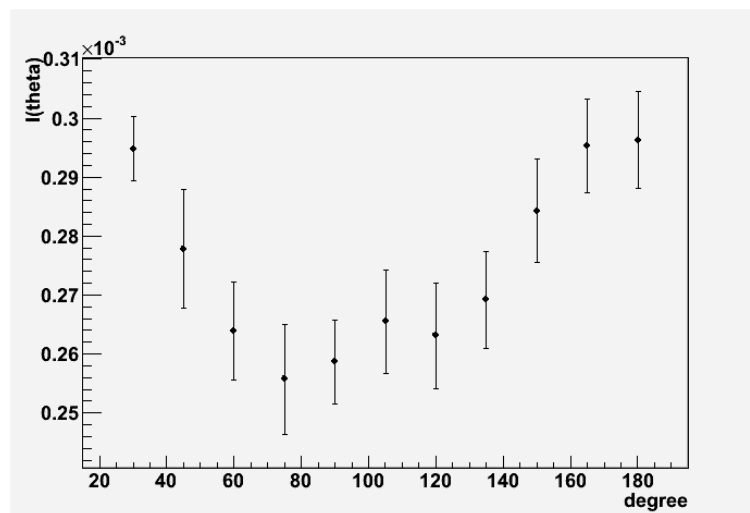


図 15: 角度 θ に対する $W(\theta)$

4.3 誤差の評価

ここでは $W(\theta)$ の誤差について考察する.

・ 誤差伝播

測定した複数の物理量から考えたい物理量を算出する際、直接測定して得られた値の誤差が計算においてどのように伝播して最終結果の誤差に反映されるかを見積もらなければならない。

測定した物理量 (x_1, x_2, \dots, x_n) がそれぞれ誤差 $(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$ を持っているとする. (ただし $|\frac{\delta x_i}{x_i}| \ll 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ とする) この測定量 x_i から計算される物理量 $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ について q の誤差 δq として考えられる最大値は 1 次近似で

$$\delta q_{max} \simeq \left| \frac{\partial q}{\partial x_1} \delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x_2} \delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial q}{\partial x_n} \delta x_n \right| \quad (\text{II.5})$$

δq が上のような値を取るのは、 x_1, x_2, \dots, x_n が全て同時に取りうる最大値 (最小値) として評価されている時である. しかし、 x_1, x_2, \dots, x_n がそれぞれ互いに独立でランダムな誤差を持つ場合は、そのような事が起こる確率は低い. 実際にはそれぞれの誤差が互いに打ち消し合う確率の方が高く、 x_1, x_2, \dots, x_n の測定が独立で測定結果が正規分布に従う時の最もらしい誤差は

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n} \delta x_n \right)^2} \quad (\text{II.6})$$

で与えられる.(参考文献 [5]) 我々は誤差伝播の評価としてこの式を用いた.

角度ごとの coincidence rate を求める際、我々は以下の因子が rate の誤差になるものとして解析を行った.

① 検出器を置く位置のずれによる誤差

実験では adc①は固定していたが、adc②と線源は動かしていたので (本当は線源を始めに固定するべきであった)、両者間の距離にはずれが生じていたと思われる. 線源と検出器の距離がずれてしまうと、adc①、adc②のカウントにずれが生じてしまう. このずれは adc②の 1.33MeV の γ 線の個数を数えることによって得た $I(\theta)$ の誤差に直接影響する. この誤差を見積もるにあたって、線源と adc②を 200mm 離して設置する時に、両者ともに 1mm(用いた定規の目盛) までのずれを許容する. 中心から線源までの距離を $x[\text{mm}]$ 、adc②までの距離を $y[\text{mm}]$ とおくと、

$$x = 0 \pm \delta x, y = 200 \pm \delta y (\delta x = \delta y = 1) \quad (\text{II.7})$$

とおける.

両者間の距離を r [mm] とおくと, 2つの物体を置く作業は互いに独立な事象と見なせるので (II.6) より

$$r = y - x = 200 \pm \delta r$$
$$\delta r = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} = \sqrt{2}$$

したがって, adc②と線源の距離には $\sqrt{2}$ [mm] 程度の誤差が見込まれる.

用いた NaI 結晶で検出される γ 線の rate は距離の 1.68 乗に反比例すると補助実験で示された (付録 A 参照). すると上で求めた距離の変化による $W(\theta)$ の誤差 $\delta W(\theta)_{\text{dist}}$ は相対比で

$$\left| \frac{\delta W(\theta)_{\text{dist}}}{W(\theta)} \right| = \left| 1 - \frac{20 \pm \delta r^{1.68}}{20^{1.68}} \right| \simeq \frac{1.68\sqrt{2}}{200} \quad (\text{II.9})$$

の誤差がある.

②root での fitting の誤差

得られたデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ を (p_1, p_2, \dots, p_k) をパラメーターとする曲線 $y = g(x; p_1, p_2, \dots, p_k)$ で fitting する時, 未知定数 (p_1, p_2, \dots, p_k) について最良推定値を得るには曲線とデータの差の 2 乗和

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - g(x_i))^2}{\sigma_y^2} \quad (\sigma_y \text{ は } y_i \text{ についての標準偏差}) \quad (\text{II.10})$$

を最小にするようにすればよい. つまり連立方程式

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{II.11})$$

を解けばよい. これらの解は一般にデータの関数として

$$p_i = p_i(x_i, y_i) \quad (\text{II.12})$$

と書けるので, fitting したパラメーターには測定量の誤差が伝播してしまう.

我々は adc①, adc②の fitting どちらの場合においても C, μ, σ の誤差を得た. しかし, adc①の fitting をして adc②に制限をかける際, adc①の μ, σ の誤差の範囲内であるという制限条件を変えてみても, adc②の entry 数はほとんど変化しないことを実験的に確認した. (相対比として 0.2 % 程しか違わない) そこで, 我々は adc①の fitting による誤差は無視して解析を行った.

我々は adc② の 1.33MeV のピークをガウス fitting して, 得られた C と σ を掛け合わせて $I(\theta)$ を算出した. その際, C と σ はそれぞれ誤差を持つ. またこれらの値は (II.12) のように実験データの関数として決定されるので C と σ は互いに独立な量と考えられる. よって 4.2 節での fitting による $W(\theta)$ の誤差 $\delta W(\theta)_{\text{fit}}$ は

$$\frac{\delta W(\theta)_{\text{fit}}}{W(\theta)} = \sqrt{\left(\frac{\delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\delta \sigma}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{II.13})$$

となる.

(II.9) と (II.13) の誤差は互いに独立なので, 最終的な $W(\theta)$ の誤差 $\delta W(\theta)$ は

$$\delta W(\theta) = \sqrt{(\delta W_{\text{dist}})^2 + (\delta W_{\text{fit}})^2} \quad (\text{II.14})$$

である.

back ground の評価

back ground を見るために, 線源なしでフォトマル①のみのエネルギースペクトルを全範囲で見ると図 (5) のようになる. (このときは Timing SCA①の lower limit を 0.5 に, upper limit を 10 にした. また universal coincidence を off にして, フォトマル①の信号のみが通るように設定した.)

