

同種粒子及び異種粒子同士の散乱に関する実験についての レポート

笠井純、加茂直之、須田武憲、土居孝寛、中村祥吾

平成 22 年 9 月 30 日

目次

1	Introduction	3
2	理論	3
2.1	同種粒子	3
2.1.1	フェルミオンとボソン	3
2.1.2	複合粒子の統計性	4
2.1.3	スピンと統計性	4
2.2	微分断面積の定義	5
2.3	クーロン散乱	6
2.4	部分波展開	8
2.5	ラザフォード散乱の公式の導出	9
2.6	スピンのない同種 2 粒子のクーロン散乱	10
2.7	スピンを持つ同種 2 粒子のクーロン散乱	12
2.8	Blair 散乱	13
3	実験	15
3.1	実験装置の説明	15
3.2	ターゲット作成	16
3.2.1	炭素膜掬い	16
3.2.2	厚さ測定	17
3.3	本実験	19
3.3.1	準備	19
3.3.2	測定	23
4	実験結果	24
4.1	炭素膜	24
4.2	検出器に入る散乱粒子の立体角	24
4.3	本実験	24

5	データの取り扱い	31
5.1	実験室系と重心系	31
5.1.1	実験室系	31
5.1.2	実験室系と重心系	32
5.2	ターゲットの厚さ	34
5.2.1	準備	34
5.2.2	計算	35
5.3	入射ビームの荷電数	36
5.4	微分断面積	37
5.5	実験値の誤差の求め方	38
5.5.1	誤差の伝播	38
5.5.2	炭素膜の誤差計算	38
5.5.3	微分断面積の誤差	39
6	データ解析・考察	40
6.1	$^{12}\text{C}-^{13}\text{C}$ 8.0MeV	40
6.1.1	ROOT による解析	40
6.1.2	ラザフォード散乱との比較と考察	41
6.1.3	分離をやめて計算をする	43
6.1.4	実験値を定数倍する	43
6.1.5	誤差による一致の評価	45
6.1.6	結論	46
6.2	$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}(8\text{MeV})$	48
6.2.1	微分断面積	48
6.2.2	理論値との比較	49
6.2.3	定数倍	52
6.2.4	Net Integrate の扱い	53
6.2.5	ターゲット内の不純物	54
6.3	8MeV における C13 同士の衝突	56
6.3.1	実験内容	56
6.3.2	結果	56
6.4	$^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$ 16.6MeV	62
6.5	$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}, 16.6\text{MeV}$	66
6.6	原子核半径の文献値	70
6.7	定数倍	71
7	結論	71

1 Introduction

自然界には様々な対称性があり、ボース粒子（整数スピン）が持つ波動関数の置換対称性、フェルミ粒子（半整数スピン）がもつ波動関数の置換反対称性もその一つである。

今回の実験では、タンデム加速器を利用して ^{12}C （ボース粒子）同士や ^{13}C （フェルミ粒子）同士、異種粒子同士を衝突させ、その微分断面積の角度分布を測定した。

それで得た実験値と粒子の対称性から得られる理論値を比較することで、実際に対称性が存在することを確認することが目的である。

2 理論

2.1 同種粒子

2.1.1 フェルミオンとボソン

古典力学では、二つの同種粒子を区別することができる。それぞれの粒子の軌道は初期条件から一意に決定するから、その軌道を追えば二つの同種粒子を区別することができる。しかし、量子力学では二つの同種粒子を区別することはできない。なぜなら、量子力学では不確定性原理により粒子の位置が確率で支配されるので、粒子の軌道という概念はないからである。同じ種類の粒子 N 個から成る系を考える。各粒子の位置及びスピンの z 成分を考える。各粒子の位置及びスピンの z 成分 S_z をまとめて、 ξ と書くことにすると、この系の波動関数は

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

と表される。

次に、同じ種類の粒子を入れ替える演算子、 $\hat{p}_{i,j}$ を導入する。 $\hat{p}_{i,j}$ は i 番目の粒子と j 番目の粒子を入れかえる演算子とする。つまり (1) に $\hat{p}_{i,j}$ を作用させると

$$\hat{p}_{i,j}\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n) \quad (2)$$

のように変化する。

同種の粒子を入れかえても状態は変化しないので、波動関数に対して次のような条件を課す。

$$\hat{p}_{i,j}\psi = c\psi \quad (c \text{ は定数}) \quad (3)$$

また、 $\hat{p}_{i,j}$ は二つの粒子を入れかえる演算子であるから、

$$(\hat{p}_{i,j})^2 = 1 \quad (4)$$

をみたしており、その固有値は ± 1 であるから、(3) の右辺の定数 c は $+1$ か -1 のいずれかでなければならない。ここで、 c が $+1$ か -1 であるかは粒子の種類によって決まっていることが多くの実験事実から知られており、 $c = 1$ であるような粒子はボソン、 $c = -1$ であるような粒子はフェルミオンと呼ばれている。また、ボソンはスピンの大きさが整数、フェルミオンはスピンの大きさが半整数であることが知られている。

2.1.2 複合粒子の統計性

原子や原子核のように、いくつかの粒子からなる系の基底状態であるような複合粒子を考える。複合粒子を励起するのに必要なエネルギーに比べて、十分に低いエネルギー領域では、複合粒子をあたかも基本粒子として扱ってもよいと考えられる。すなわち、いくつかの複合粒子からなる系の波動関数は、それぞれの複合粒子の重心座標およびスピンの z 成分の関数として表せる。いま考えている複合粒子が N_F 個のフェルミオンと N_B 個のボソンからできているとする。このとき、二つの複合粒子を入れかえるということは、それぞれの構成粒子を入れかえることにほかならないから、波動関数には $(-1)^{N_F}$ の因子がかかる。すなわち、偶数個のフェルミオンを含む複合粒子はボソンであり、奇数個のフェルミオンを含む複合粒子はフェルミオンである。

2.1.3 スピンと統計性

簡単のため同じ種類の二つの質量 m の粒子の間に中心力が働いている系を考える。二つの粒子の位置、運動量、スピンの演算子を $\hat{r}_i, \hat{p}_i, \hat{s}_i (i = 1, 2)$ とすると、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(|\hat{r}_1 - \hat{r}_2|) \quad (5)$$

とかける。重心座標、相対座標、およびそれらの正準共役量を $\hat{R}, \hat{r}, \hat{P}, \hat{p}$ とすると

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \frac{1}{2}(\hat{r}_1 + \hat{r}_2) \\ \hat{P} &= \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \\ \hat{r} &= \hat{r}_1 - \hat{r}_2 \\ \hat{p} &= \frac{1}{2}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \end{aligned} \quad (6)$$

であり、これは使って \hat{H} を書き直すと

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(|\hat{r}|) \quad (7)$$

となり、重心運動と相対運動に分離される。ここで $M = 2m, \mu = \frac{m}{2}$ はそれぞれ全質量、および換算質量である。

次に波動関数を重心運動と相対運動に分離して、

$$\phi(\hat{r}_1, s_1^z; \hat{r}_2, s_2^z) = \phi_{\text{cm}}(\hat{R})\phi_{\text{rel}}(\hat{r}, s_1^z, s_2^z) \quad (8)$$

の形に書く。ここで、 s_1^z, s_2^z は二つの粒子のスピンの z 成分である。そうすると、よく知られているように固有方程式

$$\hat{H}\phi = E\phi \quad (9)$$

は

$$\hat{H}_{\text{cm}}\phi_{\text{cm}} = E_{\text{cm}}\phi_{\text{cm}}, \quad \hat{H}_{\text{cm}} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad (10)$$

$$\hat{H}_{\text{rel}}\phi_{\text{rel}} = E_{\text{rel}}\phi_{\text{rel}}, \quad \hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(|\hat{r}|) \quad (11)$$

$$E = E_{\text{cm}} + E_{\text{rel}} \quad (12)$$

の形に変数分離される。

次に二つの粒子が同じ種類であるので、波動関数に統計性の条件

$$\phi(\mathbf{r}_1, s_1^z; \mathbf{r}_2, s_2^z) = c\phi(\mathbf{r}_2, s_2^z; \mathbf{r}_1, s_1^z) \quad (13)$$

を課さなければならない。ここで、考えている粒子がボソンなら $c = 1$ 、フェルミオンなら $c = -1$ である。二つの粒子の入れかえに対して、重心座標 $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ は不変であるが、相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ は符号を変える。よって、統計性の条件は重心運動に対しては制約を加えないが、相対運動に対しては、

$$\phi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = c\phi_{\text{rel}}(-\mathbf{r}, s_2^z, s_1^z) \quad (14)$$

という条件を課す。以下では相対運動だけを議論する。

相対運動のハミルトニアン \hat{H}_{rel} がスピン演算子 \hat{s}_1, \hat{s}_2 を含まないときは相対運動の波動関数 ϕ_{rel} を r に依存する部分とスピン \hat{s}_1, \hat{s}_2 に依存する部分に分離して

$$\phi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, s_1^z, s_2^z) = f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z) \quad (15)$$

の形に書いておくとすると、固有方程式 (11) は

$$\hat{H}_{\text{rel}}f(\mathbf{r}) = E_{\text{rel}}f(\mathbf{r}), \hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \quad (16)$$

となり、統計性の条件 (13) は

$$f(\mathbf{r})\chi(s_1^z, s_2^z) = cf(-\mathbf{r})\chi(s_2^z, s_1^z) \quad (17)$$

と表される。

式 (16) は中心力の一体問題と同じであるから、 $f(\mathbf{r})$ は球面調和関数と動径波動関数の積の形

$$f(\mathbf{r}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (18)$$

と書ける。ここで球面調和関数 $Y_{l,m}$ のパリティが $(-1)^l$ であること、すなわち $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ の変数変換に対して $Y_{l,m}$ には因子 $(-1)^l$ がかかることを考慮すると、式 (18) のように軌道角運動量の大きさが l であるような状態に対しては

$$f(-\mathbf{r}) = (-1)^l f(\mathbf{r}) \quad (19)$$

であることが分かる。これを (17) に代入すると

$$\chi(s_1^z, s_2^z) = (-1)^l c\chi(s_2^z, s_1^z) \quad (20)$$

が得られるが、これは重心のまわりの軌道角運動量 l とスピン部分の波動関数の対象性に関係がついていることを示している。

2.2 微分断面積の定義

等速度粒子のビームを用意し、それを与えられた標的に当てるとする (図 1)。単位時間に単位面積を通過する粒子の数をフラックスといい、入射粒子のフラックスを j_{inc} 、散乱された粒子のフ

図 1: 微分断面積の定義

ラックスを j_{sc} とする。また、標的から検出器までの距離を r とする。単位時間に、微小立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子の数を dN とすると、

$$dN = j_{sc} r^2 d\Omega \quad (21)$$

が成立する。また、 dN は j_{inc} 、 $d\Omega$ に比例しているので、

$$dN = j_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (22)$$

と書いたときの係数 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ のことを (θ, φ) 方向への微分断面積とよぶ。

(21),(22) より

$$d\sigma \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{j_{sc} r^2 d\Omega}{j_{inc}} = \frac{\text{単位時間に } d\Omega \text{ 間に散乱される粒子の数}}{\text{単位時間に単位面積に入射する粒子の数}} \quad (23)$$

2.3 クーロン散乱

それぞれ Z_1, Z_2 の電荷をもつ二つの粒子の相互の距離を r とする。これらの相互作用のポテンシャルはクーロンポテンシャル

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (24)$$

である。($\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ としている。)

これらの二つの粒子の運動量をそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とし、質量を m_1, m_2 、位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする。これらの相互作用はクーロン散乱のみとしているので、二つの粒子の相対運動のハミルトニアンは

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (25)$$

となる。(ただし $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}$, $r = |\mathbf{r}|$ としている。)

ここで、 m は換算質量

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (26)$$

である。

以上より、クーロン相互作用している 2 粒子系の衝突問題の相対運動のシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (27)$$

E は重心系でのエネルギーである。ここで、

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad (29)$$

とすると、(27) は

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2k\gamma}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (30)$$

と書かれる。(30) は

$$e^{ikz} f(r-z) \quad (31)$$

という形の正則解をもつ。実際、(30) に (31) を代入し、 $u = r - z$ とすれば、

$$\left(u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - k\gamma\right) f(u) = 0 \quad (32)$$

が得られ、更に

$$v = iku = ik(r-z) \quad (33)$$

とすると、

$$\left(v \frac{d^2}{dv^2} + (1 - v) \frac{d}{dv} - i\gamma\right) f(v) = 0 \quad (34)$$

となる。(34) はラプラス型の方程式と呼ばれ、この解のうち原点で正則なものは合流型超幾何級数 $F(-i\gamma|1|v)$ である。よって (30) の解は

$$\psi_c = Ae^{ikz} F(-i\gamma|1|ik(r-z)) \quad (35)$$

である (A は任意定数)。

合流型超幾何級数 $F(\alpha|\beta|z)$ はラプラス型の方程式の特殊解 $W_1(\alpha|\beta|z)$, $W_2(\alpha|\beta|z)$ の和で表せて、 $|z| \rightarrow \infty$ での漸近式が知られている。([4]、P.254,255,256、付録 B)

つまり、

$$\psi_c = \psi_i + \psi_d \quad (36)$$

$$\psi_i = Ae^{ikz} W_1(-i\gamma|1|ik(r-z)) \quad (37)$$

$$\psi_d = Ae^{ikz} W_2(-i\gamma|1|ik(r-z)) \quad (38)$$

として、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いて

$$A = \Gamma(1 + i\gamma)e^{\frac{\pi\gamma}{2}} \quad (39)$$

としたとき、 $|r-z| \rightarrow \infty$ での ψ_i, ψ_d の次の漸近式が得られる。

$$\psi_i \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kz + \gamma \ln k(r-z))} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \quad (40)$$

$$\psi_d \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\gamma}{k(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} e^{i(kr-\gamma \ln k(r-z))} \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \quad (41)$$

ここで、 $z = r \cos \theta$, $v = ik(r-z) = 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2}$ を用いて、 ψ_d の漸近展開の初項は

$$\psi_d \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{r} e^{i(kr-\gamma \ln 2kr)} f_c(\theta) \quad (42)$$

と表せる。ただし

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\gamma \ln(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i\sigma_0} \quad (43)$$

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1+i\gamma) \quad (44)$$

である。 $f_c(\theta)$ はクーロン散乱の散乱振幅とよばれる。

2.4 部分波展開

これまでは全ての角運動量状態をまとめて議論してきた。しかし、別々の角運動量状態に分解してシュレディンガー方程式を解くこともできる。

\hat{H} 、 \hat{L}^2 、 \hat{L}_z の同時固有関数は

$$R_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{\chi_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (45)$$

で表わせて、 $\chi_l(r)$ の従う方程式は、

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{Z^2 e^2}{r^2} \right\} \chi_l(r) = E \chi_l(r) \quad (46)$$

式 (28)、(29) より、式 (46) を書き換えると、

$$\chi_l''(r) + \left\{ k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi_l(r) = 0 \quad (47)$$

である。ここで、

$$\chi_l(r) = e^{ikr} (kr)^{l+1} v_l, \quad \xi = -2ikr \quad (48)$$

と変数分離すると、 v_l は、ラプラスの方程式

$$\left\{ \xi \frac{d^2}{d\xi^2} + (2l+2-\xi) \frac{d}{d\xi} - (l+1+i\gamma) \right\} v_l = 0 \quad (49)$$

の解である。

原点で正則な式 (49) の解は角運動量状態をまとめて計算した時と同様に、合流型超幾何関数 $F(l+1+i\gamma|2l+2|\xi)$ である。これに対応する式 (47) の正則解を $F_l(\gamma; kr)$ であるとすると、 $F_l(\gamma; kr)$ の漸近式は

$$F_l(\gamma; kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sin \left(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) \quad (50)$$

となることが知られている。ここで、 δ_l はクーロンの位相のずれと呼ばれ、

$$\delta_l = \arg \Gamma(l+1+i\gamma) \quad (51)$$

である。

$F_l(\gamma; kr)$ と $F(l+1+ir|2l+2|-2ikr)$ が対応するので、

$$F_l(\gamma; kr) = C_l(\gamma)e^{ikr}(kr)^{l+1}F(l+1+i\gamma|2l+2|-2ikr) \quad (52)$$

が成立し、 $C_l(\gamma)$ は式 (50) を満たすように調整される。すなわち、

$$C_l = \frac{2^l e^{-\frac{\pi\gamma}{2}} |\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!} \quad (53)$$

また、式 (47) の正則でない解として、出ていく波と入ってくる波、それぞれ $u_l^{(+)}$ と $u_l^{(-)}$ があり、その漸近式は

$$u_l(\pm) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm i(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{\pi}{2}l)} \quad (54)$$

であり、

$$F_l = \text{Im}\{e^{i\delta_l} u_l^{(+)}\} = -\frac{1}{2i} e^{-i\delta_l} \left(u_l^{(-)} - e^{2i\delta_l} u_l^{(+)} \right) \quad (55)$$

である。

ここで、クーロン散乱の厳密解 ψ_C はルジャンドル多項式による展開

$$\begin{aligned} \psi_C &= e^{-\frac{\pi}{2}\gamma} \Gamma(1+i\gamma) e^{ikz} F(-i\gamma|1|ik(r-z)) \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\delta_l} F_l(\gamma; kr) P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (56)$$

で表わされる。この展開は l 次の球 Bessel 関数 j_l を用いた平面波の展開

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (57)$$

に似ており、実際、 $\gamma \rightarrow 0$ の極限においてはこれと同じになる。([?] 付録 A3)

式 (56) に式 (54)、(55) を代入して、

$$\begin{aligned} \psi_C &= -\frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left(e^{-i(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{\pi}{2}l)} - e^{2i\delta_l} e^{i(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{\pi}{2}l)} \right) P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l e^{-i(kr - \gamma \ln 2kr)} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} \right) e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)} \end{aligned} \quad (58)$$

式 (58) の第 1 項は入射波束、第 2 項は散乱波束を表わしているので、散乱振幅 $f_C(\theta)$ が式 (42) との対応から求まり、

$$f_C(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} \quad (59)$$

2.5 ラザフォード散乱の公式の導出

負のきわめて大きい z の値に対して、 ψ_i は密度 1 の波で、その流れの密度

$$\mathbf{j}_i = \frac{\hbar}{2im} [\psi_i^* (\nabla \psi_i) - \psi_i (\nabla \psi_i^*)] \quad (60)$$

の向きは z の方向で、大きさは $v = \frac{k\hbar}{m}$ にほぼ等しい。このことより、 ψ_i が入射波であるという解釈が正当化される。

同様に、 ψ_d は散乱波であると考えられる。

立体角 $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ に散乱される流れの密度と入射する流れの比をとれば、微分断面積

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = |f_C(\theta)|^2 \quad (61)$$

が得られる。

$f_C(\theta)$ の具体的な形は (43) で与えられているので、(43) を (61) に代入すると、次のラザフォードの公式が得られる。

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\frac{\theta}{2} \quad (62)$$

これは古典クーロン散乱の断面積と一致している。

2.6 スピンのない同種 2 粒子のクーロン散乱

簡単のため、考える同種 2 粒子はスピンを持たないとする。また、2 粒子の相互作用はクーロン相互作用のみとする。2 粒子が同種である場合、2 粒子が異なる場合と比べて次の 2 つの修正を加えなければならない。

1) 検出器は粒子 1 と粒子 2 を区別せず、その結果として断面積 $\sigma(\Omega)$ を定義しなおす必要が生じる。

2) 波動関数を正しく対称化しなければならない。

1) については量子力学に固有のものではない。便宜上、単位時間と単位入射流束につき立体角 $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ の中に放出される粒子 (1 および 2) の個数として $\sigma(\Omega)$ を定義する。つまり、 $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ の中に散乱される粒子 1 の散乱断面積を $\sigma^{(1)}(\Omega)$ 、粒子 2 の散乱断面積を $\sigma^{(2)}(\Omega)$ とすると

$$\sigma(\Omega) = \sigma^{(1)}(\Omega) + \sigma^{(2)}(\Omega) \quad (63)$$

と定義しなおす。

ここで、 $\sigma^{(1)}(\Omega)$ は散乱振幅 $f(\theta, \varphi)$ を使って

$$\sigma^{(1)}(\Omega) = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (64)$$

と表されているとする (図 2)。今は重心系で考えているので

$$\sigma^{(2)}(\Omega) = |f(\pi - \theta, \varphi - \pi)|^2 \quad (65)$$

と表される (図 3)。

2) は量子論に特有の性格を持つ。正しくは対称化するとは、ボソンなら完全対称に、フェルミオンなら反対称にするということである。修正する前の (相対運動の) 波動関数の漸近形は (36)、(40)、(42)、より

$$\psi_C(r, \theta) = \psi_i(r, \theta) + \psi_d(r, \theta) \quad (66)$$

$$\psi_i(r, \theta) \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kz + \gamma \ln k(r-z))} = e^{i(kr \cos \theta + \gamma \ln kr(1 - \cos \theta))} \quad (67)$$

$$\psi_d(r, \theta) \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{r} e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)} f_C(\theta) \quad (68)$$

図 2: 粒子 1 が検出される時

であり、これを対称化した波動関数を $\hat{\psi}_C$ とすると、

$$\hat{\psi}_C = \psi_i \pm \tilde{\psi}_i + \psi_d \pm \tilde{\psi}_d \quad (69)$$

と表わせる。± は + がボソン、- がフェルミオンである。ただし、

$$\tilde{\psi}_i(r, \theta) \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} \psi_i(r, \pi - \theta) = e^{-i(kr \cos \theta + \gamma \ln kr(1 - \cos \theta))} \quad (70)$$

$$\tilde{\psi}_d(r, \theta) \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} \psi_d(r, \pi - \theta) = \frac{1}{r} e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)} f_C(\pi - \theta) \quad (71)$$

よって、 $\hat{\psi}_C$ は次のようにも表わせる。

$$\hat{\psi}_C \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} e^{i(kz + \gamma \ln k(r-z))} \pm e^{-i(kz - \gamma \ln k(r-z))} + \frac{1}{r} e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)} \hat{f}_C(\theta) \quad (72)$$

ただし

$$\hat{f}_C(\theta) = f_C(\theta) \pm f_C(\pi - \theta) \quad (73)$$

であり、 $\hat{f}_C(\theta)$ を対称化振幅と呼ぶ。これで 1), 2) の修正ができたので、散乱断面積を求める。式 (72) の物理的意味を考えると、ラザフォードの公式の導出をしたときと同様の議論により、第 1 項、第 2 項はそれぞれ粒子 1, 2 の入射波束を表わしていて、第 3 項は散乱振幅 $\hat{f}_C(\theta)$ をもつ散乱波束を表わしていると言える。よって、微分断面積はラザフォードの公式の導出と同様に

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\hat{f}_C(\theta)|^2 = |f_C(\theta) \pm f_C(\pi - \theta)|^2 \quad (74)$$

となる。

図 3: 粒子 2 が検出される時

2.7 スピンを持つ同種 2 粒子のクーロン散乱

前節の取り扱い、スピンをもつ同種粒子の衝突にも拡張される。今、スピンの同種 2 粒子の散乱を考える。2 粒子の合成スピンの状態の波は全部で $(2s + 1)^2$ 個あり、1 重項状態が 1 個、3 重項状態が 3 個、...、 $(4s + 1)$ 重項状態が $(4s + 1)$ 個という内訳になっている。 $(4t + 1)$ 重項状態に対応する (対称化されていない) 散乱振幅を $f_{4t+1}(\theta)$ で表わす ($t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, s$)。 t が整数のとき、 $(4t + 1)$ 重項は粒子がボソンならスピンの交換に対して対称、粒子がフェルミオンならスピンの交換に対して反対称である。よって粒子がボソンでもフェルミオンでも、空間部分是对称であるから、 $(4t + 1)$ 重項に対する対称化された断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}_{4t+1}$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{4t+1} = |f_{4t+1}(\theta) + f_{4t+1}(\pi - \theta)|^2 \quad (t: \text{整数}) \quad (75)$$

と表わされる。 t が半整数のとき、 $(4t + 1)$ 重項は粒子がボソンならスピンの交換に対して反対称、粒子がフェルミオンならスピンの交換に対して対称である。よって粒子がボソンでもフェルミオンでも空間部分是对称であるから、 $(4t + 1)$ 重項状態に対する対称化された断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}_{4t+1}$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{4t+1} = |f_{4t+1}(\theta) - f_{4t+1}(\pi - \theta)|^2 \quad (t: \text{半整数}) \quad (76)$$

と表わされる。

偏りのない粒子群からなる標的を、偏りのない粒子からなるビームにさらすとき、1 つ 1 つの衝突において、入射粒子と標的粒子のスピンの方向は偶然によって決められる。よって、散乱断面積の計算は状態の数の重みをつけて考える。つまり

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{(2s + 1)^2} \{ |f_1(\theta) + f_1(\pi - \theta)|^2 + 3|f_3(\theta) - f_3(\pi - \theta)|^2 \\ & + \dots + (4s + 1)|f_{4s+1}(\theta) + (-1)^{2s} f_{4s+1}(\pi - \theta)|^2 \} \end{aligned} \quad (77)$$

ここで今、クーロン力しか考えていないので、散乱振幅にスピンは無関係であるから

$$f_{4t+1}(\theta) = f_c(\theta) \quad (t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, s) \quad (78)$$

としてよい。(77),(78) より

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2s+1)^2} \{ |f_1(\theta) + f_1(\pi-\theta)|^2 + 3|f_3(\theta) - f_3(\pi-\theta)|^2 \\ &\quad + \dots + (4s+1)|f_{4s+1}(\theta) + (-1)^{2s}f_{4s+1}(\pi-\theta)|^2 \} \\ &= |f_c(\theta)|^2 + |f_c(\pi-\theta)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{(2s+1)^2} \{ 1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^{2s}(4s+1) \} \{ f_c(\theta)f_c^*(\pi-\theta) + f_c^*(\theta)f_c(\pi-\theta) \} \\ &= |f_c(\theta)|^2 + |f_c(\pi-\theta)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{(2s+1)^2} 2(-1)^{2s}(2s+1) \{ f_c(\theta)f_c^*(\pi-\theta) + f_c^*(\theta)f_c(\pi-\theta) \} \\ &= |f_c(\theta)|^2 + |f_c(\pi-\theta)|^2 \\ &\quad + (-1)^{2s} \frac{2}{2s+1} \{ f_c(\theta)f_c^*(\pi-\theta) + f_c^*(\theta)f_c(\pi-\theta) \} \end{aligned} \quad (79)$$

$f_c(\theta)$ として式 (43) を式 (79) に代入すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E} \right)^2 \left[\sin^{-4} \frac{\theta}{2} + \cos^{-4} \frac{\theta}{2} + (-1)^{2s} \frac{2}{2s+1} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \cos \left\{ \frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \ln \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \right] \quad (80)$$

が得られる。これが同種 2 粒子の散乱の微分断面積を与える式で、Mott の公式と呼ばれる。

2.8 Blair 散乱

これまでは原子核間の相互作用はクーロン相互作用のみとしてきたが、現実はそのではなく、原子核の近く (数 fm) では核ポテンシャルが存在することが知られている。ここでは、核ポテンシャルを含めたポテンシャルを図 4 のように仮定する。

図 4 の双曲線部分は有効ポテンシャルで、 ρ は原子核間距離とする。

ここで、角運動量 l でラベルされた部分波の \hat{L}^2 の固有値は $\hbar^2 l(l+1)$ であり、古典的な大きさは $|L| = rp$ である。よって、近似的に

$$\hbar \sqrt{l(l+1)} \sim \hbar l = rp \quad (81)$$

という対応がある。運動量を固定すると、

$$l \text{ が小さい} \Leftrightarrow \text{その部分波は標的の核に近い}$$

ということができる。

よって、 l が小さい部分波は核ポテンシャルによって強い引力を受けて、 l が大きい部分波は r が大きいので遠心力ポテンシャル、核ポテンシャルの影響をほとんど受けず、クーロン散乱と同じ扱いになる。ある l までが吸収されて、それ以上の l がクーロン散乱として扱ってよいと判断される l が存在すれば、その l を l_{\max} と名付ける。

入射波束のうち l_{\max} までの部分波が標的に吸収されたとき、核ポテンシャルがないときのクーロン散乱の散乱波束から l_{\max} までの部分波の散乱波束を引かなければならない。これが Blair モデルの考え方である。

h

図 4: ポテンシャル

つまり、散乱振幅は式 (36)、(59) より、

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= f_C(\theta) - f_N(\theta) \\
 &= -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) \\
 &\quad - \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) P_l(\cos \theta) \exp(2i\delta_l)
 \end{aligned} \tag{82}$$

ただし、

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) P_l(\cos \theta) \exp(2i\delta_l) \tag{83}$$

としている。

よって、スピン s をもつ同種粒子の衝突を考えると、散乱振幅は、

$$\hat{f}(\theta) = f_C(\theta) - f_N(\theta) \pm (f_C(\pi - \theta) - f_N(\pi - \theta)) \tag{84}$$

となる。ただし、 \pm はそれぞれボソンとフェルミオンに対応する。Mott の公式の導出の時と同様にして、微分断面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Blair} &= \frac{s+1}{2s+1} \left| f_C(\theta) + f_C(\pi - \theta) - f_N(\theta) - f_N(\pi - \theta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{s}{2s+1} \left| f_C(\theta) - f_C(\pi - \theta) - f_N(\theta) + f_N(\pi - \theta) \right|^2
 \end{aligned} \tag{85}$$

となる。

特に、スピン $s = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \left(\frac{Z^2 e^2}{4E} \right)^2 \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) \right. \\ & + \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) \\ & \left. - \frac{2i}{\gamma} \sum_{l=0,2,\dots}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \right|^2 \end{aligned} \quad (86)$$

である。スピン $s = \frac{1}{2}$ のときは

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{3}{4} \left(\frac{Z^2 e^2}{4E} \right)^2 \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) \right. \\ & + \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) - \frac{2i}{\gamma} \sum_{l=0,2,\dots}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \left. \right|^2 \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{Z^2 e^2}{4E} \right)^2 \left| \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) \right. \\ & + \cos^{-2} \frac{\theta}{2} \exp \left\{ -i\gamma \ln \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \exp(2i\delta_0) - \frac{2i}{\gamma} \sum_{l=1,3,\dots}^{l_{\max}} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta) \left. \right|^2 \end{aligned} \quad (87)$$

有効ポテンシャルと与えられたエネルギー E の関係式は

$$E = \frac{l_{\max}(l_{\max}+1)\hbar^2}{2\mu\rho^2} + \frac{Z^2 e^2}{\rho} \quad (88)$$

を満たしている。 E 、 l_{\max} が与えられれば、式 (88) を ρ について解けば、

$$\rho = \frac{\mu Z^2 e^2 + \sqrt{\mu^2 Z^4 e^4 + 2\mu E l_{\max}(l_{\max}+1)}}{2\mu E} \quad (89)$$

となり、おおよその核半径が推定できる。

3 実験

3.1 実験装置の説明

実験では、既製品のモジュールを組み合わせた回路を使用するが、各モジュールについて、簡単に説明する。

半導体検出器 電圧をかけておくと、エネルギーを持った粒子が入射した時、そのエネルギーに比例した大きさの電流が流れるようになっている。

Pre Amplifier 検出器に電圧をかけ、さらに入ってきた信号を増幅する。

Detector Bias Supply 検出器にかけるための電圧を供給する。

Amplifier 信号を増幅する。UNI からは増幅した信号をそのまま、BI からはコンデンサを通し、微分した形にした信号を出す。

Timing Single Channel Analyzer 指定した電圧の領域以外の信号をカットする。

Linear Gate Stretcher Gate に信号が入ったときだけ、Linear からの信号を通す。

Multi Channel Analyzer 入ってきた信号を、大きさを 0 ~ 8191ch に分割して、コンピュータに出力する。

Universal Coincidence 複数の Input から、指定した個数以上の論理信号が同時に入っている時のみ、論理信号を出す。例えば、2 つの信号元に対して、“2”を指定すれば AND 回路、“1”を指定すれば OR 回路となる。

Level Adapter 論理信号の NIM 信号と TTL 信号を相互に変換する。

Visual Scaler 入ってきた論理信号の数を数える。

Digital Current Integrater と Faraday Cup ファラデーカップ内部に溜まった電荷に応じてパルスを出す。

Pulser 一定の周期でパルスを出す。

3.2 ターゲット作成

3.2.1 炭素膜掬い

市販の炭素膜 ^{12}C ($22.9\mu\text{g}/\text{cm}^2$, $19.6\mu\text{g}/\text{cm}^2$ と記載) と ^{13}C ($20\mu\text{g}/\text{cm}^2$ と記載) を使用して、実験のターゲットとなる炭素膜を作った。

市販の炭素膜は、スライドガラスに ^{12}C と ^{13}C をそれぞれ蒸着させたもので、剥離させやすいように NaCl を一旦蒸着させた上で、炭素を蒸着してある。この炭素膜を使って、以下の手順でターゲットを作った。

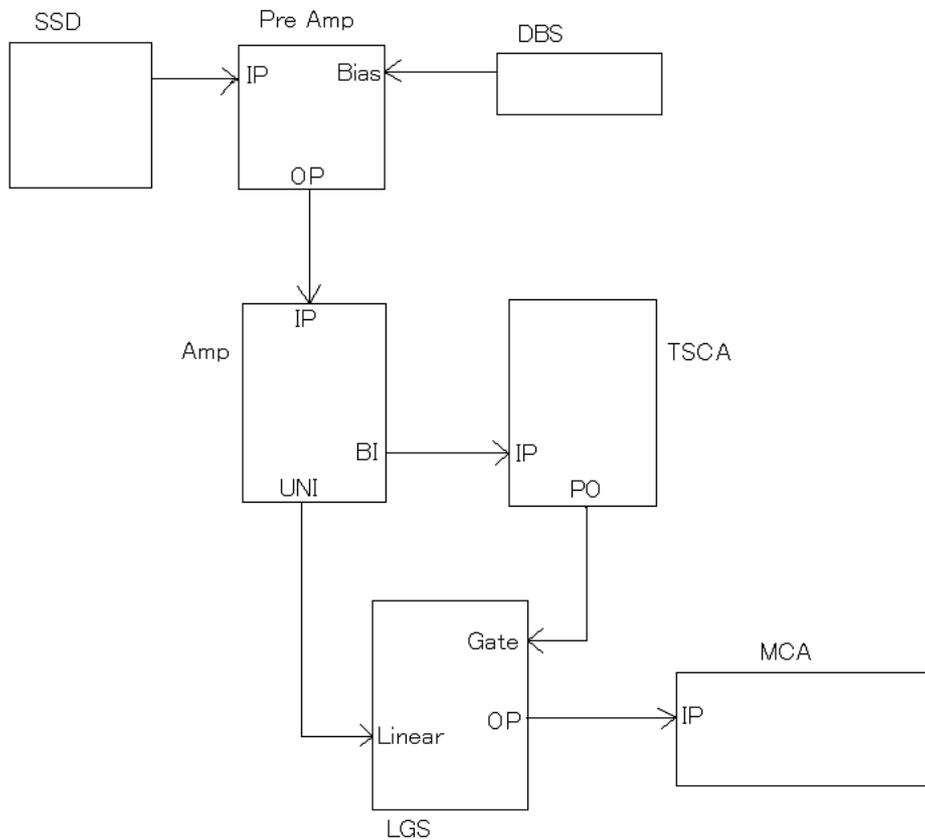
1. 金属製の容器に、40°C程度のお湯を張る。
2. スライドガラス上の炭素の真ん中辺りにカッターナイフを使って切り込みを入れ、半分にする。
3. スライドガラスを水面にそっと差しこみ、炭素膜を少しずつ水に浮かべる。
4. 水面に浮いている炭素膜を、中心に穴のあいた銅板で下から掬い、銅板の両側に均等に張り付くようにする。
5. 十分乾燥させる。