グラフを見ると, ch の小さい範囲に多くの信号が入っていることがわかる. しかし, 本実験では Timing SCA①にはおよそ 4000 6000ch の範囲で gate がかかっているため, ほとんどの back ground は記録されない. また, フォトマル①とフォトマル②で coincidence も取っているので, 偶然に両方のフォトマルで同時にノイズが発生し, PC に記録される確率も小さいと思われる. 実際, gate をかけて本実験と同じ条件の元 back ground を測定した結果, 全信号の rate は 0.001 個/s 程度であった. 線源がある場合の rate は 0.1 個/s 程であり, back ground は全体の 1/100 程度なので解析ではこの影響を無視した.

5 結論： ^{60}Ni の核スピンを求める

5.1 基底状態のスピンの場合

以上で得られたデータをもとに解析を行った。基底状態を $0+$ に仮定すると可能な遷移は前述の 9 個になる。これらのうちどれが得られたデータに一番合致するかということを考え、その結果によって ^{60}Ni の遷移について考察した。

次に角相関関数は理論でやったようにルジャンドル多項式の 2 次と 4 次で展開される。このことを用いて、得られたデータをこれらの多項式で表したときのそれぞれの係数を求め、それを理論値と比べてどの遷移に一番合致するかを考察した。

一つ目の解析は、具体的には以下のようにした。なお、計算には ROOT を用いた。

1. 得られたデータを ROOT を用いてグラフにプロットする。
2. 基底状態が $0+$ と仮定したとき考えられる遷移の関数を、定数倍をパラメータとし、得られたデータに対し fitting した。

理論で得られたそれぞれの遷移の関数は以下の形をしている。

| 遷移の種類 (初期 中間 終) | 遷移の関数 ($I(\theta)$) |
|-----------------|--|
| 0-1-0 | $1 - \cos^2 \theta$ |
| 1-1-0 | $1 - \frac{1}{3} \cos^2 \theta$ |
| 2-1-0 | $1 + \frac{1}{13} \cos^2 \theta$ |
| 3-1-0 | $1 - \frac{3}{29} \cos^2 \theta$ |
| 0-2-0 | $1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta$ |
| 1-2-0 | $1 - \frac{1}{3} \cos^2 \theta$ |
| 2-2-0 | $1 + \frac{3}{7} \cos^2 \theta$ |
| 3-2-0 | $1 - \frac{1}{29} \cos^2 \theta$ |
| 4-2-0 | $1 + \frac{1}{8} \cos^2 \theta + \frac{1}{24} \cos^4 \theta$ |

表 3: 遷移の種類ごとの相関関数

これらの関数を、定数倍をパラメータとして実験で得たデータに fitting した。

3. Fitting の妥当性を調べるために、それぞれの関数で fitting したものの χ^2 値を調べた。

以下に例として、fitting する際の関数として 0-1-0 遷移のものと 4-2-0 遷移のものを用いた時を比較した。0-1-0 遷移の関数を用いると fitting の様子は以下ようになった。

上の図を見ると分かるように、この関数では明らかにうまく fitting できていないことが分かる。これに対し、4-2-0 の遷移の関数を用いて fitting すると以下ようになった。

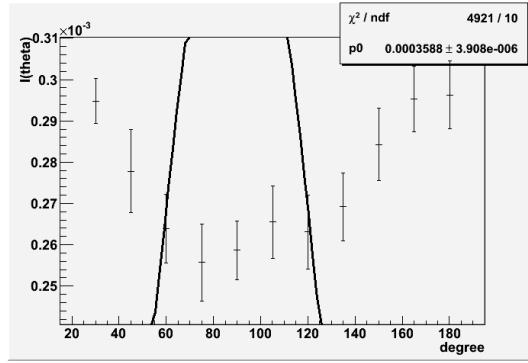


図 16: 0-1-0 遷移の関数を用いた fitting

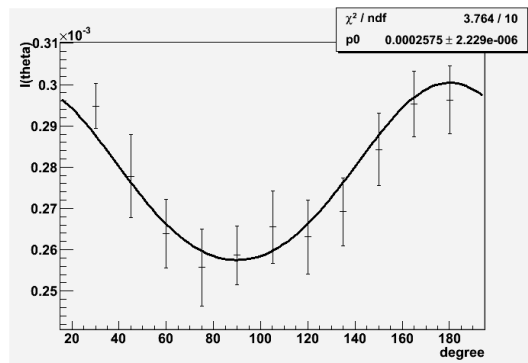


図 17: 4-2-0 遷移の関数を用いた fitting

これらの fitting の妥当性を定量的に調べるため, それぞれの χ^2 値を比べた. その結果は次のようになった.

| 遷移の種類 (初期 中間 終) | 遷移の関数 χ^2 値/ ndf |
|-----------------|-------------------------|
| 0-1-0 | 482.7/10 |
| 1-1-0 | 82.7/10 |
| 2-1-0 | 13.95/10 |
| 3-1-0 | 113.9/10 |
| 0-2-0 | 2047/10 |
| 1-2-0 | 482.7/10 |
| 2-2-0 | 67.26/10 |
| 3-2-0 | 113.9/10 |
| 4-2-0 | 3.704/10 |

表 4: 遷移の種類ごとの χ^2 値

次に、実験により得られたデータをルジャンドル関数の2次と4次の関数を用いて fitting し、その時の係数を求めた。Fitting の関数として、パラメーターを a, b, c を用いて $a + b \times (\text{Legendre 関数の 2 次}) + c \times (\text{Legendre 関数の 4 次})$ を用いた。以下に fitting した図を示した。

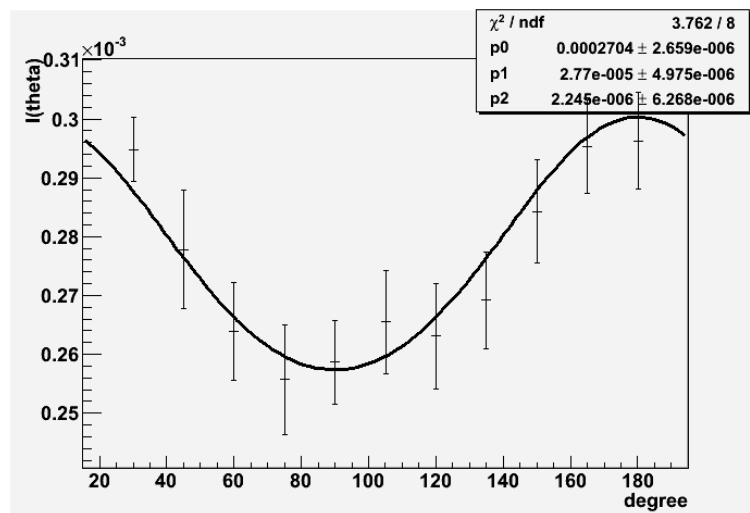


図 18: Legendre 多項式の 4 次までで fitting した図

これよりパラメータの値は以下ようになった。

| | パラメータの値 |
|---|--------------------------|
| a | $0.0002704 \pm 2.659e-6$ |
| b | $2.77e-5 \pm 4.975e-6$ |
| c | $2.245e-6 \pm 6.268e-6$ |