これを繰り返し、

- $22.9\mu\text{g}/\text{cm}^2$ の ^{12}C で 1 番、2 番
- $19.6\mu\text{g}/\text{cm}^2$ の ^{12}C で 3 番、4 番
- $20\mu\text{g}/\text{cm}^2$ の ^{13}C で 5 番、6 番

のターゲットをそれぞれ作った。

図 5: 厚さ測定用回路図



3.2.2 厚さ測定

半導体検出器 (SSD) を用いて ^{241}Am からの α 線を測定することで、作成したターゲットの厚さを測定した。

図 5 のような回路を作った。

ただし図中の略称及び回路の設定は以下のとおり

SSD 半導体検出器

Pre Amp Pre Amplifier

DBS Detector Bias Supply

- 100V
- Positive

Amp Amplifier

- Course Gain : 500

- Fine Gain : 11.0
- Shaping Time : 1.0
- Delay : on
- Positive

TSCA Timing Single Channel Analyzer

- Upper Level : 10.0
- Lower Level : 0.4
- Delay : 3.86
- Nor

LGS Linear Gate Stretcher

- Gated
- CoInc
- DC Couple : High

MCA Multi Channel Analyzer

この回路を使って、 ^{241}Am から出る 5.486MeV の α 線のエネルギーを測定した。

1. 真空チャンバーの中に ^{241}Am と半導体検出器 (SSD) を設置する。
2. チャンバーの扉を閉め、ポンプで内部を真空に引く。
3. MCA でエネルギーを計測する。
4. 真空を戻し、チャンバーを開く。
5. ^{241}Am と SSD の間に 1 番のターゲットを入れる。
6. 再び真空に引き、MCA で計測する。
7. 同様に 4,5,6 番のターゲットについても測定する。
8. SSD のかわりに Pulser を繋ぎ、適当な電圧のパルスを MCA で計測する。
9. 上の丁度 $\frac{1}{2}$ の電圧のパルスを MCA で計測する。

この結果から、5.486MeV の α 線がターゲットの薄膜を通過するときどれだけエネルギーを落とすかがわかり、薄膜の厚さ (単位面積当たりの質量) がわかる。

3.3 本実験

京都大学理学部内にあるタンデム加速器に於いて、以下の実験を行った。

3.3.1 準備

散乱槽の準備

使用した機材

- 真空散乱槽
- 炭素膜 ^{12}C 、 ^{13}C (作成したもの)、 ^{13}C (昔作ったもの)
- スリット
- 望遠鏡
- ターゲットラダー

実験前の準備

1. 高さの決められた印が壁に記してあるので、望遠鏡の中心をそれに向けて、望遠鏡の高さを合わせる。
2. 散乱槽の中心に針があるので、針の中心と望遠鏡の縦軸を合わせる。以降は望遠鏡を基準にして、位置を調節する。
3. 望遠鏡の中心にビームの放射方向を合わせる。コリメーターの上流と下流をそれぞれ望遠鏡で見比べ、できるだけ望遠鏡の中心をコリメーターの中心に近づくようにする。
4. スリットを設置し、コリメーターとスリットの中心が直線上になるように、望遠鏡で調節する。このときの角度を測定を測定し、0度の基準にする。
5. スリットと針の距離を定規で測定する。
6. ターゲットラダーで炭素膜の中心が望遠鏡の中心とあうようにする。そのときの高さを記録する。
7. 散乱槽を真空に引く。
8. ノイズを抑えるために念のため、散乱槽ののぞき窓をアルミ箔でふたをする。

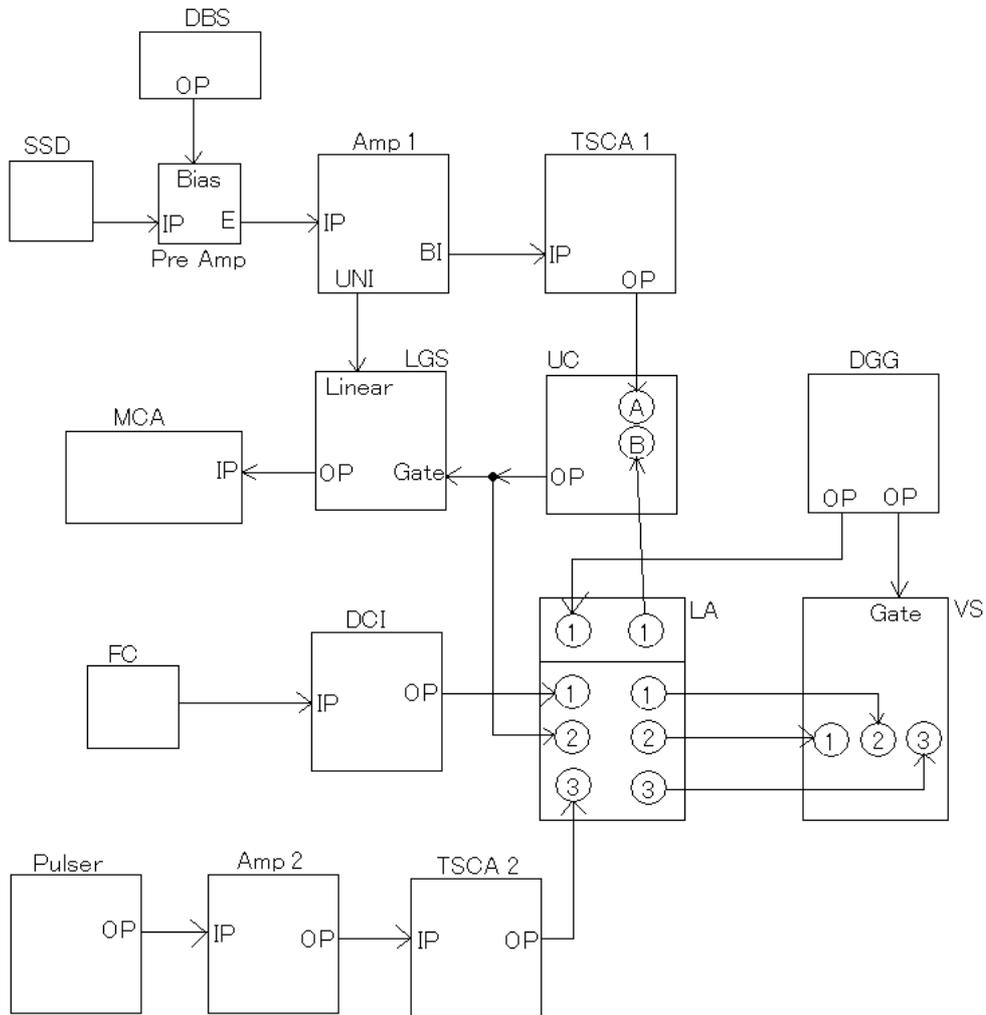
回路のセッティング 図6のような回路を組んだ

ただし、図中の略称及び回路の初期設定は以下の通り

SSD 半導体検出器

Pre Amp Pre Amplifier

図 6: 本実験用回路図



DBS Detector Bias Supply

- 80V
- Positive

Amp 1 Amplifier

- Course Gain : 500
- Fine Gain : 8.0
- Shaping Time : 0.5
- Delay : on
- POSITIVE

TSCA 1 Timing Single Channel Analyzer

- Upper Level : 10.0
- Lower Level : 0.0
- Delay : 0.0
- 0.1-1.1 μ sec
- Nor

LGS Linear Gate Stretcher

- Gated
- CoInc
- DC Couple : High

UC Universal Coincidence

- COINCIDENCE REQUIREMENTS : 2
- A : COINC
- B : COINC

MCA Multi Channel Analyzer

LA Level Adapter

- NIM IN,TTL OUT : COMPL
- TTL IN,NIM OUT : COMPL

VS Visual Scaler

- GATE : ON

DGG Dual Gate Generator

- LATCH

DCI Digital Current Integrator

FC Faraday Cup

Pulser Pulser

- PULSE HEIGHT : 1.0
- ATTENUATOR : $\times 1$
- POSITIVE
- SSD 及び FC は散乱槽内に設置しており、計数室から壁の中にある配線を通して測定室の回路につながっている。
- SSD は、入射した粒子に対し、そのエネルギーに比例した大きさの電流を流す。

- FC はターゲットによって散乱されなかった入射ビームが入るようになっている。内部に 10^{-10} Coulomb の電荷が溜まるとパルスを一つ返すようになっており、そのパルスを数えることで入射粒子の数を計測することができる。
- Pulser は 1 秒間に 60 回のパルスを出すようにしてあり、パルスを数えることで計測開始からの時間を知ることができる。
- DGG は LATCH に設定されていて、スイッチを入れると常に信号を出し続けるようになっている。このスイッチが ON になっているときだけ、全ての計測が行われるようにしてある。
- VS も DGG が ON のときに計測するが、数える信号は以下のもの
 1. MCA に入る全ての信号の数 (散乱された粒子の数の目安)
 2. FC から送られるパルスの数 (入射粒子の数の目安)
 3. Pulser のパルスの数 (経過時間の目安)
- MCA はパソコンにつながっており、Quantum Gold というソフトで各チャンネルに入る粒子の数をカウントして記録する。
- Amp2、TSCA2 については、パルスの数さえわかればいいのでパラメータは重要ではない。
- Amp1 の設定は、示したのは低エネルギーの時であって、高エネルギーの実験については以下のようにになっていた。
 - Course Gain : 200
 - Fine Gain : 9.0
 - Shaping Time : 0.5
 - Delay : on
 - POSITIVE

3.3.2 測定

測定は以下のように行った。

1. ターゲットとして4番 (^{12}C) をセット
2. 検出器の角度の変更
3. ビーム (^{12}C 、8MeV) を出す
4. MCA の計測を開始
5. DGG の信号を ON にする (測定開始)
6. 十分なデータが溜まるのを待つ
7. DGG の信号を停止する (測定終了)
8. MCA の計測を終了
9. ビームを止める
10. 記録する
11. MCA のヒストグラム及び VS をリセットする

これの(2)~(11)を繰り返し、実験室系での角度 10° から 60° まで 2° 刻みで計った。(詳細は後述)
さらに、ターゲットとビームをそれぞれ

- ^{13}C 、 ^{12}C ・8MeV
- ^{13}C 、 ^{13}C ・8MeV
- ^{13}C 、 ^{13}C ・16.6MeV
- ^{12}C 、 ^{12}C ・16.6MeV

にして同様に測定した。ただし、いずれもターゲットの ^{12}C は4番、 ^{13}C は6番である。

表 1: ピーク測定

入力	ch	誤差
α 線	6259.6	0.88874
1 番 ^{12}C	6210.1	1.3679
4 番 ^{12}C	6209.7	14390
5 番 ^{13}C	6221.9	0.12379
6 番 ^{13}C	6221.3	0.12384
Pulser1	5389.2	3.1902×10^{-2}
Pulser $\frac{1}{2}$	2693.7	4.8378×10^{-2}

4 実験結果

4.1 炭素膜

MCA で記録したヒストグラムから、ピークの中心及びその誤差のチャンネル (ch) を求めた。表 1 の通り。

4.2 検出器に入る散乱粒子の立体角

ターゲットから検出器の前に設置したスリットまでの距離が 20.80cm、スリットの厚さが 0.500cm、スリットの穴の直径が 0.390cm であった。これらから

$$\frac{\left(\frac{0.390}{2}\right)^2 \times \pi}{(20.80 + 0.500)^2} = 2.63 \times 10^{-4} \text{ str} \quad (90)$$

よって散乱粒子は、 2.633×10^{-4} str の立体角に絞られて検出器に入ることになる。

4.3 本実験

実験で記録したものは、各粒子の組み合わせ及び散乱角の組み合わせに対して、MCA で測定したエネルギーのヒストグラムと、データの蓄積をしていた時刻、VS に表示された 3 つの値、すなわち

detector 検出器に入ったデータ点の総数

FC ファラデーカップが返したパルスの総数

time 時間計測用のパルサーが出したパルスの数

と、さらに Net Integrate としてヒストグラムのピークと思える部分に入った点の総数、以上である。

このうち、ヒストグラム以外のデータが表 2 である。

表 2: ^{12}C - ^{12}C 8MeV

6月14日		^{12}C - ^{12}C		8MeV	
時刻	角度 (°)	detector	FC	time	Net Integrate
19:42-19:43	10	4749	138	2781	4000
19:47-19:48	14	17376	1859	3902	14076
19:53-19:54	18	4907	1741	3309	3657
19:59-20:00	22	4499	2297	4136	3320
20:04-20:06	26	4372	8487	7234	3228
20:10-20:11	30	3756	7999	6151	3189
20:14-20:15	34	5985	13510	983	4915
20:18-20:20	38	5722	117832	7897	3319
20:23-20:23	42	4496	25364	1551	3790
20:26-20:26	46	7862	27883	1594	7527
20:30-20:32	50	5770	101720	5863	5289
20:35-20:35	54	6414	45651	2325	5853
20:38-20:39	58	14148	43252	2122	14005
20:41-20:42	60	7709	31565	1427	7637
20:45-20:46	56	10208	35832	1365	9487
20:55-20:57	52	4747	122495	5662	3243
20:59-21:01	48	15917	89106	4217	14823
21:03-21:04	44	6739	22248	1092	5878
21:08-21:09	40	4027	69509	4109	3106
21:12-21:12	36	4668	20260	1147	3907
21:15-21:15	32	4242	7452	1503	3721
21:18-21:19	28	3659	10589	5370	3156
21:23-21:25	24	4205	3026	5259	3217
21:27-21:28	20	4132	1690	2924	3215
21:32-21:32	16	5314	906	1572	3780
21:35-21:35	12	5432	354	1761	3749

表 3: ^{13}C - ^{12}C 8MeV

6月14日		^{13}C - ^{12}C		8MeV	
時刻	角度 (°)	detector	FC	time	Net Integrate
21:44-21:44	10	6867	269	1352	5146
21:46-21:47	14	5729	818	4165	4191
21:50-21:52	18	4529	1618	8085	3350
21:54-21:58	22	5442	3737	13007	3458
22:00-22:02	26	5039	8750	6895	3851
22:05-22:07	30	4413	13006	6731	3799
22:10-22:11	34	3593	15860	8123	3215
22:14-22:16	38	4503	28284	5771	3761
22:18-22:19	42	4171	32277	6453	3791
22:21-22:24	46	4725	40615	7882	4499
22:26-22:29	50	5577	50202	9552	3823
22:31-22:33	54	5915	46860	9092	4493
22:39-22:40	58	4546	28814	5601	4482
22:43-22:45	60	6490	35857	6926	4386
22:58-23:00	50	4900	40303	7649	3903
23:03-23:05	54	5593	41036	8491	4516
23:08-23:10	58	5280	31174	6786	4546

表を見ればわかるように角度については、 10° から始めて 4° 刻みで増していき、 60° で折り返して 4° ずつ下げていった。ただし、 ^{12}C - ^{13}C 8MeV については、 60° から下がる角度は測定していない。

また、実験中には結果を Mott 散乱の理論式による値と大雑把に比較しており、疑問を覚えた角度については複数回の計測を行っている。

表 4: ^{13}C - ^{13}C 8MeV

6月28日		^{13}C - ^{13}C		8MeV	
時刻	角度 (°)	detector	FC	time	Net Integrate
16:03-16:08	10	12903	654	548	9274
16:11-16:12	14	13684	2607	2443	10890
16:14-16:15	18	9949	4046	2302	7216
16:17-16:18	22	5923	6020	2536	3605
16:20-16:21	26	6859	11108	3854	3716
16:24-16:25	30	6726	21074	4276	3522
16:27-16:29	34	6116	37622	6568	3185
16:31-16:32	38	5128	23306	4016	3935
16:34-16:36	42	4376	36413	6456	3216
16:38-16:39	46	4256	61662	3004	3745
16:41-16:41	50	11194	66470	3171	9369
16:43-16:44	54	6075	47668	2209	4395
16:46-16:46	58	6084	56317	2670	5226
16:49-16:50	60	9488	46331	2101	7191
16:53-16:53	56	6957	59393	2605	3910
16:56-16:56	52	8505	47961	2090	6335
16:58-16:59	48	6379	45156	1932	3562
17:02-17:02	46	5795	64205	2737	3587
17:04-17:05	44	5791	66650	2787	3552
17:07-17:08	40	8920	43646	1796	7032
17:10-17:11	36	5239	23641	4226	3710
17:14-17:15	32	5329	23095	4000	3591
17:18-17:19	28	8365	15169	2603	6915
17:23-17:23	24	7604	9835	1686	5319
17:26-17:26	20	10916	6210	1271	7825
17:29-17:29	16	10319	2931	1000	7877
17:31-17:32	12	24137	2154	718	19335
17:35-17:35	28	5109	9810	1572	3906
17:37-17:38	26	5544	8958	1428	4702
17:40-17:41	30	5236	15827	2443	4438
17:43-17:45	32	5843	29473	4710	4169
17:48-17:48	34	5090	30962	2570	3730
18:03-18:03	36	5069	25719	1875	3934
18:07-18:08	38	11039	52015	3893	8075
18:14-18:14	52	5331	30960	1665	4075
18:16-18:17	54	5073	38090	1945	4100
18:19-18:20	56	7641	69345	3608	4962
18:22-18:22	58	7400	53326	2675	6107
18:54-18:55	26	21049	32873	1772	17786
18:58-18:58	30	13972	41221	2260	10956
19:00-19:01	34	16810 ²⁸	91969	5382	12855

表 5: ^{13}C - ^{13}C 16.6MeV

6月28日		^{13}C - ^{13}C		16.6MeV	
時刻	角度 (°)	detector	FC	time	Net Integrate
19:50-19:51	10	41169	7485	2733	32534
19:53-19:54	14	9519	5310	1856	5757
19:55-19:56	18	7087	8344	2977	3525
19:59-20:00	22	11293	22404	4115	3348
20:02-20:03	26	5560	49647	1710	4088
20:05-20:05	30	4823	100882	3252	3290
20:07-20:09	34	6346	195452	4946	3353
20:10-20:12	38	7465	321114	6346	3625
20:14-20:17	42	7574	615354	10593	3128
20:26-20:33	46	10200	1283725	26612	3099
20:35-20:38	50	6245	472449	8321	3199
20:40-20:41	54	6122	322189	5303	3971
20:43-20:45	58	6804	291696	4925	4144
20:46-20:47	60	5054	197496	3346	3503
20:49-20:51	56	5696	260137	4317	3176
20:53-20:55	52	6163	336036	5988	3246
20:56-21:01	48	7643	692165	14255	3131
21:03-21:10	44	12648	1348680	25368	3123
21:13-21:15	40	6354	347160	6541	3346
21:17-21:18	36	6526	216783	4000	3442
21:21-21:43	32	14387	364119	6519	8291
21:25-21:26	28	7355	97480	1766	4232
21:28-21:29	24	17380	41999	1163	5329
21:31-21:32	20	12912	14551	2634	4250
21:34-21:34	16	12227	8158	1452	5737
21:36-21:36	12	17711	5125	944	11284
21:41-21:45	48	8219	694836	13016	3460
21:47-21:50	50	6700	422299	8128	3746
21:52-21:54	52	6710	342344	6810	3871

表 6: ^{12}C - ^{12}C 16.6MeV

6月28日		^{12}C - ^{12}C		16.6MeV	
時刻	角度 (°)	detector	FC	time	Net Integrate
22:05-22:05	10	64768	8301	1161	47425
22:09-22:09	14	24877	9691	1345	14457
22:11-22:11	18	16567	11997	1652	7942
22:13-22:14	22	13760	17284	2341	3924
22:16-22:17	26	5534	33409	4486	3335
22:19-22:20	30	8434	89660	4093	5359
22:23-22:24	34	6975	145951	2653	3396
22:26-22:29	38	15657	771893	14033	3280
22:33-22:35	42	9979	465570	6037	3275
22:37-22:38	46	7740	356638	4882	3601
22:41-22:44	50	15051	1007987	13605	3496
22:47-22:48	54	8822	413596	5143	3448
22:51-22:51	58	7851	181030	2105	4631
22:53-22:54	60	10481	199518	2285	6708
22:58-22:59	56	8706	283084	3220	4219
23:01-23:04	52	17004	1110675	12422	3595
23:06-23:08	48	11967	660041	7380	3958
23:10-23:12	44	10322	444525	4991	4028
23:14-23:17	40	16675	926531	12550	3759
23:20-23:21	36	11607	399451	5458	4040
23:23-23:24	32	15445	217935	3036	9610
23:26-23:27	28	12374	106602	1480	8324
23:30-23:30	24	11757	28630	3156	4422
23:33-23:33	20	20987	20493	2262	8752
23:35-23:35	16	21678	12086	1340	11091
23:37-23:38	12	41306	10888	1200	27781

図 7: 実験室系

5 データの取り扱い

5.1 実験室系と重心系

散乱の理論では重心系で議論を進めてきた。しかし、我々が観測する物理量は全て実験室系の物理量である。ここでは、角度と微分断面積について、重心系と実験室系の変換式を導出する。

今、静止している粒子 X に粒子 a が衝突し、粒子 X が粒子 Y に、粒子 a が粒子 b になって散乱される場合を考える。(図 7)

また、以下では物理量の添字に粒子の名前を用いる時、その粒子の物理量を表すものとする。

5.1.1 実験室系

運動量を \mathbf{p} とする。運動量保存の式より、

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_b + \mathbf{p}_Y \quad (91)$$

運動エネルギーを T とする。衝突におけるエネルギーの放出量を Q とすると、エネルギー保存の式より、

$$T_a + Q = T_b + T_Y \quad (92)$$

(91) より、

$$\mathbf{p}_Y = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b \quad (93)$$

$|\mathbf{p}| = p$ とし、(93) の両辺を 2 乗すると、

$$p_Y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta_b \quad (94)$$

質量を m とすると、 $p^2 = 2mT$ より、

$$m_Y T_Y = m_a T_a + m_b T_b - 2(m_a m_b T_a T_b)^{1/2} \cos \theta_b \quad (95)$$

h

図 8: 重心系

(92)、(95) より、

$$(m_b + m_Y)T_b - 2(m_a m_b T_a T_b)^{1/2} \cos \theta_b = (m_Y - m_a)T_a + m_Y Q \quad (96)$$

特に、弾性衝突のとき、つまり $m_b = m_a, m_Y = m_X, Q = 0$ のとき、 $\theta_b = \theta, T_b = T_a'$ と名前を変えて次の式を得る。

$$(m_a + m_X)T_a' - 2m_a(T_a T_a')^{1/2} \cos \theta = (m_X - m_a)T_a \quad (97)$$

また、 $n \equiv \frac{m_X}{m_a}$ とすると、

$$2(T_a T_a')^{1/2} \cos \theta = (1 + n)T_a' + (1 - n)T_a \quad (98)$$

を得る。

5.1.2 実験室系と重心系

ここまでは実験室系での話を進めてきた。次は重心系も考慮に加える。この2粒子系を重心系から見たとき、図8のようになる。以下では物理量にアスタリスク*をつけたら重心系で見たときの物理量を表すとする。

重心系の速度の大きさ v_c は $v_c = \frac{p_a}{m_a + m_X}$ であり、運動エネルギーは $\frac{m_a}{m_a + m_X} T_a$ となる。これを衝突前の実験室系の運動エネルギー T_a から引くと、衝突前の重心系での全運動エネルギー T^* が得られる。

$$T^* = \frac{m_X}{m_a + m_X} T_a \quad (99)$$

このエネルギーは衝突時のエネルギー放出 Q に使われて、衝突後の重心系での全運動エネルギーは $T^* + Q$ になる。衝突後、重心系でみると粒子 b と粒子 Y はそれぞれ大きさが同じで向きが逆の運動量を持つ。粒子 b が運動量 p^* をもつとすると、

$$T^* + Q = T_b^* + T_Y^* = (p^*)^2 \left(\frac{1}{2m_b} + \frac{1}{2m_Y} \right) \quad (100)$$

よって

$$(p^*)^2 = \frac{2m_b m_Y}{m_b + m_Y} (T^* + Q) \quad (101)$$

粒子 b の重心系での速さ v_b^* は

$$v_b^* = \frac{p^*}{m_b} = \left[\frac{2m_Y}{m_b (m_b + m_Y)} (T^* + Q) \right]^{1/2} \quad (102)$$

となり、重心の速さ v_c は

$$v_c = \left[\frac{2m_a}{m_X (m_a + m_X)} T^* \right]^{1/2} \quad (103)$$

となる。

この二つの量の比を n_b と定義する。つまり、

$$n_b \equiv \frac{v_b^*}{v_c} = \left(\frac{m_X m_Y T^* + Q}{m_a m_b T^*} \right)^{1/2} \quad (104)$$

である。ただし、 $m_a + m_X = m_b + m_Y$ とした。

ここで、図より、次の等式で重心系と実験室系の角度に関係がつけられる。

$$\tan \theta_b = \frac{v_b^* \sin \theta^*}{v_c + v_b^* \cos \theta^*} = \frac{\sin \theta^*}{\frac{1}{n_b} + \cos \theta^*} \quad (105)$$

$$\tan \theta_Y = \frac{\sin \theta^*}{\frac{1}{n_Y} - \cos \theta^*} \quad (106)$$

特に、弾性散乱のとき、つまり $m_b = m_a, m_Y, m_X, Q = 0$ のとき、 $n_b = \frac{m_X}{m_a} \equiv n, n_Y = 1$ なので、

$$\tan \theta_b = \frac{\sin \theta^*}{\frac{1}{n} + \cos \theta^*} \quad (107)$$

$$\tan \theta_Y = \frac{\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*}, \text{ or } \theta_Y = \frac{1}{2} (\pi - \theta^*) \quad (108)$$

次に、微分断面積について、重心系と実験室系の変換を導出する。微分断面積の定義式 (22) より、実験室系では

$$dN = j_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (109)$$

が成立する。重心系で見ても dN, j_{inc} は変化しないので、

$$dN = j_{inc} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^* d\Omega^* \quad (110)$$

が成立する。(109) と (110) の比較により、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^* d\Omega^* \quad (111)$$

$d\Omega = \sin \theta d\theta$ 、(105) より、(111) を変形すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^* \frac{d(\cos \theta^*)}{d(\cos \theta)} \quad (112)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^* \frac{\left(1 + \frac{2 \cos \theta^*}{n_b} + \frac{1}{n_b^2} \right)^{3/2}}{1 + \frac{\cos \theta^*}{n_b}} \quad (113)$$

が得られる。

5.2 ターゲットの厚さ

5.2.1 準備

ターゲットとして使う炭素膜の厚さ、つまり単位面積あたりの質量 ν は、

$$\nu = \rho \Delta x = \rho \frac{\Delta E}{\left| \frac{dE}{dx} \right|} \quad (114)$$

と計算される。ただし

ρ : 単位体積あたり質量、密度

Δx : 膜の厚さ

ΔE : エネルギー差

ここで Bethe-Bloch の公式

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_b r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\log \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (115)$$

から、 $-\frac{dE}{dx}$ が計算できる。[10] ただし

r_e : 古典電子半径

$$r_e = 2.817 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

m_e : 電子の質量

$$m_e c^2 = 0.510999 \text{ MeV}$$

N_b : アボガドロ数 6.022×10^{23}

Z : ターゲット粒子の原子番号 6

A : ターゲット粒子の原子量 12 or 13

z : 入射粒子の荷電数。 α 線なので、2

β, γ : 相対論的パラメータ

入射粒子の質量を M 、エネルギーを E として

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{E}{Mc^2} + 1} \right)^2}$$
$$\gamma = \frac{1}{\frac{E}{Mc^2} + 1}$$

v : 入射粒子の速度

$$v = \beta c$$

I : 平均励起ポテンシャル

$Z < 13$ のとき、 $\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV}$ と計算される。

$Z = 6$ で、 $I = 79 \text{ eV}$

W_{max} : 単衝突における最大遷移エネルギー

$$\begin{aligned} W_{max} &= \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2 + s^2}} \\ &\simeq 2m_e c^2 \eta^2 \\ \eta &= \beta\gamma \\ s &= \frac{m_e}{M} \end{aligned}$$

M : 入射粒子の質量 $Mc^2 = 3728MeV$

ここで計算すると

$$\begin{aligned} 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 &= 0.1535 \text{ MeV cm}^2/g \\ \frac{z^2}{\beta^2} &= 1361 \\ \log\left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} - 2\beta^2\right) &= 7.275 \end{aligned}$$

であるから、 $\Delta E(\text{MeV})$ がわかれば

$$\nu = \frac{\Delta E \times A}{0.1535 \times 6 \times 1361.4 \times 7.2755} \text{ g/cm}^2 \quad (116)$$

として、厚さ ν が計算できることがわかる。

5.2.2 計算

Pulsar で測ったふたつの結果から、0V を表すチャンネルの位置は、

$$2693.7 \times 2 - 5389.2 = -1.8 \pm 0.10 \text{ ch}$$

とわかる。

また、 α 線を直接測った結果から、1ch 当たりのエネルギーは

$$\frac{5.486}{6259.6 - (-1.8)} = 8.762 \times 10^{-4} \pm 5.2054 \times 10^{-16} \text{ MeV}$$

である。

すると ΔE はそれぞれ

1. $4.337 \times 10^{-2} \pm 1.43 \times 10^{-3} \text{ MeV}$
4. $4.372 \times 10^{-2} \pm 1.48 \times 10^{-3} \text{ MeV}$
5. $3.303 \times 10^{-2} \pm 7.86 \times 10^{-4} \text{ MeV}$
6. $3.355 \times 10^{-2} \pm 7.86 \times 10^{-4} \text{ MeV}$

と計算される。

式 (116) により厚さ ν を求めると、それぞれ

1. $57.05 \pm 1.88 \mu\text{g/cm}^2$

4. $57.51 \pm 1.95 \mu\text{g}/\text{cm}^2$
5. $47.07 \pm 1.12 \mu\text{g}/\text{cm}^2$
6. $47.82 \pm 1.12 \mu\text{g}/\text{cm}^2$

となる。微分断面積の計算では、これらの値を用いる。ただし、本実験に使用したのは4番と6番である。

5.3 入射ビームの荷電数

ターゲットの後方に設置したファラデーカップに入るビーム（散乱されなかった粒子）が持つ平均荷電数を計算した。

一般にエネルギーを持った原子が物質の薄膜を通過したとき、幾分かの電子を失ってイオンとなるが、薄膜とビームの原子の種類が決まっています、ビームのエネルギーがわかっている時、ビーム粒子が何価のイオンになるかという確率は、実験によって求められている。[1]

グラフから各荷電数の粒子が何%ずつあるのか読み取った。陽子数6であるCにCを衝突させたとき、ビーム粒子の種類とエネルギーが

- ^{12}C 、8MeV のとき

荷電数 3 5.5%

荷電数 4 57%

荷電数 5 52%

荷電数 6 3.5%

- ^{13}C 、8MeV のとき

荷電数 3 9.4%

荷電数 4 70%

荷電数 5 40%

荷電数 6 1.2%

- ^{12}C 、16.6MeV のとき

荷電数 4 13%

荷電数 5 48%

荷電数 6 45%

- ^{13}C 、16.6MeV のとき

荷電数 4 16%

荷電数 5 51%

荷電数 6 40%

以上から計算すると、平均荷電数はそれぞれ

^{12}C 、8MeV 4.45

^{13}C 、8MeV 4.27

^{12}C 、16.6MeV 5.30

^{13}C 、16.6MeV 5.22

となる。ただし、パーセンテージは合わないので、単なる重みづけとして計算している。

5.4 微分断面積

実験結果から微分断面積を計算する。

重心系における微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\delta\sigma}{\delta\Omega} \times \frac{1}{N} \times \frac{1 + \frac{\cos\theta_{CM}}{n}}{\left(1 + \frac{2\cos\theta_{CM}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (117)$$

と計算できる。ただし

$\delta\sigma$: 散乱された粒子数 / 入射粒子数

散乱された粒子のエネルギーはゆらいであり、決まった値だけで観測されるわけではないので、ヒストグラムのピークに入っている点の総数を粒子数として考える。

入射粒子数は FC の返したパルス数を ξ として

$$\frac{\xi \times 10^{-10} [\text{Coulomb}]}{e} \times \frac{1}{\text{平均荷電数}}$$

平均荷電数は FC に入る粒子の平均荷電数として計算したもの

e は素電荷 $e = 1.60217 \times 10^{-19}$ Coulomb

$\delta\Omega$: 検出器に入る散乱粒子の立体角

$$\delta\Omega = 2.633 \times 10^{-4} \text{ str}$$

N : ターゲットの単位面積あたりの粒子数

$$N = \frac{\nu}{A} \times N_b$$

ν は単位面積あたりの質量

- ^{12}C のとき $57.51\mu\text{g}/\text{cm}^2$
- ^{13}C のとき $47.82\mu\text{g}/\text{cm}^2$

A は原子量 (12 または 13)

N_b はアボガドロ数 6.022×10^{23}

θ_{CM} : 重心系での散乱角

$$\cos\theta_{CM} = \frac{\tan^2\theta_{lab}}{\tan^2\theta_{lab} + 1} \times \left[\frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{\tan^2\theta_{lab}} + 1\right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\tan^2\theta_{lab}}\right)} \right]$$

θ_{lab} は実験室系での散乱角、 n はビーム粒子とターゲット粒子の質量比

5.5 実験値の誤差の求め方

実験で得られたグラフがどの程度か信頼できるかを調べるために、各点の微分断面積の値の誤差量を評価したい。微分断面積はいくつかの観測量から計算されるため、それらの誤差の大きさが評価されることになる。

5.5.1 誤差の伝播

直接測定できる観測量が x_1, x_2, \dots, x_n (ただし相関はないものとする) で、求めたい物理量 f が $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と与えられるとする。観測誤差 $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ から生じる f の誤差 δf を求めたい。全微分の式から

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \delta x_n \quad (118)$$

と、誤差を予想できるが、これでは δf を大きく見積もりすぎている。なぜなら、この値はそれぞれの観測量がすべて最大の誤差をとった場合であり、そのような可能性は極めて低いと考えられるからである。

一般的には以下の式が誤差伝播の式として知られている。

$$\delta f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \delta x_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \delta x_n^2 \quad (119)$$

この式の証明は [8] 「計測による誤差解析入門」によると、誤差の値を標準偏差とし、その値が十分に小さいこと、またそれぞれの観測量の分布が正規分布になることを仮定することで証明している。しかし正規分布を仮定しなくても証明はできると思われる。和の分散はそれぞれの分散の和で与えられ、定数倍の分散は定数の二乗倍の分散になるので、求める関数がある点で線形近似すれば、求める分散はそれぞれの分散の線形結合で与えられるはずである。

さて、この計算式では、一般には偏微分係数を計算する際に、全ての観測量を代入する必要があるので少し面倒である。しかし本実験では、求めたい微分断面積は観測量の剰余計算によってほとんど求まるので、もう少し簡単に計算できる。すなわち $f = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)$ と表される

とき、

$$\left(\frac{\delta f}{f} \right)^2 = \left(\frac{df_1}{dx_1} \right)^2 \left(\frac{\delta x_1}{f_1} \right)^2 + \left(\frac{df_2}{dx_2} \right)^2 \left(\frac{\delta x_2}{f_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{df_n}{dx_n} \right)^2 \left(\frac{\delta x_n}{f_n} \right)^2 \quad (120)$$