表 5: パラメータの値

これを規格化するとそれぞれの多項式の係数が求められて、結果は以下のようになった。

| | 規格化されたパラメータの値 |
|---|--------------------|
| a | $1.0 \pm 1.39e-4$ |
| b | 0.102 ± 0.0018 |
| c | 0.008 ± 0.0027 |

表 6: 規格化されたパラメータの値

これより実験で得られたデータはルジャンドル多項式で展開すると

$$W(\theta) = 1.0 + 0.1023308282 * P_2(\cos \theta) + 0.008302514 * P_4(\cos \theta) \quad (\text{II.15})$$

となることが分かった。

考察

表 4 によって得られた値を用いてカイ二乗検定を行い,それぞれの遷移の fitting の妥当性を評価することができる.

| 遷移の種類 | fitting の妥当性 (%) |
|-------|------------------|
| 0-1-0 | 0 |
| 1-1-0 | 0 |
| 2-1-0 | 17 |
| 3-1-0 | 0 |
| 0-2-0 | 0 |
| 1-2-0 | 0 |
| 2-2-0 | 0 |
| 3-2-0 | 0 |
| 4-2-0 | 95 |

表 7: それぞれの遷移の χ^2 検定の結果

表 7 によると,4-2-0 遷移の関数で fitting したさいの妥当性は 95 % であり,これは他の値に比べて有意に大きいと考えられる. よって ^{60}Ni の核スピン状態は 4-2-0 であると考えられる.

次に角相関関数をルジャンドル多項式で表したときのそれぞれの係数について考察する. 以下にそれぞれの遷移を Legendere 多項式の 2 次と 4 次で表わした時の,それぞれの係数を示した.

| 遷移の種類 | 2 次の係数 | 4 次の係数 |
|-------|---------|--------|
| 0-1-0 | 0.5 | 0.0 |
| 1-1-0 | -0.25 | 0.0 |
| 2-1-0 | 0.05 | 0.0 |
| 3-1-0 | 0.071 | 0.0 |
| 0-2-0 | 0.357 | 0.35 |
| 1-2-0 | -0.25 | 0.0 |
| 2-2-0 | 0.25 | 0.0 |
| 3-2-0 | 0.07103 | 0.0 |
| 4-2-0 | 0.102 | 0.009 |

表 8: それぞれの遷移を Legendre 関数で展開した際の係数の理論値

また, 実験で得られたデータを Legendre 多項式の 2 次と 4 次のものを用いて fitting した結果は以下ようになった.

| | 規格化されたパラメータの値 |
|---|--------------------|
| a | $1.0 \pm 1.39e-4$ |
| b | 0.102 ± 0.0018 |
| c | 0.008 ± 0.0027 |

表 9: 規格化されたパラメータの値

これらの表によると, 実験データから得られた Legendre 多項式の 2 次の係数は 4-2-0 遷移のものと考えられる. 4 次の係数は誤差が大きくなってしまいうため評価できない. そのため 2 次の係数だけみることにすれば, 4-2-0 遷移のものがもっとも確からしいといえることができる.

これにくわえて, 同じ実験を 180° から 330° で行なった. 得られた実験のデータは以下のようなものである.

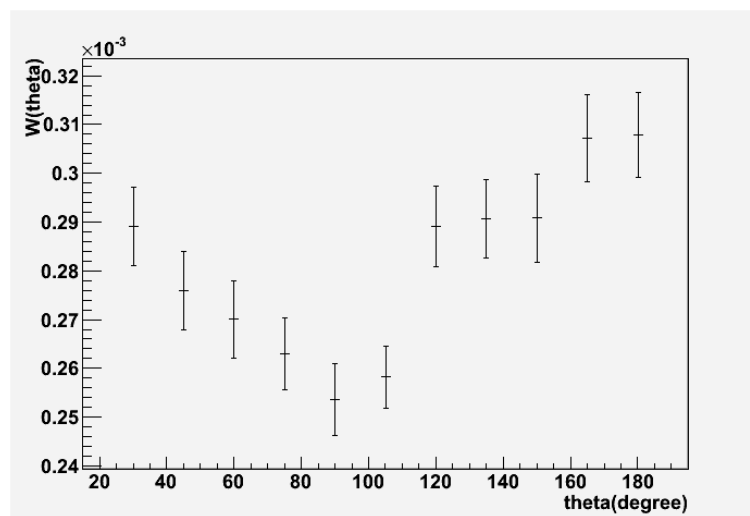


図 19: 180° から 330° までの実験値

このデータを先ほどと同じような解析をして fitting の妥当性を評価した.

| 遷移の種類 | fitting の妥当性 (%) |
|-------|------------------|
| 0-1-0 | 0 |
| 1-1-0 | 0 |
| 2-1-0 | 3 |
| 3-1-0 | 0 |
| 0-2-0 | 0 |
| 1-2-0 | 0 |
| 2-2-0 | 0 |
| 3-2-0 | 0 |
| 4-2-0 | 44 |

表 10: それぞれの遷移の χ^2 検定の結果

この結果によると全体として fitting の妥当性の値は下がっているが, 前の解析結果と同じように 4-2-0 遷移の値が有意に大きいことはいえる. よって前の結果と合わせて, どちらの解析でも棄却されなかったこの遷移が正しいものであると考えられる.

以上より, ^{60}Ni の核スピン状態は 4-2-0 であると考えられる.

5.2 基底状態のスピンが0でない場合

5.1節では ^{60}Ni の基底状態のスピンを0として解析を進めたが,(I.66),(I.98)では0以外の一般の場合でも角度相関関数を計算出来る.そこで以下では基底状態のスピンが0以外の場合について実験データを解析してみた.

前と同様に,光子が3以上の角運動量を持ち去るような遷移は起こらないと仮定すると,考えるべき ^{60}Ni のスピン状態は表3で挙げられたスピン状態をそれぞれプラス方向に平行移動したものを考えればよい.中間状態の角運動量を J に統一すると,例えば2-1-0は平行移動で $J+1, J, J-1$ となる.それぞれのタイプの角度相関関数はDonald R.Hamiltonの論文(参考文献[7])によると表11のようになる.