となる。これは (119) 式の偏微分計算を実行して、両辺を f^2 で割れば得られる。 $\frac{\delta f}{f}$ を相対誤差といい、積の誤差の計算の場合は相対誤差の二乗和で与えられる。たとえば $f = x_1x_2$ ならば

$$\left(\frac{\delta f}{f} \right)^2 = \left(\frac{\delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2} \right)^2 \quad (121)$$

となる。

5.5.2 炭素膜の誤差計算

炭素膜の単位面積当たりの質量を微分断面積の計算に使うため、その誤差を先に計算しなくてはならない。具体的な厚さの計算と誤差の値は 5.3 に記してあるので、エネルギーの計算式と誤差の計算方法だけを記す。X はそれぞれの炭素膜でのヒストグラムにあらわれるピークの位置の ch の

値である。現れたグラフをガウス近似して、中央値と分散が求まる。Y は α 線を直接測定したときの値で 6259.6ch で誤差は 0.8887ch である。

$$E(x, y) = 5.486 \frac{Y - X}{Y + 1.8} \quad (122)$$

これを (118) に代入して、

$$\delta E^2 = \left(5.486 \frac{1}{Y + 1.8} \delta X \right)^2 + \left(5.486 \frac{X + 1.8}{Y + 1.8} \delta Y \right)^2 \quad (123)$$

エネルギーの誤差が求まったので、Bethe-Bloch の公式から炭素膜の単位面積当たりの質量の誤差が求まる。

5.5.3 微分断面積の誤差

微分断面積の誤差を考慮する観測量と誤差の評価は以下である。誤差は正、負どちらにも同じ大きさとして、その絶対値は Integrate の値、FC のパルス数はポアソン分布に従うと仮定して、誤差は値の平方根とする。計測器による誤差は最小目盛りの ± 0.5 倍を誤差としている。平均荷電数の値については値を決める方法が特殊なので、誤差の値はおおよその値である（やや過大評価である）。

- I : Integrate の値、 $\delta I = \sqrt{I}$
- F : FC のパルス数、 $\delta F = \sqrt{F}$
- A : 平均荷電数、 $\delta A = 0.1$
- ϕ : スリットの穴の半径、 $\delta \phi = 0.005 \text{ cm}$
- L : スリットと針との距離、 $\delta L = 0.05 \text{ cm}$
- l : スリットの厚さ、 $\delta l = 0.05 \text{ mm}$
- ρ : ターゲットの単位面積あたりの質量、前章を参照
- θ_{lab} : 実験室系の散乱角、 $\theta_{lab} = 0.1^\circ$

これらより微分断面積は以下のように与えられる。ただし相対誤差の計算では、定数倍は影響しないので省略する。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{IF\phi^2\rho}{A(L+l)} f(\theta_{cm}) \quad (124)$$

$$f(\theta_{cm}) = \frac{1 + \frac{\cos \theta_{cm}}{n}}{\left(1 + 2\frac{\cos \theta_{cm}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (125)$$

ここで、 n は入射粒子の質量 m_a とターゲットの質量 m_x の質量比で、 $n = \frac{m_x}{m_a}$ である。また、 θ_{cm} は重心系の散乱角であり、実験室系の散乱角 θ_{lab} との関係は次の式で与えられる。

$$\tan \theta_{lab} = \frac{\sin \theta_{cm}}{\frac{1}{n} + \cos \theta_{cm}} \quad (126)$$

(124) を (120) 式に代入すると微分断面積の相対誤差が求まる。 $\theta_{cm} = g(\theta_{lab})$ とおくと

$$\left(\frac{\delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\right)^2 = \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(2\frac{\delta\phi}{\phi}\right)^2 + \left(\frac{\delta(L+l)}{L+l}\right)^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{d(f \circ g)}{d\theta_{lab}}\right)^2 \left(\frac{\delta\theta_{lab}}{f}\right)^2 \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g)}{d\theta_{lab}} &= \frac{df(\theta_{cm})}{d\theta_{cm}} \cdot \frac{dg(\theta_{lab})}{d\theta_{lab}} \\ &= \frac{\sin\theta_{cm}\left(2 + \frac{\cos\theta_{cm}}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \frac{\cos\theta_{cm}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n} + \cos\theta_{cm}\right)^2}{\cos^2\theta_{lab}\left(1 + \frac{\cos\theta_{cm}}{n}\right)} \end{aligned} \quad (128)$$

ここでは全ての観測量の誤差を考えているが、二乗和で与えられるので相対誤差が他と比べて小さいものがあれば、無視しても構わない。例えば δl は δL に比べ小さいので、無視していい。これを計算すると、ほぼ全ての点で相対誤差は 5~6% 程度となる。これらの誤差の原因のほとんどがスリットの穴の半径やスリットと針の距離など、定規やノギスによる測定誤差であり、角度や Integrate の値の誤差の大きさにほぼ依らなくなっている。

6 データ解析・考察

6.1 ^{12}C - ^{13}C 8.0MeV

入射ビームを ^{12}C 、8.0MeV、ターゲットを ^{13}C にし、散乱実験を行った。

6.1.1 ROOT による解析

実験では散乱した ^{12}C だけではなく、反跳された ^{13}C 、あるいは炭素膜に含まれる未知の粒子が観測される可能性がある。よって得られたヒストグラムからそれら余分な粒子を除いて、粒子数を計測しなくてはならない。

具体的にヒストグラムを見ると、実験室系で 26° まではガウス関数に近い形になり、ほとんど入射粒子だけが観測されていると考えられる。 30° 以降はピークを含む山のエネルギーの小さいところに、徐々に小さな山が見え始め、角度が大きくなるにつれ、大きくなるのが分かる。ここで見られる高エネルギー側の山は入射粒子 ^{12}C 、低エネルギー側の山は反跳粒子 ^{13}C であると考えられる。

これを判断する理由としては二つある。一つは、ラザフォード散乱は散乱角が大きくなるにつれ、微分断面積が小さくなるが、反跳粒子が観測される場合は散乱角の逆方向になるため、角度が大きくなるにつれ、だんだんと大きくなる。よって、山の大きさの変化をヒストグラムで見比べれば二つの粒子が判断できる。また、運動学の計算から、それぞれの散乱角でのエネルギーの値が求められるが、入射粒子の方が反跳粒子に比べ、大きなエネルギーとして観測される。これが二つ目の理由である。エネルギーとチャンネルにはほぼ比例関係があり、0.1MeV でおおよそ 70~100ch に対応する。表 7 から、小さい角度では二つの粒子のエネルギーの値はかなり近く、それぞれの粒子を区別できないことがわかる。角度が大きくなるにつれ、二つのエネルギー差はだんだんと大きくなり、また反跳粒子の微分断面積の値も大きくなるため、散乱粒子の山の低エネルギー側に、反跳粒子の山が見え始める。

実験室系の角度 (°)	散乱粒子 (MeV)	反跳粒子 (MeV)
10	7.78	7.75
14	7.57	7.52
18	7.29	7.22
22	6.96	6.87
26	6.58	6.45
30	6.15	5.99
34	5.69	5.49
38	5.20	4.96
42	4.69	4.41
46	4.17	3.85
50	3.66	3.30
54	3.15	2.76
58	2.67	2.24
60	2.44	2.00

表 7: エネルギー分布

このことから、ヒストグラムの右側の山が ^{12}C であると分かったので、図 9 のように右側に見える山を ROOT でガウス近似を行い、その積分値を粒子数とする。

6.1.2 ラザフォード散乱との比較と考察

ラザフォードの公式から、理論値を求め、実験値と比較した。以下の表 8 に実験データ、図 10 のグラフに理論値との比較を示す。グラフに単位が書かれていないが、横軸が観測した角度 (重心系)、縦軸は対数目盛りで微分断面積 (mb/str) を表す。

グラフから分かることは

- 全体的に理論値より実験値が低い。
- 角度が大きくなるにつれ、微分断面積の値がおおよそ小さくなっている。
- 70 °以降実験値の曲線が波うち、ラザフォードの公式と明らかに違う。

ROOT を用いて、山を二つに分離しているのは 60 °以降の値であり、そこからラザフォードの公式との曲線の形から、あきらかに大きくずれていることから、山の分離がうまくいっていないと考えられる。しかし、ヒストグラムを見ると、二つの山はかなり広いエネルギー領域で重なっており、正確に分離するという事は難しい。仮に分離したときにラザフォードの公式とうまく一致したとしても、結果から恣意的に選んだものになるだろう。

他の原因としては、実験を行ったときは二つの山をあわせた粒子数を計測することで、十分に粒子数がたまったことを判断したが、散乱角が大きい領域では実際にはその多くは反跳粒子であり、

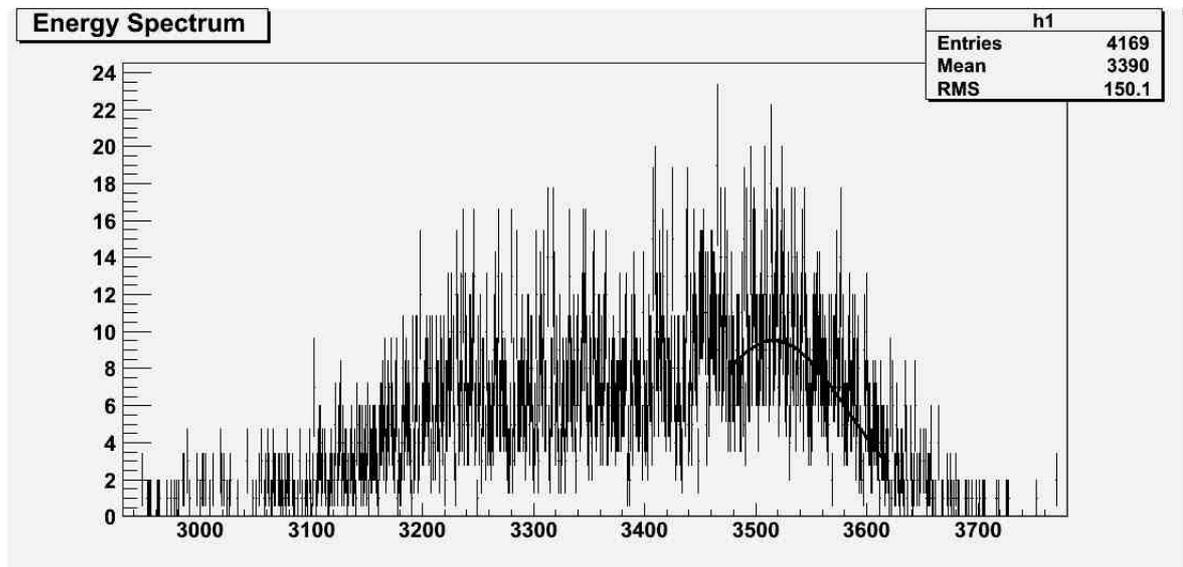


図 9: 42 °(lab) でのヒストグラム

図 10: ラザフォードの公式との比較

重心系の角度 (°)	粒子数 (個)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (mb/str)
19.2	5935	6.08E+04
26.9	4642	1.59E+04
34.6	3311	5.83E+03
42.2	3507	2.74E+03
49.9	4282	1.47E+03
57.5	2865	6.83E+02
65.1	1888	3.84E+02
72.6	1571	1.87E+02
80.1	703	7.74E+01
87.6	948	8.80E+01
95.0	999	8.01E+01
102.3	500	4.62E+01
109.5	675	1.10E+02
113.1	602	8.27E+01

表 8: 実験データ

散乱粒子の粒子が十分に含まれていないために、散乱角が大きくなると解析が困難になっている。実際図 11 から分かるように、60°のグラフでは散乱粒子による山の形はほとんど分からない(大きく見えているのは反跳粒子の山である)。

6.1.3 分離をやめて計算をする

散乱粒子と反跳粒子の分離が難しいため、分離をせずに粒子数をすべて計測し、散乱粒子と反跳粒子が両方含まれているものとして、理論計算(散乱粒子と反跳粒子を足したもの)と比較した。表 9 は実験データ、図 12 は理論値との比較をグラフにしたものである。

- 全体的に理論値より実験値が低い。
- だいたい 90°までは値が低くなり、それ以降値が上昇する。
- 曲線の形は実験値と理論値はおおよそ同じである。
- 60°の点では曲線が不自然に思える。

6.1.4 実験値を定数倍する

何らかの原因で、全体的に実験値はある割合で、小さくなっていると仮定するならば、全ての実験値をある定数倍にすれば真の値が出ると考えられる。定数倍を行った実験値と理論値で $\chi^2 = \frac{(\text{定数} \times \text{実験値} - \text{理論値})^2}{\text{理論値}}$ を計算し、その値がもっとも小さくなる定数を探せば、仮定のもと、二つ

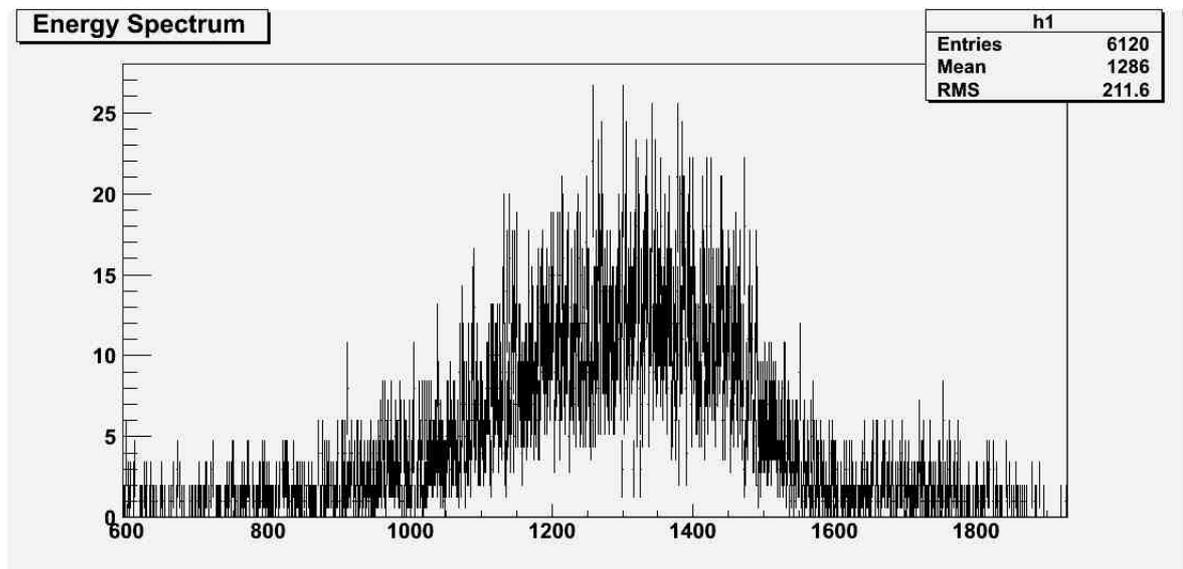


図 11: 60 °(lab) でのヒストグラム

図 12: 散乱粒子と反跳粒子をあわせる

重心系の角度 (°)	粒子数 (個)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (mb/str)
19.2	5935	6.08E+04
26.9	4642	1.59E+04
34.6	3311	5.83E+03
42.2	3507	2.74E+03
49.9	4282	1.47E+03
57.5	4029	9.61E+02
65.1	3336	6.78E+02
72.6	4235	5.05E+02
80.1	3921	4.32E+02
87.6	4578	4.25E+02
95.0	5260	4.35E+02
102.3	5803	5.35E+02
109.5	4869	8.26E+02
113.1	5936	8.73E+02

表 9: 反跳粒子を足した微分断面積

の曲線がどの程度一致するか分かる。 χ^2 がもっとも小さくなる値は実験値の 2.08 倍であった。図 13 は定数倍した実験値と理論値の比較である。

表 10 を見ると、60 °の点の χ^2 値、21.02 でかなり理論値からずれているとわかる。60 °では散乱粒子の粒子を十分量を計測していないために、正確な値が出ていないとも考えられるが、定数倍の値に根拠はほぼないので、60 °が一概に不正確とまでは言えない。それでもあえて考えるならば、60 °では先ほども述べたとおり入射粒子の観測量が十分ではないので、正しい結果が得られていない可能性はある（影響は小さいが否定できるほどでもない）。

χ^2 値の合計は 103.91 で、期待される値、すなわち自由度の数 14 からはかなりずれているので、曲線が一致しているとはいえなさそうであるが、測定角度を増やせば誤差が小さくなり、曲線の一致が得られるのではないかと思う。

6.1.5 誤差による一致の評価

実験結果の微分断面積には、各測定値の誤差をうけて、ある程度のずれがある。具体的な計算方法は誤差解析の項に記すが、計算を行うと、全ての角度で約 6.3 %の誤差があると計算された。これは主に距離を測る器機、例えばノギスや定規による測定誤差である（それらの誤差だけで 5.8 %ある）。先ほどの定数倍を行ったときには、もっとも適切な値を χ^2 という値を用いて決めたが、理論値の値を分散の値、すなわち誤差の二乗値として評価していると考えられる。ポアソン分布に従うならば、平均値（この場合、理論値を平均と仮定する）と分散の値は一致するために $\chi^2 = \frac{(\text{実験値} - \text{理論値})^2}{\text{理論値}}$ の値の期待値は自由度と等しくなると考えられる。いわゆる χ^2 検定というもので、分散の分かっていない場合にも検定ができるので便利な方法である。

図 13: 定数倍したグラフ

しかし、今は誤差、標準偏差が分かっているので別の方法をとることができる。すなわち

$$\chi^2 = \frac{(\text{定数} \times \text{実験値} - \text{理論値})^2}{(\text{誤差})^2} \quad (129)$$

のように χ^2 を定義し直すことで先ほどと同様のことができる。ただし、実験値が定数倍されるにつれ、誤差も定数倍されることに注意して計算する必要がある。これは最小二乗法と言われ、関数の近似をするときによく用いられる方法である。今回の場合、理論値の値よりも誤差の二乗の方がかなり大きいため、検定を行えば、先ほどよりゆるい条件で一致してると言える。しかし、この計算の目的は検定ではなく、理論値からのずれを誤差の影響として処理できるかどうかということ进行调查することである。理論値からのずれが、誤差の範囲であれば、もはや解析してもそれほど有意な結果は得られないとっていいだろう。

さて、これによって、得られた定数は 2.16 であった。表 11 に得られた値と理論値との差、誤差、 χ^2 の値を示す。

58 °、60 °では値が 1 を超えているが、正規分布の場合、約 26 % 程度の確率で 1.28 以上の値をとる。見た目では 60 °は大きくずれているように感じるが、統計的には有意な差とは言えない。合計値を見ると 5.731 で、自由度が 14 なので、実験値と理論値は一致していると言える。

6.1.6 結論

以上より、ラザフォード散乱の公式で異種粒子における微分断面積の値を予想できるといってもある程度は問題なさそうである。

ただし、この値は散乱粒子と反跳粒子をあわせたものであり、どちらも散乱角が小さい領域での効果しか現れていない。散乱角が大きい領域での一致を調べるのならば、まずはそれらの角度で

実験室系の角度 (°)	χ^2
10	19.9
14	2.18
18	17.23
22	8.74
26	11.68
30	0.18
34	0.08
38	1.03
42	1.77
46	0.9
50	8.17
54	9.17
58	1.88
60	21.02
合計	103.91

表 10: χ^2 値

の計測時間を長く取り、十分に散乱粒子をためる必要があると思われる。二つの山の分離については、理論的に散乱粒子と反跳粒子のエネルギーを求めて、ガウスフィットするときの中央値とすれば、ある程度うまくいきそうであるが分離の限界はあると思われる。分離を正確にするためには完全なガウス関数の和の形に近づける必要があり、そういった意味でも計測時間を長くするべきかもしれない。これは実験をやり直してみないとうまくいくか分からない。どの程度の計測時間が適切なのかということは興味深いが今の自分には判断できない。

とはいえ単にラザフォードの公式を調べただけならば、分離が容易な別の粒子の散乱実験にすべきであろう。しかし、この実験結果だけでも、異種粒子と同種粒子の散乱の違いは十分に分かるので、分離をしなくても目的の一つは達成している。

実験室系の角度 (°)	理論値との差	誤差	χ^2
10	6505	8326	0.610
14	1016	2171	0.219
18	6	797	0.000
22	-6	374	0.000
26	-76	201	0.143
30	59	131	0.199
34	65	93	0.494
38	8	69	0.012
42	-6	59	0.009
46	6	58	0.010
50	-55	60	0.849
54	-62	73	0.725
58	123	113	1.178
60	-135	120	1.282
合計			5.731

表 11: 誤差をもとにした χ^2 値

6.2 $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}(8\text{MeV})$

6.2.1 微分断面積

得られたデータから重心系における微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を計算すると表 12 のようになる。
表 12 を片対数グラフにすると図 14 のようになる。

図 14: figure1

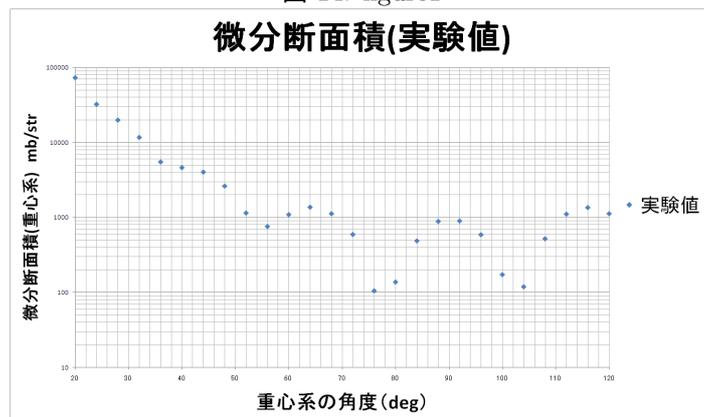


表 12: 微分断面積

$\theta_{c.m.}$	$d\Omega$ に入る粒子数	$\frac{d\sigma}{d\Omega_{c.m.}}$ (実験値)
20	4.20E+03	73409.80433
24	4.74E+03	32522.6424
28	1.52E+04	20012.06985
32	4.32E+03	11769.10755
36	3.87E+03	5547.70423
40	3.11E+03	4655.201991
44	3.64E+03	4054.421995
48	3.07E+03	2640.807272
52	3.71E+03	1155.647832
56	3.01E+03	764.0466697
60	3.21E+03	1100.45081
64	3.68E+03	1381.382988
68	5.33E+03	1130.345085
72	4.13E+03	598.2458954
76	4.15E+03	106.0902041
80	3.12E+03	139.0634611
84	3.90E+03	491.1142803
88	6.02E+03	893.4607769
92	7.39E+03	905.9554145
96	1.49E+04	593.8704693
100	4.80E+03	174.3772354
104	3.81E+03	120.1025638
108	5.92E+03	524.2092527
112	9.42E+03	1116.359382
116	1.32E+04	1365.624937
120	7518	1131.249639

6.2.2 理論値との比較

実験値と理論値の比較を行う。

まずは、同種粒子のラザフォード散乱の微分断面積の理論値との比較を行う。

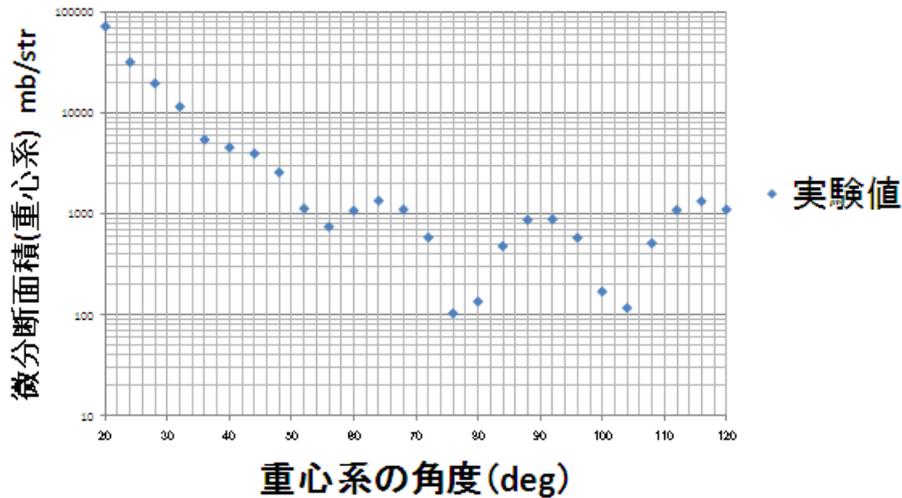
図 16 は、微分断面積の実験値とラザフォード散乱の微分断面積の理論値を同じグラフに描いたものである。

図 16 のグラフをみればわかるように、二つの曲線はかなり異なった振る舞いを見せている。やはり、理論の章で扱ったように、同種粒子の散乱の微分断面積はラザフォードの公式では説明できない。

次に、モットの公式との比較を行う。理論が正しければ、今回の実験値はモットの公式で説明で

図 15: Rutherford

C12-C12 (8MeV) 微分断面積(実験値)



きるはずである。ここでは、モットの公式との比較により ^{12}C の原子核の持つスピンを決定したい。 ^{12}C の原子核は陽子が 6 個、中性子が 6 個の合計 12 個の核子で構成されていると考え、その合成スピンは 0,1,2,3,4,5,6 のいずれかであると考えられる。そこで、Mott の公式 (??) を用いて微分断面積を計算し、実験値との比較を行うことでスピンを決定する。

実験値と各スピンの理論値を合わせて表にすると表 13 のようになる。これらの数値より、各スピンの理論値に対する実験値の χ^2 値は以下ようになった。

s	χ^2
0	43873
1	43583
2	43800
3	43925
4	44003
5	44056
6	44095

χ^2 値が最も小さいのは $s = 1$ の時である。しかし全てのスピンで χ^2 値が大きすぎることに他のスピンとの差がほとんどないことから、 χ^2 値からだけでは ^{12}C の原子核のスピンの値を決定することはできない。

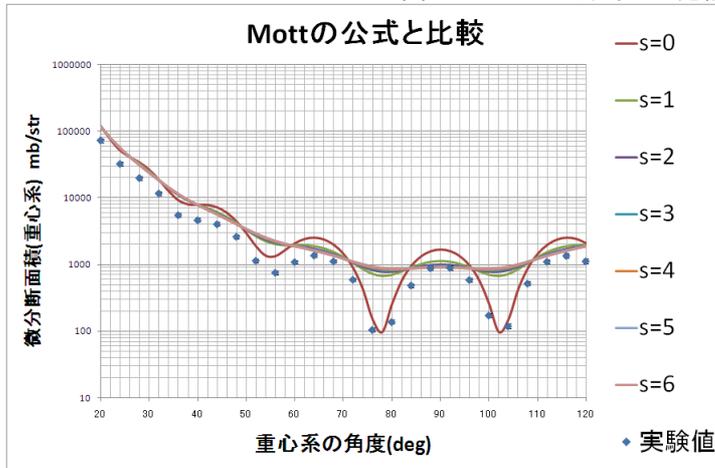
そこで、上の表をグラフにすると図 16 のようになった。

このグラフより、実験値と定性的に合うのは $s = 0$ である。よって、 ^{12}C の原子核のスピンは 0 である可能性が高いと言える。しかし、スピン 0 の理論値に対する χ^2 値が大きいため、統計的に

$\theta_{c.m}$	実験値	0	1	2	3	4	5	6
20	72823	119762	116959	116399	116159	116025	115940	115881
24	32263	51631	54737	55358	55624	55772	55866	55932
28	19852	34089	31872	31429	31239	31133	31066	31019
32	11675	18700	18439	18386	18364	18351	18343	18338
36	5503	9211	10830	11154	11293	11370	11419	11453
40	4618	7908	7840	7826	7820	7817	7815	7814
44	4022	7209	6051	5820	5721	5665	5630	5606
48	2620	4410	4127	4071	4047	4033	4025	4019
52	1146	1874	2627	2777	2842	2878	2901	2916
56	758	1340	2002	2135	2192	2223	2243	2257
60	1092	2086	1940	1910	1898	1891	1886	1883
64	1370	2536	1868	1734	1677	1645	1625	1611
68	1121	1980	1524	1433	1393	1372	1358	1348
72	593	886	1045	1077	1090	1098	1103	1106
76	105	150	719	832	881	908	925	937
80	138	256	698	787	825	846	859	869
84	487	960	898	886	881	878	876	875
88	886	1586	1091	991	949	925	910	900
92	899	1586	1091	991	949	925	910	900
96	589	960	898	886	881	878	876	875
100	173	256	698	787	825	846	859	869
104	119	150	719	832	881	908	925	937
108	520	886	1045	1077	1090	1098	1103	1106
112	1107	1980	1524	1433	1393	1372	1358	1348
116	1355	2536	1868	1734	1677	1645	1625	1611
120	1122	2086	1940	1910	1898	1891	1886	1883

表 13: Mott

図 16: Mott の公式との比較



スピンの 0 であるとは断言できない。

6.2.3 定数倍

微分断面積の実験値に全ての角度で共通の定数 c をかけてみた。 χ^2 値が最小になる時の c の値とその時の 1 自由度あたりの χ^2 値を表にしたものが表 14 である。以下の表で df は自由度 (Degree of Freedom) を表し、今は $df = 26$ を代入している。

表 14: χ^2

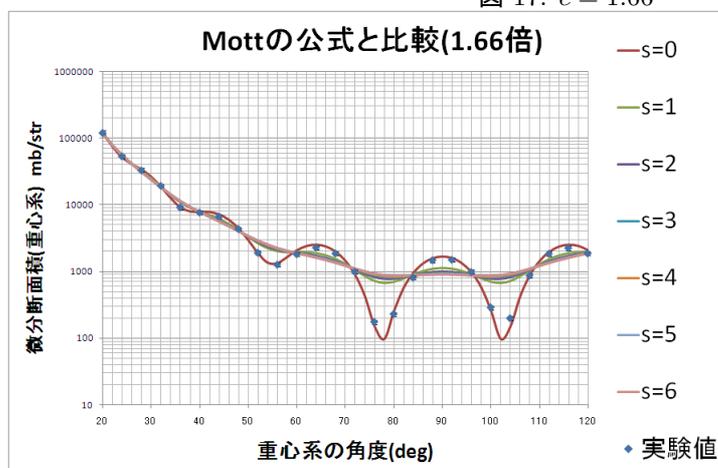
s	c	χ^2/df
0	1.66	15.78
1	1.63	114.0
2	1.62	160.8
3	1.62	183.9
4	1.61	197.5
5	1.61	206.4
6	1.61	212.8

表より、定数倍すると $s = 1$ の χ^2 値が最小である。しかも他のスピンとは数倍の差がある。よって、微分断面積の定数倍の不定性を除けば、 ^{12}C の原子核のスピンは 0 であると言える。この定数倍の不定性の原因については、後の考察で述べる。

また、 $c = 1.66$ とした時のグラフを図 17 に示しておく。

上のデータ解析では、 χ^2 値が最小であるということから ^{12}C の原子核のスピンは 0 であると結論付けた。しかしこの結論は、 $s = 0$ の Mott の公式に対する χ^2 値が十分小さいから言えるわけ

図 17: $c = 1.66$



ではなく、他のスピンに比べて χ^2 値が小さいという理由からくるものである。ここでは、 $s = 0$ の Mott の公式に対する χ^2 値が大きくなる理由を考える。

6.2.4 Net Integrate の扱い

先に述べたように、微小立体角に散乱される粒子の数はヒストグラムのピークの中に入っているデータ数 (Net Integrate) としている。しかし、この操作はバックグラウンドの影響を考慮に入れていない。つまり、ピークの中に入っているデータの中にはバックグラウンドによるノイズも含まれていて、この操作によってこれらのデータも散乱された粒子数として数えてしまっていることになる。

この問題を解決するためには、Net Integrate の値からノイズの分のデータ数を引けばよい。ノイズの正確なデータ数を求めるのは難しいが、バックグラウンドの効果だけが現われている領域を用いて近似的に求めることができる。その手法の手順は以下のように説明される。

1. ピークの両側でバックグラウンドの効果だけが現われているチャンネルの領域をそれぞれ1つずつ選択する。(200ch 程度)
2. それぞれの領域の両端のチャンネル $a, b (a \leq b)$, データの総量 n を求める。
3. それぞれの領域の中心のチャンネル $\frac{a+b}{2}$ にデータが $\frac{n}{b-a}$ 個入っているとして、2点間の直線近似でその間のノイズのデータ数の密度を近似する。
4. ピークの中のノイズのデータ数 N はピークの両端のチャンネル $A, B (A \leq B)$ と及び上の直線より求められる。

上の手順を公式にしておく。

ピークよりもチャンネルが小さい領域を 1、ピークよりもチャンネルが大きい領域を 2 とする。以下添え字 i は $i = 1, 2$ で、それぞれ領域 1、領域 2 の物理量を表すことにする。領域の両端のチャンネルを $a_i, b_i (a \leq b)$ とし、データの総量を n_i とする。領域の中心 $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ にデータが $\frac{n_i}{b_i - a_i}$ 個入っている。ここで、チャンネルを x , データ数を y とおくと、近似直線は以下の式で表せる。

$$y = \frac{\frac{n_1}{b_1 - a_1} - \frac{n_2}{b_2 - a_2}}{\frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{a_2 + b_2}{2}} \left(x - \frac{a_1 + b_1}{2} \right) + \frac{n_1}{b_1 - a_1} \quad (130)$$

ここで、ピークの両端のチャンネルをそれぞれ $A, B (A \leq B)$ とすると、ピークの中のノイズの個数 N は次のようになる。

$$N = (B - A) \left(\frac{\frac{n_1}{b_1 - a_1} - \frac{n_2}{b_2 - a_2}}{a_1 + b_1 - a_2 - b_2} (A + B - a_1 - b_1) + \frac{n_1}{b_1 - a_1} \right) \quad (131)$$

よって、Net Integrate の値から上のノイズの個数を引けばノイズの効果は弱まる。

しかしこの修正をする時間がなかったため、この修正は行っていない。

6.2.5 ターゲット内の不純物

今回の実験で用いたターゲットは ^{12}C の薄膜であるが、この中に ^{12}C 以外の原子核が混ざっていた場合、微分断面積に影響するはずである。以下では、不純物となる原子核の候補として、 ^{16}O , ^1H , ^{23}Na , ^{35}Cl を考える。これらが候補に選ばれる理由は、炭素膜を作った過程に由来する。膜を扱う時に膜を水に浮かべていたため、炭素内に水分が残っている可能性がある。また、炭素膜とプレパラートの間に剥離剤として NaCl が使われているため、炭素内に Na や Cl が残っている可能性がある。これらの理由から、不純物の候補として ^{16}O , ^1H , ^{23}Na , ^{35}Cl を考えることにする。なお、ここではビームは純粋な ^{12}C のイオンであると仮定する。

この4つの不純物の区別は、散乱された粒子のエネルギーの違いで区別できると考えられる。理論の式??を用いて各物質と弾性散乱した ^{12}C のエネルギーの理論値を求めることができる。ここで、チャンネルの基準を、10deg のエネルギーが 7.76MeV (理論) でのピークのチャンネルが 5902 であるということを仮定する。前方のピークの形はガウス関数に近く、後方に比べてピークの精度が高いという考えによりこの仮定を採用した。この仮定の下では、エネルギー $E(\text{MeV})$ に対して対応するチャンネル T は

$$T = \frac{5902T}{E} \quad (132)$$

で決定する。各角度における、各物質と弾性散乱した ^{12}C のエネルギーに対応するチャンネルを表にしたものが表 15 である。 ^1H を入れていないのは、今回の実験で測った角度には理論的に散乱粒子が来ないからである。