| 種類 | 相関関数 |
|-------|--|
| 0-1-0 | $W(\theta) = 1 + \frac{(J+1)(2J+3)}{(26J^2-15J-1)} \cos^2 \theta$ |
| 1-1-0 | $W(\theta) = 1 - \frac{2J+3}{14J+1} \cos^2 \theta$ |
| 2-1-0 | $W(\theta) = 1 + \frac{1}{13} \cos^2 \theta$ |
| 3-1-0 | $W(\theta) = 1 - \frac{3}{29} \cos^2 \theta$ |
| 0-2-0 | $W(\theta) = 1 + \frac{(J+1)(2J+3)(2J^2-9J+1)}{(2J-1)(16J^3-42J^2+29J+3)} \cos^2 \theta + \frac{(J+1)(2J+3)(J+2)(2J+5)}{3(2J-1)(16J^3-42J^2+29J+3)} \cos^4 \theta$ |
| 1-2-0 | $W(\theta) = 1 - \frac{3(J+1)(2J+3)}{(58J^2-23J+3)} \cos^2 \theta$ |
| 2-2-0 | $W(\theta) = 1 + \frac{3(2J+3)}{26J-3} \cos^2 \theta$ |
| 3-2-0 | $W(\theta) = 1 - \frac{3}{29} \cos^2 \theta$ |
| 4-2-0 | $W(\theta) = 1 + \frac{1}{8} \cos^2 \theta + \frac{1}{24} \cos^4 \theta$ |

表 11: 一般の場合の角度相関関数

上の表で 2-1-0, 3-1-0, 3-2-0, 4-2-0 のものは中間状態の角運動量によらず相関関数は一定になっているが, それについての証明は付録 C を参照.
この関数を用いて中間状態の角運動量 J , 定数倍因子をパラメーターとして実験データを fitting すると表 12 のようになる.

| 種類 | J | χ^2/ndf |
|-------|---|---------------------|
| 0-1-0 | $3.61338 \pm 9.00491 \times 10^{-1}$ | 3.891/9 |
| 1-1-0 | $3.88770 \times 10^9 \pm 1.41421$ | 154.4/9 |
| 0-2-0 | $6.83697 \times 10^{-1} \pm 4.69753 \times 10^{-3}$ | 9261/9 |
| 1-2-0 | $5.92663 \times 10^9 \pm 1.41421$ | 113.9/9 |
| 2-2-0 | $3.55210 \times 10^8 \pm 1.41421$ | 8.498/9 |

表 12: fitting の結果

表より 0-1-0 タイプで中間状態の角運動量が 4 付近で fitting がよくなることがわかる. 角相関関数を具体的に求めると

$$2-3-2 \text{ の場合は } W(\theta) = 1 + \frac{9}{47} \cos^2 \theta$$
$$3-4-3 \text{ の場合は } W(\theta) = 1 + \frac{11}{71} \cos^2 \theta$$

であり, これらを用いて実験データを fitting し直すと, χ^2/ndf はそれぞれ $\frac{4.632}{10}$, $\frac{4.034}{10}$ となり, 4-2-0 の場合の χ^2/ndf は $\frac{3.764}{10}$ であった. したがって基底状態の制限をなくすと, ^{60}Ni のスピン状態が 2-3-2 あるいは 3-4-3 であるという仮定を有為に棄却することは出来ない.

しかし, ^{60}Ni の基底状態のスピンは核磁気分光の実験から 0 であることが確認されているので, 結局これらの仮定を棄却できる. このように, 原子核のスピン状態を完全に求めるには複数の実験結果を用いなければならないことがわかった.

付録 A 補助実験

用いた検出器の rate が線源とフォトマルの距離の関数としてどのように表されるかを調べるために、距離を変化させながら γ 線の count 数を計測した。

実験装置

実験装置は本実験と同じものを用いた。また、各モジュールの設定も本実験と同様にした。

実験方法

1. フォトマル①とフォトマル②の角度を 180° にする。
2. 線源とフォトマル①, フォトマル②の距離を 180mm から 320mm まで 20mm 間隔で測定を行った。(270mm も測定を行った。) 距離を設定するにあたって、線源に近い位置に検出器を置くと結晶の有限の立体角が無視できなくなるので、200mm 付近から測定を行った。ここで距離ごとの計測 rate を調べるためには coincidence rate でなく, scaller⑧の個数を計測するだけで十分である。scaller⑧の計測数が 40 万個以上たまり、統計誤差が十分に小さくなった時点で計測を終了した。

実験結果

図(19)に横軸を距離 [mm], 縦軸をフォトマル②の rate [個/s] つまり scaller⑧/scaller① $\times 60$ をプロットしたグラフを示す。

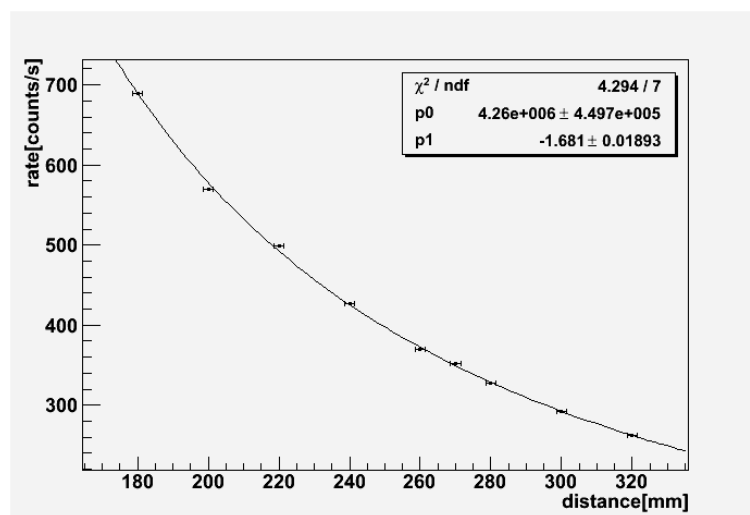


図 20: 距離ごとの rate

このグラフを $y = p_0 \times x^{p_1}$ の形で fitting すると

$$p_0 = 4.26038 \times 10^6 \pm 4.49660 \times 10^5$$

$$p_1 = -1.68076 \pm 4.49660 \times 10^{-2}$$

となった。したがって、 γ 線の検出 rate はおよそ距離の 1.68 乗に反比例することが分かった。

付録B シェルモデル

今回の実験では線源の始状態, 中間状態, 終状態の角運動量は直接測定することができない. したがって, γ 線の角度相関から線源の角運動量が予想できなければならないが, 特定の角運動量の始状態, 中間状態, 終状態の場合には γ 線の角度相関が同一のものとなってしまう, 区別できない. そこで, 終状態の角運動量をゼロと仮定することにした. 終状態の角運動量がゼロであることはシェルモデルを用いて, 示すことができる. ただし, シェルモデル自体も原子核の状態を記述するモデルに過ぎず, 完全に原子核の状態が分かるわけではない.

シェルモデルでは, 原子核の状態を, 核子の集団が形成する平均的な力の場の中で, 各核子が独立に運動すると仮定するモデルである. シェルモデルを用いると原子核の結合エネルギーが魔法数 (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) に一致すると突然大きくなることが説明できる. 以下で, シェルモデルの概要について簡単に説明する.

シェルモデルでは, 中性子と陽子は球対称の中心力場の中で運動しており, 同時に, 強いスピン-軌道力が働いているとする. 中心力場の方は, 1つの核子に対する他の $A - 1$ 個の核子からの核力の時間的平均と解釈できる. (A は核子の数) 一方, スピン-軌道力は $A - 1$ 個の核子の磁場と着目する核子の磁気モーメントの相互作用と解釈することはできない. なぜなら, 魔法数を説明するためには, このような磁気的原因によるものよりはるかに強いスピン-軌道力の存在が必要だからである. 実際には, このスピン-軌道力は2核子の間に働くテンソル力のある種の時間平均として解釈できるが, ここでは詳しく説明しない.

中心力とスピン-軌道力を仮定すると, 核子に対する Schrödinger 方程式は,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(r) - \frac{\kappa}{(Mc)^2} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}) \right\} \phi = E\phi \quad (\text{B.1})$$

と書ける. ここで, M は核子の質量, c は光速, \mathbf{s} はスピン角運動量ベクトル, \mathbf{l} は軌道角運動量ベクトル, κ は無次元の未定定数 (実験に合うように決める), E は軌道運動のエネルギー固有値である. 式 (B.1) の左辺の第1項は運動エネルギー, 第2項は中心力ポテンシャル, 第3項はスピン-軌道力ポテンシャルを表わしている. 陽子の場合には $U(r)$ にクーロンポテンシャルが含まれる.

図21の (a), (b) に, スピン-軌道力を無視して ($\kappa = 0$), $U(r)$ に調和振動子ポテンシャル $\frac{1}{2}M\omega^2 r^2$, 無限に深い井戸型ポテンシャルを仮定したときのエネルギー準位を示している. また, この図21の (a), (b) の内挿によって, 実際に近い, 滑らかな有限の深さのポテンシャルの準位を図21の (c) に示した. 図21の s, p, d, f, \dots は, 軌道角運動量量子数 $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ を表わし, 主量子数 $n = 1, 2, 3, \dots$ は $n - 1$ が動径波動関数のゼロ点の数に合うように定義している. たとえば, 調和振動子ポテンシャルの場合には, エネルギー準位は $E = \hbar\omega(n' + \frac{1}{2})$, $n' = 2(n - 1) + l$ で与えられる. 図21の (a) の左側の数値が n' を示している.

いま, 上記のような準位を中性子, 陽子それぞれについて考え, パウリの排他原理にしたがって, 下の準位から順に中性子 (or 陽子) を詰めていくと, 閉殻構造に対応

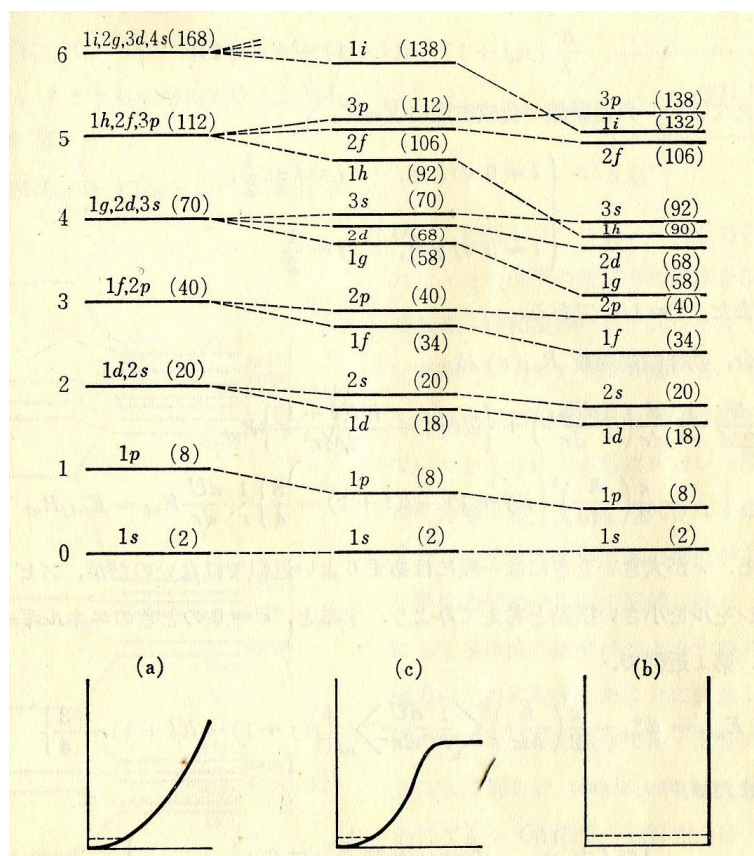


図 21: ポテンシャルの形とその時のエネルギー準位

する粒子数は図 21 にカッコをつけて記入した数字の示すようになる。たとえば,(a)の場合,2, 8, 20, 40, 70, 112, 168 となり,20 より大きい魔法数は出てこない。(b),(c)の場合も同様で,中心力だけを考えていたのでは魔法数は説明できない。

次に,式 (B.1) で $\kappa = 0$ として,スピン-軌道力の効果を調べる。1 核子の合成角運動量を

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad (\text{B.2})$$

とおくと,両辺を 2 乗して,

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}) = \frac{1}{2}(\mathbf{j}^2 - \mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2). \quad (\text{B.3})$$

したがって,式 (B.1) のハミルトニアンは j^2, j_z, l^2 と交換可能であるので,式 (B.1) の波動関数 ϕ は量子数として合成角運動量 j , 軌道角運動量 l , 合成角運動量の z 成分 m , および主量子数 n を持つはずである。すなわち,

$$\phi_{nljm}(\mathbf{r}, \zeta) = R_{nl}(r) \mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m(\theta, \varphi, \zeta) \quad (\text{B.4})$$

とかける。ここで, ζ はスピン変数, $\mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m$ は j^2, j_z, l^2 の共通の固有関数であるが,その具体的な表式はいまのところ必要ない。また, $\mathcal{Y}_{jl\frac{1}{2}}^m$ も動径波動関数 $R_{nl}(r)$ もそれぞれ規格化されているとする。

$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{l})$ は固有関数 ϕ_{nljm} に作用するときには

$$\frac{\hbar^2}{2} \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \quad (\text{B.5})$$

で置き換えてよい。角運動量の合成法則によって

$$\begin{cases} l \neq 0 \text{ のとき} & , j = l \pm \frac{1}{2}, \\ l = 0 \text{ のとき} & , j = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

である。また, $s = \frac{1}{2}$ である。

その場合,動径波動関数 $R_{nl}(r)$ は

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{nl}}{dr} \right) + \left\{ U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} \right\} R_{nl} \\ - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} R_{nl} = E_{nlj} R_{nl} \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

を満足する。 κ が大きいときには一般にあまり良い近似ではないのだが,スピン-軌道力ポテンシャルを小さい摂動と考える。すると, $\kappa = 0$ のときのエネルギーを E_{nl}^0 とおいて,第 1 次近似で,

$$E_{nlj} = E_{nl}^0 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{nl} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \quad (\text{B.7})$$

を得る. または,

$$\left. \begin{array}{l} j = l + \frac{1}{2} \text{ のとき} , \quad E_{nl, l + \frac{1}{2}} = E_{nl}^0 - \alpha_{nl} l \\ j = l - \frac{1}{2} \text{ のとき} , \quad E_{nl, l - \frac{1}{2}} = E_{nl}^0 + \alpha_{nl} (l + 1) \end{array} \right\} \quad (\text{B.8})$$

$$\alpha_{nl} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{nl} . \quad (\text{B.9})$$

ここで,

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{nl} = \int_0^\infty R_{nl}^* \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} R_{nl} r^2 dr \quad (\text{B.10})$$

したがって, 準位はスピン-軌道力のために 2 本に分離し, $\alpha > 0$ の場合には図 22 のようになる. 分離した 2 本の準位の縮退度 $(2j + 1)$ はそれぞれ $2l + 2, 2l$ に等しい.