表を見ると、前方はチャンネルが密集していて後方はチャンネルは離れている傾向にあるのがわかる。 ^{12}C 同士のピークの幅が最大でも 500 チャンネル程度であることから、チャンネルが 500 チャンネル以上離れる角度よりも後方ではピークが分離されている。よって後方は不純物による影響はないと考えられる。よって、上の表から次のことが言える。

1. $\theta = 20$ より後方では ^{35}Cl による影響はない。
2. $\theta = 24$ より後方では ^{23}Na による影響はない。
3. $\theta = 36$ より後方では ^{16}O による影響はない。

これらの角度を目安にヒストグラムを見直すと、実際に ^{16}O , ^{23}Na , ^{35}Cl の理論値にかなり近いチャンネル付近でデータの密度の濃い領域が存在した。これより不純物として ^{16}O , ^{23}Na , ^{35}Cl の存在を仮定して話を進める。

表 15: 不純物の散乱エネルギー

$\theta_{lab}(\text{deg})$	^{12}C	^{16}O	^{23}Na	^{35}Cl
10	5.90E+03	5.95E+03	5.99E+03	6.02E+03
12	5.82E+03	5.89E+03	5.95E+03	5.99E+03
14	5.73E+03	5.82E+03	5.90E+03	5.96E+03
16	5.62E+03	5.74E+03	5.84E+03	5.92E+03
18	5.50E+03	5.65E+03	5.78E+03	5.88E+03
20	5.37E+03	5.55E+03	5.71E+03	5.84E+03
22	5.23E+03	5.44E+03	5.64E+03	5.79E+03
24	5.08E+03	5.33E+03	5.55E+03	5.73E+03
26	4.92E+03	5.20E+03	5.47E+03	5.67E+03
28	4.74E+03	5.07E+03	5.37E+03	5.61E+03
30	4.56E+03	4.94E+03	5.28E+03	5.55E+03
32	4.38E+03	4.80E+03	5.18E+03	5.48E+03
34	4.18E+03	4.65E+03	5.07E+03	5.41E+03
36	3.98E+03	4.50E+03	4.96E+03	5.33E+03
38	3.78E+03	4.34E+03	4.85E+03	5.25E+03
40	3.57E+03	4.18E+03	4.73E+03	5.17E+03
42	3.36E+03	4.02E+03	4.61E+03	5.09E+03
44	3.15E+03	3.86E+03	4.49E+03	5.00E+03
46	2.94E+03	3.69E+03	4.37E+03	4.92E+03
48	2.72E+03	3.53E+03	4.24E+03	4.83E+03
50	2.51E+03	3.36E+03	4.12E+03	4.74E+03
52	2.31E+03	3.20E+03	3.99E+03	4.65E+03
54	2.10E+03	3.03E+03	3.87E+03	4.56E+03
56	1.90E+03	2.87E+03	3.74E+03	4.47E+03
58	1.71E+03	2.72E+03	3.62E+03	4.37E+03
60	1.52E+03	2.56E+03	3.49E+03	4.28E+03

以下では各不純物について、考察したことを述べる。

^{16}O については、今回測った角度内では ^{12}C 同士のピークの Net Integrate を計算するのに影響を与えていない。3つの不純物の中で一番ピークを確認しやすく、データ量も多いので、 ^{12}C 同士のピークに ^{16}O のピークが入り込んでしまう角度を測定の範囲に入れて実験すると、その角度では ^{12}C 同士のピークの Net Integrate に影響を与えるかもしれない。

^{23}Na , ^{35}Cl については、今回測った角度内では ^{12}C 同士のピークの Net Integrate を計算するのに影響を与えていない。更に、この二つはピークの位置が角度によってはあるのかわからないくらいで、たとえ影響を与える位置にピークがあっても Net Integrate の値に対してかなり小さい値の変動しか起こさない。

以上より、不純物として考えられるものの中で ^{12}C 同士のピークの Net Integrate を計算するのに影響を与えているものは存在せず、不純物の存在は χ^2 値が大きくなる理由にはならない。

6.3 8Mev における C13 同士の衝突

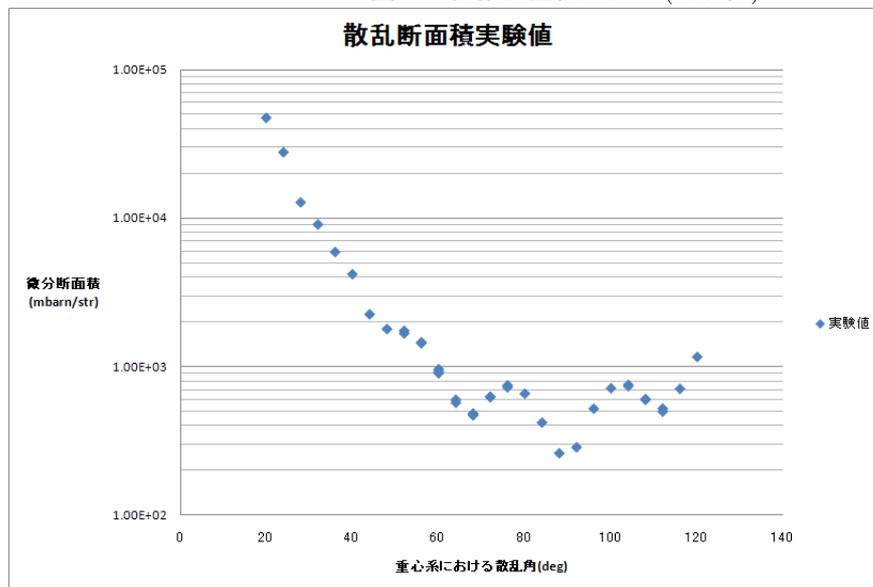
6.3.1 実験内容

質量数 13 の炭素標的に質量数 13 の炭素を 8Mev のエネルギーで衝突させた。

6.3.2 結果

実験結果を元に、散乱断面積を計算すると、その角度分布は図 18 のようになった。なお、複数回計測している角度もある。

図 18: 散乱断面積グラフ (実験値)



縦軸は散乱断面積、横軸は重心系の角度

表 16: 微分断面積

重心系の角度	d に入る粒子数	$\frac{d\sigma}{d\Omega_{c.m.}}$ [mb]
20	9.57E+10	1.01E+05
24	3.15E+11	5.93E+04
28	3.82E+11	2.73E+04
32	4.29E+11	1.94E+04
36	5.92E+11	1.27E+04
40	9.09E+11	9.00E+03
44	8.81E+11	4.84E+03
48	1.44E+12	3.85E+03
52	1.31E+12	3.75E+03
52	4.81E+12	3.60E+03
56	1.44E+12	3.13E+03
56	2.22E+12	3.09E+03
60	2.32E+12	2.07E+03
60	6.03E+12	2.00E+03
60	3.08E+12	1.94E+03
64	3.38E+12	1.29E+03
64	4.31E+12	1.23E+03
68	4.53E+12	1.04E+03
68	5.51E+12	1.02E+03
68	1.35E+13	1.01E+03
72	3.46E+12	1.35E+03
72	3.76E+12	1.34E+03
76	7.61E+12	1.61E+03
76	3.41E+12	1.56E+03
80	6.39E+12	1.42E+03
84	5.33E+12	9.06E+02
88	9.76E+12	5.63E+02
92	9.40E+12	6.18E+02
96	6.61E+12	1.12E+03
100	9.73E+12	1.54E+03
104	4.53E+12	1.62E+03
104	7.02E+12	1.59E+03
108	5.58E+12	1.30E+03
108	6.98E+12	1.29E+03
112	1.02E+13	1.12E+03
112	8.69E+12	1.07E+03
116	7.81E+12	1.53E+03
120	6.78E+12	2.50E+03

図 19: ヒストグラム

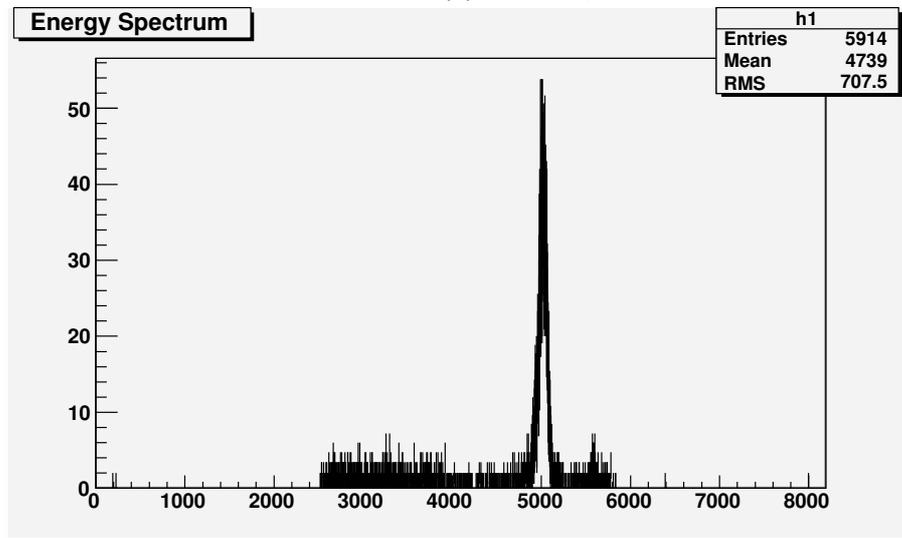
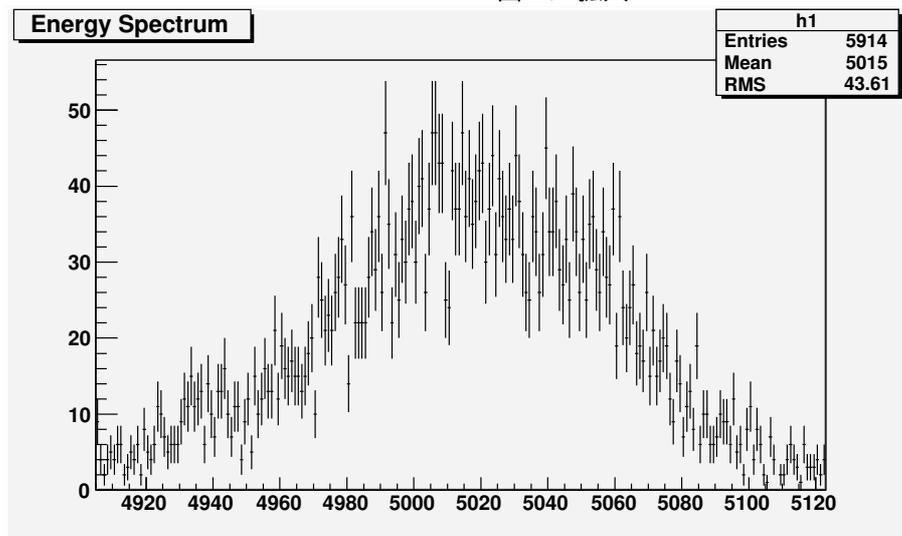


図 20: 拡大



なお、検出器で測定されたデータのヒストグラムは図 19 のように表わされるが、それを図 20 のように拡大し、この範囲の中にあるデータの数を実験値とした。2つのピークが重なっているようなこともなかったので、ガウスフィットなどもしなかった。

同種粒子の衝突で、かつエネルギーが比較的に低いので、この角度分布は Mott の散乱公式に従うと予想される。実際に Mott の散乱公式から理論値を出すと表 17、図 21 のようになる。ここで、Mott の公式に代入するスピンの値を $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ の場合に分けた。

そして、その 7つの理論値と Rutherford 散乱の理論値をそれぞれ実験値でカイ二乗検定すると、スピン $1/2$ の Mott の式で値が最小であった。このことからスピンの値は $1/2$ であることが分かる。

表 17: 微分断面積

微分断面積								
重心系角度	s=1/2	s=3/2	s=5/2	s=7/2	s=9/2	s=11/2	s=13/2	ラザフォード
20	1.12E+05	1.14E+05	1.14E+05	1.15E+05	1.15E+05	1.15E+05	1.15E+05	1.16E+05
24	5.86E+04	5.75E+04	5.71E+04	5.69E+04	5.68E+04	5.67E+04	5.66E+04	5.63E+04
28	3.01E+04	3.04E+04	3.05E+04	3.06E+04	3.06E+04	3.07E+04	3.07E+04	3.08E+04
32	1.73E+04	1.78E+04	1.80E+04	1.80E+04	1.81E+04	1.81E+04	1.82E+04	1.83E+04
36	1.27E+04	1.22E+04	1.20E+04	1.19E+04	1.18E+04	1.18E+04	1.18E+04	1.16E+04
40	8.27E+03	8.04E+03	7.96E+03	7.92E+03	7.90E+03	7.88E+03	7.87E+03	7.81E+03
44	4.72E+03	5.10E+03	5.22E+03	5.29E+03	5.32E+03	5.35E+03	5.37E+03	5.47E+03
48	3.50E+03	3.74E+03	3.82E+03	3.86E+03	3.89E+03	3.90E+03	3.92E+03	3.99E+03
52	3.39E+03	3.20E+03	3.13E+03	3.10E+03	3.08E+03	3.07E+03	3.06E+03	3.00E+03
52	3.39E+03	3.20E+03	3.13E+03	3.10E+03	3.08E+03	3.07E+03	3.06E+03	3.00E+03
56	2.92E+03	2.63E+03	2.53E+03	2.48E+03	2.45E+03	2.43E+03	2.42E+03	2.33E+03
56	2.92E+03	2.63E+03	2.53E+03	2.48E+03	2.45E+03	2.43E+03	2.42E+03	2.33E+03
60	1.91E+03	1.89E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.87E+03	1.87E+03	1.87E+03
60	1.91E+03	1.89E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.87E+03	1.87E+03	1.87E+03
60	1.91E+03	1.89E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.87E+03	1.87E+03	1.87E+03
64	1.08E+03	1.31E+03	1.38E+03	1.42E+03	1.44E+03	1.46E+03	1.47E+03	1.53E+03
64	1.08E+03	1.31E+03	1.38E+03	1.42E+03	1.44E+03	1.46E+03	1.47E+03	1.53E+03
68	8.90E+02	1.09E+03	1.16E+03	1.19E+03	1.21E+03	1.23E+03	1.24E+03	1.30E+03
68	8.90E+02	1.09E+03	1.16E+03	1.19E+03	1.21E+03	1.23E+03	1.24E+03	1.30E+03
68	8.90E+02	1.09E+03	1.16E+03	1.19E+03	1.21E+03	1.23E+03	1.24E+03	1.30E+03
72	1.17E+03	1.15E+03	1.14E+03	1.14E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.12E+03
72	1.17E+03	1.15E+03	1.14E+03	1.14E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.12E+03
76	1.41E+03	1.21E+03	1.14E+03	1.10E+03	1.08E+03	1.07E+03	1.06E+03	1.00E+03
76	1.41E+03	1.21E+03	1.14E+03	1.10E+03	1.08E+03	1.07E+03	1.06E+03	1.00E+03
80	1.28E+03	1.10E+03	1.04E+03	1.01E+03	9.91E+02	9.79E+02	9.71E+02	9.20E+02
84	8.45E+02	8.56E+02	8.60E+02	8.62E+02	8.63E+02	8.64E+02	8.64E+02	8.68E+02
88	4.75E+02	6.59E+02	7.20E+02	7.51E+02	7.69E+02	7.81E+02	7.90E+02	8.43E+02
92	4.75E+02	6.59E+02	7.20E+02	7.51E+02	7.69E+02	7.81E+02	7.90E+02	8.43E+02
96	8.45E+02	8.56E+02	8.60E+02	8.62E+02	8.63E+02	8.64E+02	8.64E+02	8.68E+02
100	1.28E+03	1.10E+03	1.04E+03	1.01E+03	9.91E+02	9.79E+02	9.71E+02	9.20E+02
104	1.41E+03	1.21E+03	1.14E+03	1.10E+03	1.08E+03	1.07E+03	1.06E+03	1.00E+03
104	1.41E+03	1.21E+03	1.14E+03	1.10E+03	1.08E+03	1.07E+03	1.06E+03	1.00E+03
108	1.17E+03	1.15E+03	1.14E+03	1.14E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.12E+03
108	1.17E+03	1.15E+03	1.14E+03	1.14E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.13E+03	1.12E+03
112	8.90E+02	1.09E+03	1.16E+03	1.19E+03	1.21E+03	1.23E+03	1.24E+03	1.30E+03
112	8.90E+02	1.09E+03	1.16E+03	1.19E+03	1.21E+03	1.23E+03	1.24E+03	1.30E+03
116	1.08E+03	1.31E+03	1.38E+03	1.42E+03	1.44E+03	1.46E+03	1.47E+03	1.53E+03
120	1.91E+03	1.89E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.88E+03	1.87E+03	1.87E+03	1.87E+03

表 18: 二乗/38

	s=1/2	s=3/2	s=5/2	s=7/2	s=9/2	s=11/2	s=13/2	Rutherford
二乗/38	3.14E+02	3.24E+02	3.30E+02	3.34E+02	3.36E+02	3.37E+02	3.38E+02	3.45E+02

表 19: χ^2

	s=1/2	s=3/2	s=5/2	s=7/2	s=9/2	s=11/2	s=13/2	ラザフォード
$\chi^2/38$	7.31E+01	9.67E+01	1.17E+02	1.29E+02	1.37E+02	1.43E+02	1.47E+02	1.75E+02
定数倍	2.16E+00	2.16E+00	2.16E+00	2.15E+00	2.15E+00	2.15E+00	2.15E+00	2.15E+00