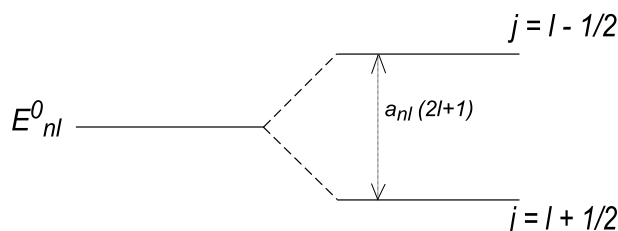


図 22: スピン-軌道力による準位の分離

式 (B.8) は摂動論で求めたものであるが, $U = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$ という調和振動子ポテンシャルのときは, $\frac{1}{r} \frac{dU}{dr}$ が定数になるので厳密解に一致する. 式 (B.8) から $\alpha > 0$ の場合には $j = l + 1/2$ の準位が $j = l - 1/2$ の準位より下にきて, 両者の間隔は $2l + 1$ に比例し, l とともに増加することが分かる.(図 22)

図 23 は, 図 21 の (c) にあたる $U(r)$ を選んで, スピン-軌道力を考慮に入れたときの準位の並び方の順序を示したものである. 調和振動子のポテンシャルでは縮退していた準位が (c) では分離して, l の大きいものほど下にくるような準位の組分けができていたところに, さらにスピン-軌道力のための分離によって, l の大きな 1 準位から生じた $j = l \pm 1/2$ の 2 本の準位が上下の 2 つの準位の組に分かれて配属される. このようにして, 全準位の組分けの様子がスピン-軌道力のために変化する. 図 23 の中のカッコの中の数字が示すように, このように正しい魔法数が自然に現われてくる (各準位の収容能力は $2j + 1$ で与えられ, 下に準位からの収容能力を準にたしあげた数をカッコの中に示している).

ここまでの議論はかなり定性的なものであるから, そこからはっきり結論できることは, どのような収容能力の準位の群れができるかということであって, 1 つ 1 つの群れの中での個々の準位の上下の順序については一意的な断定はできない.

原子核のスピン

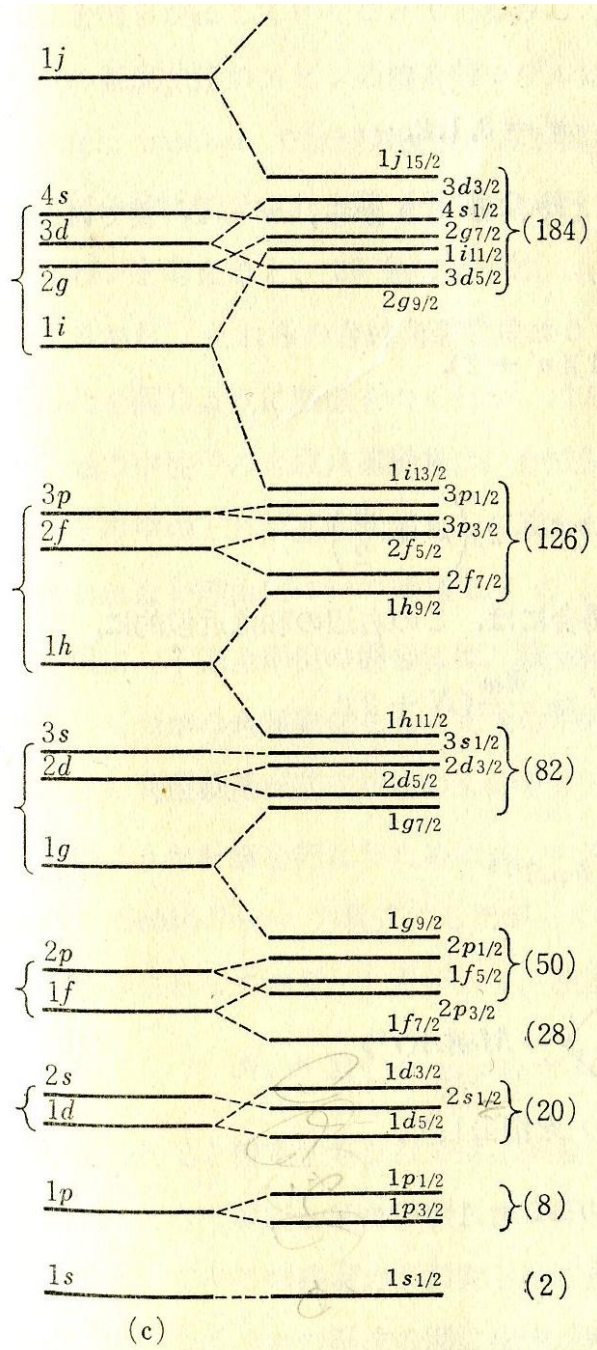


図 23: (c) のポテンシャルにスピン-軌道力を加えた時の準位

シェルモデルは魔法数をみごとに説明した。魔法数では閉殻配置のみが問題となったが、今回の ${}^{60}_{28}\text{Ni}$ のスピンの問題では、もっと一般的な、部分的に満たされた殻（不完全殻）の配置を考えなければならない。閉殻配置の場合、スピンはある準位までを完全に埋めるので、合成角運動量はゼロになる。一方、不完全殻の場合は、はんな核子の合成角運動量はどれが基底状態かわからない。

一般に、不完全準位の場合には、核全体のエネルギー準位として、合成法則から予想されるいくつかの角運動量を持ったものが可能になるので、それらの準位の配列の順序を求め、どの角運動量が基底状態をして現われるかを決定しなければならない。

そのような計算を行うためには、今まで考えてきたように、核子が式 (B.1) という Schrödinger 方程式にしたがって、平均的なポテンシャル場の中をまったく独立に動きまわっており、したがって、核全体のハミルトニアンが

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_i + U(r_i) - \frac{\kappa}{(Mc)^2} \frac{1}{r_i} \frac{dU}{dr_i} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{l}_i) \right\} \quad (\text{B.11})$$

で与えられると仮定するだけでは不十分である。核子の間には、平均的なポテンシャルとしては表わせない残りの2体相互作用（残留力, residual force）があって、この残留力が摂動として作用するために、不完全準位にともなって現われる核全体のいくつかの準位の間での縮退が解け、その結果として、ある特定の角運動量状態が基底状態となって実現されると考えなければならない。

2つの核子, i, j の間に働く残留ポテンシャルを $V_{\text{res}}(i, j)$ と書くと、核のハミルトニアンは式 (B.11) ではなくて、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j' V_{\text{res}}(i, j) \quad (\text{B.11}')$$

であると考えねばならない。

ここでは、第0次近似の \mathcal{H}_0 で与えられる素朴なシェルモデルを不完全殻の場合にも応用できるように精密化する目的で、現象論的に残留力を導入した。しかしながら、残留力を考慮に入れた式 (B.11') の \mathcal{H} は核の正しいハミルトニアンと考えてはいけぬ。なぜならば、シェルモデル、または独立粒子モデルの立場からみると、残留力の効果は小さい摂動として扱えるものでなければならないが、本当の核力ポテンシャルは、強い引力部分を持つだけでなく、核子の距離が十分に小さくなると無限大の高さをもつような斥力 core の部分をも持っているため、このような核力ポテンシャルは常に小さい摂動としては扱えないからである。

したがって、式 (B.11') の \mathcal{H} は核の正しいハミルトニアンではなく、その1つの近似になっているだろう。正しいハミルトニアンは

$$H = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \right) \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j' V(i, j) \quad (\text{B.12})$$

とかける. $V(i, j)$ は核子同士の散乱の実験などから決まる核力ポテンシャルである. ここで, 式 (B.12) の正しいハミルトニアンと比べるために, 式 (B.11') の近似的なハミルトニアン \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \right) \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_i' \sum_j V_{\text{eff}}(i, j) \quad (\text{B.13})$$

と書いてみよう. $V_{\text{eff}}(i, j)$ は核子 i, j の間に仮定されるある有効相互作用ポテンシャル (effective interaction potential) である. すると, $V_{\text{res}}(i, j)$ と $V_{\text{eff}}(i, j)$ の間の関係は, 式 (B.11), 式 (B.11'), 式 (B.13) から,

$$\frac{1}{2} \sum_i' \sum_j V_{\text{res}}(i, j) = \frac{1}{2} \sum_i' \sum_j V_{\text{eff}}(i, j) - \sum_i \left\{ U(r_i) - \frac{\kappa}{(Mc)^2} \frac{1}{r_i} \frac{dU}{dr_i} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{l}_i) \right\} \quad (\text{B.14})$$

で与えられる.

シェルモデル, すなわち, 式 (B.13) または式 (B.11') のハミルトニアン \mathcal{H} によって核を記述しようとするモデルは, 式 (B.12) の正しいハミルトニアン H のどのような近似になっているかは難しいので, ここでは議論しない. 大まかに言うと, 核の低エネルギー現象についての多くの問題は式 (B.13) のハミルトニアン \mathcal{H} から出発して摂動論を用いて議論できるが, 原子核の結合エネルギーの絶対値の計算とか, 高エネルギー現象についての議論など, 核子間の短距離の相関が本質的に重要な役割を演じるような問題は, シェルモデルで摂動論的に扱うことはできず, 本来の正しいハミルトニアン H に戻って取り扱わねばならない.

本題に戻って, 式 (B.11') のハミルトニアン \mathcal{H} に基づいて核のスピンを計算する問題を考える. いま (n, l, j) の準位に ν 個の中性子が入っているとす. $\nu < 2j + 1$ であれば不完全準位である. この場合, ν 個の中性子の合成角運動量が J で, 合成角運動量の z 成分の量子数が M の波動関数を $\Phi_{nljJM}^{(\nu)}$ とおくと, 摂動

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} \sum_i' \sum_j V_{\text{res}}(i, j) \quad (\text{B.15})$$

の効果を第 1 次近似まで考慮に入れたときの状態のエネルギー $W_{nljJ}^{(\nu)}$ は

$$W_{nljJ}^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{\nu} E_{nlj} + \langle \Phi_{nljJM}^{(\nu)} | \mathcal{H}' | \Phi_{nljJM}^{(\nu)} \rangle \quad (\text{B.16})$$

と $\Phi_{nljJM}^{(\nu)}$ でつくった \mathcal{H}' の期待値から計算できる.

計算を簡単にするために, 残留力ポテンシャルに

$$V_{\text{res}}(i, j) = V_{\text{res}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -q\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (q > 0) \quad (\text{B.17})$$

と, 作用半径 0 の δ 関数的 な引力を仮定してみる. q は [エネルギー] \times [体積] の次元をもった定数である. すると, 基底状態の角運動量は,

$\nu =$ 偶数のときは $J = 0$ で, このとき,

$$\langle \Phi_{nljJM}^{(\nu)} | \mathcal{H}' | \Phi_{nljJM}^{(\nu)} \rangle = -\frac{\nu}{2}(2j+1)I_{nl}, \quad (\text{B.18})$$

$\nu =$ 奇数のときは $J = j$ で, このとき,

$$\langle \Phi_{nljJM}^{(\nu)} | \mathcal{H}' | \Phi_{nljJM}^{(\nu)} \rangle = -\frac{\nu-1}{2}(2j+1)I_{nl}, \quad (\text{B.19})$$

$$I_{nl} = \frac{q}{3\pi} \int_0^{+\infty} R_{nl}^4 r^2 dr \quad (\text{B.20})$$

となる.

このことから, (n, l, j) 準位に 1 種類の核子が詰まっていくときには, 基底状態では, その 2 個ずつが合成角運動量を 0 にするように結合していく. このような結合が一番安定になるのは, 直感的には, 角運動量ベクトルがちょうど逆向きになると軌道関数の重なりが一番大きくなり, 引力ポテンシャルが一番低くなるためである.

pair あたりの結合エネルギーは $(2j+1)I_{nl}$ である. したがって, ν が偶数だと式 (B.18) のように全結合エネルギーは $(\nu/2)(2j+1)I_{nl}$ となり, 合成角運動量 J は 0 になる. ν が奇数だとその中の $\nu-1$ 個が全く同じ様式で結合し, はんばに残った 1 核子は結合エネルギーを持たずに残る. 全角運動量はこのはんばな 1 核子の角運動量 j に一致する. (これが式 (B.19) の内容である.) $(2j+1)I_{nl}$ を pairing energy と呼ぶ.

このようにシェルモデルによると, 今回の ${}^{60}_{28}\text{Ni}$ ような偶偶核 (中の陽子と中性子がどちらも偶数の原子核) の場合, スピンは必ず 0 になる. また, 実験からも偶偶核のスピンは常に例がなしに 0 になることが分かっている. よって, 今回の実験では ${}^{60}_{28}\text{Ni}$ の角運動量は 0 と仮定する.

偶偶核以外の場合については, 今回の実験に影響しないので, ここでは言及しない.

付録 C 特定の場合に角相関関数が一致すること

角相関関数

$$W(J_A \rightarrow J_B \rightarrow J_C, L_1, L_2; \theta) = \sum_l A_l P_l(\theta) \quad (\text{C.1})$$

(ただし $A_0 = 1$ となるよう規格化)

が $J_A > J_B > J_C$ で $L_1 = J_A - J_B, L_2 = J_B - J_C$ をみたまつ場合に, $W(\theta)$ が中間状態の値 J_B によらず L_1, L_2 のみに依ることを示す. ルジャンドル多項式による展開係数 A_l について示せばよい.

式 (I.101) より, 規格化された式は

$$A_l = \frac{F_l(L_1 J_A J_B) F_l(L_2 J_C J_B)}{F_0(L_1 J_A J_B) F_0(L_2 J_C J_B)} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} F_l(L_1 J_A J_B) &\sim (-1)^{L_1-1} (2L_1 + 1) \langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | l 0 \rangle W(J_B J_A l L_1, L_1 J_B) \\ &= (-1)^{L_1-1} (2L_1 + 1) \langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | l 0 \rangle (-1)^{J_A+J_B+l+L_1} \begin{Bmatrix} J_B & J_A & L_1 \\ L_1 & l & J_B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

を用いると

$$\frac{F_l(L_1 J_A J_B)}{F_0(L_1 J_A J_B)} = (-1)^l \frac{\langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | l 0 \rangle}{\langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | 0 0 \rangle} \frac{\begin{Bmatrix} J_B & J_A & L_1 \\ L_1 & l & J_B \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} J_B & J_A & L_1 \\ L_1 & 0 & J_B \end{Bmatrix}} \quad (\text{C.4})$$

よって

$$A_l = \frac{\langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | l 0 \rangle \langle L_2 \ 1 \ L_2 - 1 | l 0 \rangle}{\langle L_1 \ 1 \ L_1 - 1 | 0 0 \rangle \langle L_2 \ 1 \ L_2 - 1 | 0 0 \rangle} \frac{\begin{Bmatrix} J_B & J_A & L_1 \\ L_1 & l & J_B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_B & J_C & L_2 \\ L_2 & l & J_B \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} J_B & J_A & L_1 \\ L_1 & 0 & J_B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_B & J_C & L_2 \\ L_2 & 0 & J_B \end{Bmatrix}} \quad (\text{C.5})$$

$J_B = J$ と書くことにすると

$$\tilde{A}_l := \frac{\begin{Bmatrix} J & J + L_1 & L_1 \\ L_1 & l & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J - L_2 & L_2 \\ L_2 & l & J \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} J & J + L_1 & L_1 \\ L_1 & 0 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J - L_2 & L_2 \\ L_2 & 0 & J \end{Bmatrix}} \quad (\text{C.6})$$

が J によらないことを言えばよい。

ラカーの簡約公式を用いると、

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} J & J+L_1 & L_1 \\ L_1 & l & J \end{array} \right\} \\ &= [\Delta(L_1 L_1 l) \Delta(J J l) \{\Delta(L_1 J J + L_1)\}^2]^{1/2} \\ & \quad \times \sum_t \frac{(-1)^t (t+1)!}{\left[\begin{array}{c} (t-2L_1-l)! \{(t-2J-2L_1)!\}^2 (t-2J-l)! \\ \times (2J+2L_1-t)! \{(2J+2L_1+l-t)!\}^2 \end{array} \right]} \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$= \frac{(2J)!(2L_1)!}{[(2J+l+1)!(2J-l)!(2L_1+l+1)!(2L_1-l)!]^{1/2}} \quad (C.8)$$

ここで、 t についての和に寄与するのは $t = 2J + 2L_1$ のときのみであることに注意した。

同様にして、和に寄与するのが $t = 2J + l$ のときのみであることに注意すると、

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J & J-L_2 & L_2 \\ L_2 & l & J \end{array} \right\} = \frac{(-1)^l (2L_2)!}{(2J+1)!} \left[\frac{(2J+l+1)!(2J-l)!}{(2L_2+l+1)!(2L_2-l)!} \right]^{1/2} \quad (C.9)$$

となる。

よって

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} J & J+L_1 & L_1 \\ L_1 & l & J \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} J & J-L_2 & L_2 \\ L_2 & l & J \end{array} \right\} \\ &= \frac{(-1)^l (2L_1)!(2L_2)!}{(2J+1)[(2L_1+l+1)!(2L_1-l)!(2L_2+l+1)!(2L_2-l)!]^{1/2}} \end{aligned} \quad (C.10)$$

より

$$\tilde{A}_l = (-1)^l \left[\frac{(2L_1+1)!(2L_1)!}{(2L_1+l+1)!(2L_1-l)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(2L_2+1)!(2L_2)!}{(2L_2+l+1)!(2L_2-l)!} \right]^{1/2} \quad (C.11)$$

以上より A_l は J の値にはよらず、角相関関数 $W(J+L_1 \rightarrow J \rightarrow J-L_2, L_1, L_2; \theta)$ は L_1 と L_2 のみに依存することがわかった。

ラカーの簡約公式

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array} \right\} \\
 &= [\Delta(j_1 j_2 j_3) \Delta(j_1 J_2 J_3) \Delta(J_1 j_2 J_3) \Delta(J_1 J_2 j_3)]^{1/2} \\
 & \quad \times \sum_t \frac{(-1)^t (t+1)!}{\left[\begin{array}{l} (t-j_1-j_2-j_3)!(t-j_1-J_2-J_3)!(t-J_1-j_2-J_3)!(t-J_1-J_2-j_3)! \\ \times (j_1+j_2+J_1+J_2-t)!(j_2+j_3+J_2+J_3-t)!(j_3+j_1+J_3+J_1-t)! \end{array} \right]}
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

ただし,

$$\Delta(abc) := \frac{(a+b-c)!(b+c-a)!(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!} \tag{C.13}$$

t についての和は, 階乗がすべて意味をもつ値となるような t の整数値についてとるものとする.

謝辞

最後にこの課題演習に際して、夜遅くまで実験や解析の方法を的確に指導して下さいました村上哲也先生、鋭い議論で我々をしばれさせて下さった菅沼秀夫先生、先輩の立場から沢山のアドバイスをして下さった TA の野沢勇樹さんに感謝します。また、解析に多大なる貢献をしてくれた 3 回生の藤林翔さん、A5 部屋に遊びに来てくれた皆さん、心を和ませてくれた菅沼ごろにゃんにも感謝します。

参考文献

- [1] 猪木慶治, 川合光: “量子力学 I,II”, 講談社サイエンティフィック (1994)
- [2] A. メシア, 小出昭一郎 訳: “量子力学 2”, 東京図書 (1972)
- [3] R.R. ロイ, B.P. ニガム, 西川哲治 訳: “原子核物理学”, 紀伊国屋書店 (1972)
- [4] John M.Blatt, Victor F.Weisskopf: “Theoretical Nuclear Physics”
Dover(1991)
- [5] John R.Taylor, 林茂雄, 馬場涼 訳: “計測における誤差解析入門”, 東京化学同人 (2000)
- [6] Nicholas Tsoufanidis, 阪井英次 訳: “放射線計測の理論と演習 上, 下” 現代工学社 (2000)
- [7] Donald R.Hamilton: *Phys.Rev.*, **58**, 122
- [8] E.L.Brady, M.Deutsch: *Phys.Rev.*, **78**, 558
- [9] 野上茂吉郎: “原子核”, 裳華房 (1973)