縦軸が散乱断面積、横軸が重心系における角度

なお、グラフを見ると実験値が理論値よりも低いことが分かる。そこで、なんらかの原因のために微分断面積が小さくなってしまっていると考え、実験値を定数倍してみる。この現象は他の実験でも同様に見られるため、考えられる原因は別の章でまとめて説明する。

各理論値ごとに χ^2 が最小になるように、定数倍すると χ^2 の値は表 19 のようになる。

ここで、S=1/2 のときの Mott 散乱の式が、理論値の中で最初である。よって、この散乱は Rutherford の式ではなく、Mott の式に従い、また ^{13}C のスピンの値は 1/2 であることが確認できる。

実験値を 2.16 定数倍した後のグラフは図 22 のようになる。

図 21: 散乱断面積グラフ (実験値-理論値) 補正前

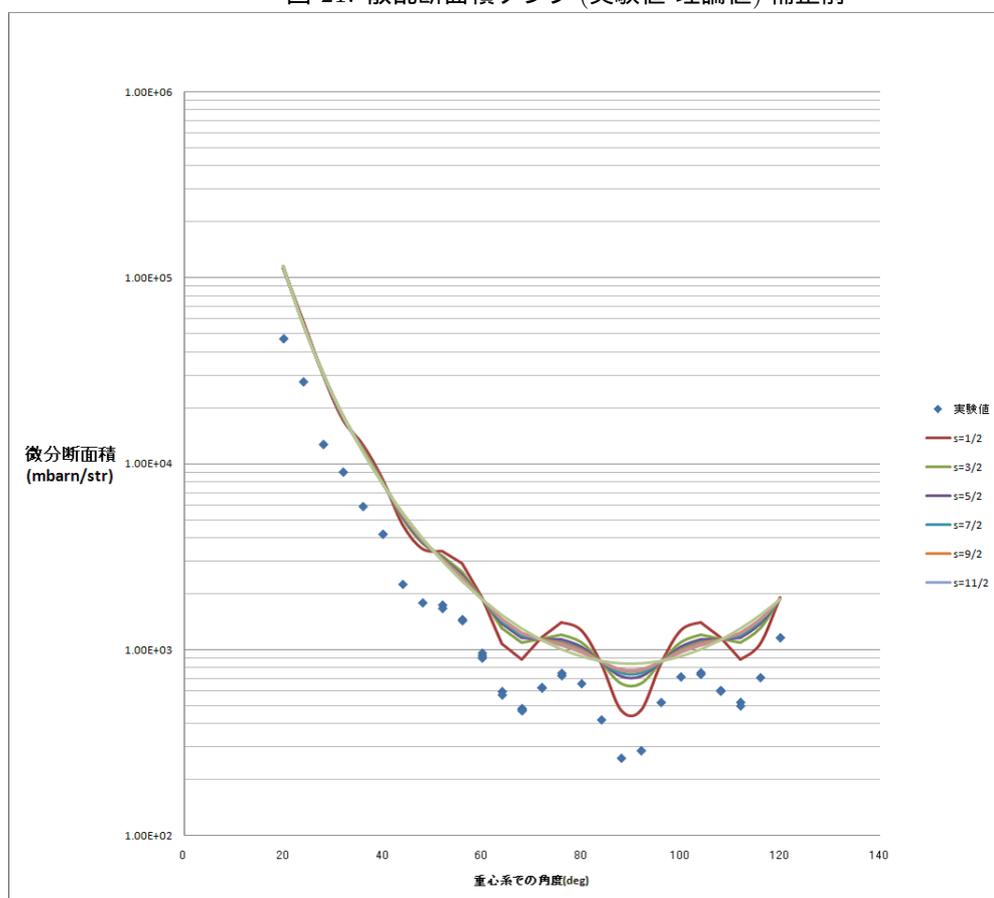
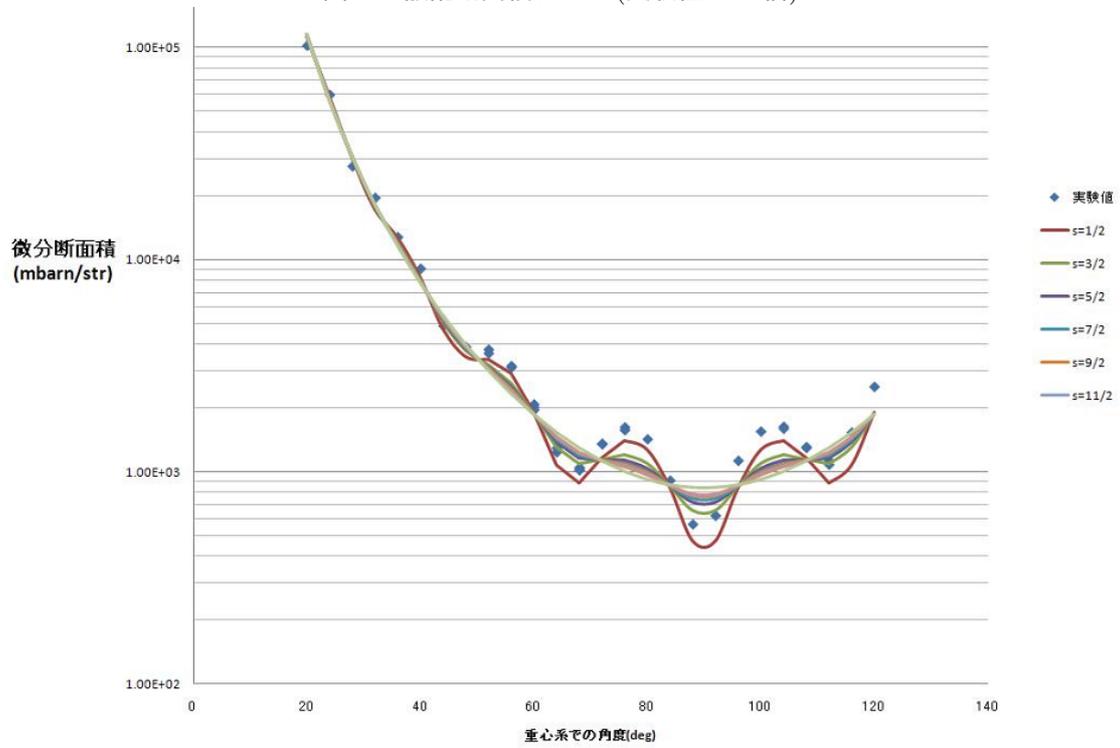


図 22: 散乱断面積グラフ (実験値 2.16 倍)



6.4 $^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$ 16.6MeV

実験で得られたヒストグラムから検出器に入ってきた粒子数を求め、重心系における微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を算出し、表 20 に示した。

表 20 の微分断面積と Mott 散乱、Blair 散乱の $l_{\max} = 6$ のときの理論値のグラフは図 23 のようになる。ただし、 $^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$ の 8MeV の結果より ^{12}C のスピン $S = 0$ とした。

表 20: 微分断面積

重心系の角度 (°)	粒子数 (個)	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (mb/str)
20	47410	1.62E+04
24	28110	7.37E+03
28	14520	4.31E+03
32	11960	2.87E+03
36	8044	1.97E+03
40	8743	1.27E+03
44	4485	7.81E+02
48	4593	4.90E+02
52	3711	3.45E+02
56	8704	2.58E+02
60	5567	2.00E+02
64	9909	1.50E+02
68	3743	8.64E+01
72	4876	4.21E+01
76	3608	1.66E+01
80	4194	1.65E+01
84	3752	3.03E+01
88	4776	4.17E+01
92	3648	4.11E+01
96	4692	2.97E+01
100	3836	1.65E+01
104	5307	2.17E+01
108	4495	5.16E+01
112	5633	9.93E+01
116	5581	1.62E+02
120	7736	2.16E+02

図 23 より、実験の結果は Mott 散乱、Blair 散乱とは定性的に一致しない。そこで、粒子の部分波がそれぞれ別の割合で吸収される ($S = 0$ であるから、 l が奇数の部分波は微分断面積に寄与しない) と考え、さらに実験値の全体を定数倍すると、表 21 のとき図 24 となり、換算 χ^2 値、 $\tilde{\chi}^2$ の値が最小になった。

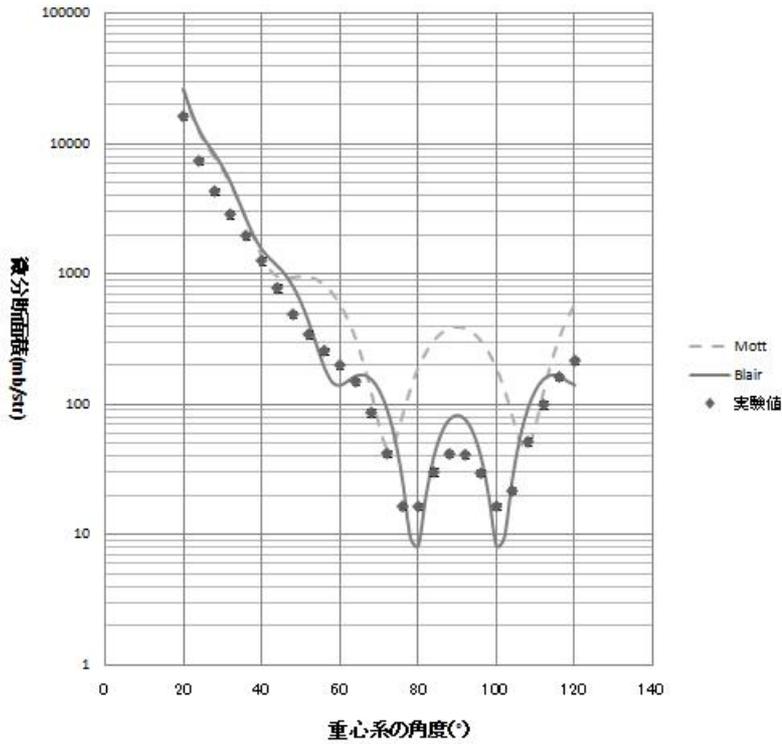


図 23: 微分断面積と Mott 散乱、Blair 散乱 ($l_{\max} = 6$)

表 21: l の吸収される割合と定数倍

l	吸収される割合 (%)
0	100
2	100
4	80
6	30
8 以上	0
倍率	1.64 倍
$\tilde{\chi}^2$	7.10

表 21 より、 l_{\max} を部分波が 50 % 以上吸収されている l とすると、 l_{\max} は 4 以上 6 以下の範囲に存在する。ここで、 l_{\max} を部分波が 50 % 以上吸収されている l とするのは、 l_{\max} 以下の l では、その部分波の多くは吸収されるが、一部はトンネル効果で吸収されずに散乱される。一方 l_{\max} 以上の l の部分波は多くが散乱されるが、一部は原子核に吸収される。そのため、 l_{\max} は部分波が 50 % 吸収される l とするのが妥当であると考えられるからである。

$l_{\max} = 4, 6$ のときについて式 (89) を用いて原子核間の距離 ρ を計算し、さらに原子核の半径 r は ρ の半分ほどであると考え r を求めると、表 22 のようになった。

従って、 ^{12}C の原子核半径は 3.69fm 以上 4.17fm 以下であると考えられる。

ちなみに、図 24 では 90° 付近で微分断面積の理論値と実験値が大きすぎてしまっているのを、

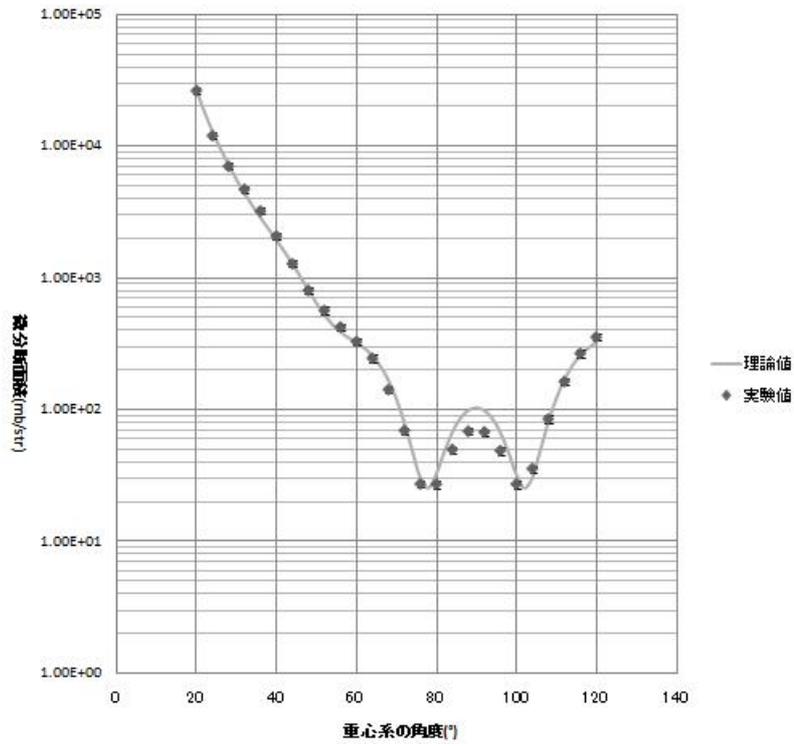


図 24: 実験値と Blair 散乱 (部分波調整)

表 22: 原子核半径

l	$\rho(\text{fm})$	$r(\text{fm})$
4	7.38	3.69
6	8.34	4.17

$60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ で再び $\tilde{\chi}^2$ をとると、表 23 のとき、 $\tilde{\chi}^2$ が最も小さくなり、図 26 となった。これは先ほどのグラフよりは 90° 付近で実験値と理論値が一致している。

l	吸収される割合 (%)
0	100
2	100
4	80
6	30
8	10
10 以上	0
倍率	1.57 倍
$\tilde{\chi}^2$	1.34

表 23: l の吸収される割合と定数倍

6.5 $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}, 16.6\text{MeV}$

MCA で得られたヒストグラムから、ピークに入っている点の数を数えるに当たって、ピークと思われる範囲の中の、Integrate を直接採用した。

またこの結果から、重心系における微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を求めた。表 24 に示す。

この値を、Blair 模型による散乱の理論式と比較する。スピンは $1/2$ とする。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \exp(2i\delta_0) \csc^2 \frac{\phi}{2} \exp \left\{ -i\eta \ln \left(\sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \right\} \pm \exp(2i\delta_0) \sec^2 \frac{\phi}{2} \exp \left\{ -i\eta \ln \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} \right) \right\} - \frac{i}{\eta} \sum_l (2l+1) \exp(2i\delta_l) P_l(\cos \phi) \mp \frac{i}{\eta} \sum_l (2l+1) \exp(2i\delta_l) P_l(-\cos \phi) \right|^2 \quad (133)$$

となる式の、吸収部分の Σ を、角運動量 l によって吸収率を変化させて重み付けした和を取り、実験結果と最もよく合う組み合わせを探した。

様々な組み合わせを試したところ、吸収率を表 25 のような値にしてかつ、理論値の全体を 0.601 倍にした場合が、最もよく一致しているように思えた。

比較したグラフは図 27 のようになる。

このとき、 χ^2 値を計算すると 53.37 となり、自由度 29 で割って換算 χ^2 を求めると、1.84 となる。

この値は、1 より有意に大きいとは言い切れない。

よって、この理論値と一致していると判断できる。

表 24: 微分斷面積

角度	Integrate	微分斷面積 (mbarn)
20	31780	1.545×10^4
24	11620	8.307×10^3
28	6127	4.262×10^3
32	5889	2.691×10^3
36	3692	1.667×10^3
40	4297	1.126×10^3
44	4391	7.576×10^2
48	5586	5.218×10^2
52	3898	3.131×10^2
56	4577	1.906×10^2
60	2979	1.222×10^2
64	8811	1.023×10^2
68	4075	9.013×10^1
72	4000	8.174×10^1
76	4607	6.525×10^1
80	3398	4.579×10^1
84	3395	2.661×10^1
88	3938	1.455×10^1
92	3947	1.586×10^1
96	3587	2.776×10^1
96	3819	2.944×10^1
100	4211	4.970×10^1
100	3948	5.213×10^1
104	4167	7.219×10^1
104	4357	7.409×10^1
108	4758	9.004×10^1
112	4115	1.014×10^2
116	4998	1.159×10^2
120	4029	1.462×10^2

表 25: 吸収率

l	
0	0
1	0.6
2	0.9
3	0.6
4	1
5	0.6
6	0.5
7	0.2
8	0.1
9	0.1
10 以上	0

原子核半径 データ解析の結果から、Blair 模型における部分波吸収の最大角運動量 l_{max} を 6 であるとしたとき、散乱されたときの原子核間距離 ρ を

$$\rho = \frac{Z^2 e^2 + \sqrt{Z^4 e^4 + 2 \frac{\hbar l_{max}(l_{max}+1)}{\mu} E}}{2E}$$

から計算すると、

$$r_0 = 8.2227 \text{ fm}$$

となった。

原子核半径は、この $\frac{1}{2}$ と考えられるので、4.1114 fm と求まる。

誤差解析 核実験パラメータ及びその誤差から、微分断面積の誤差を算出した。表 26 は各角度に対する実験誤差の程度である。

この誤差の幅でプロットして、同じ理論値と比較したのが図 28 のグラフである。

結果を見れば、誤差はどれも 6%程度であることがわかる。

表 26: 誤差

角度	絶対誤差	相対誤差
20	9.22×10^2	5.959%
24	4.96×10^2	5.959%
28	2.54×10^2	5.959%
32	1.61×10^2	5.959%
36	9.95×10^1	5.959%
40	6.72×10^1	5.959%
44	4.52×10^1	5.959%
48	3.11×10^1	5.959%
52	1.87×10^1	5.959%
56	1.14×10^1	5.959%
60	7.29	5.960%
64	6.10	5.960%
68	5.38	5.960%
72	4.88	5.960%
76	3.89	5.960%
80	2.73	5.961%
84	1.59	5.961%
88	8.68×10^{-1}	5.961%
92	9.47×10^{-1}	5.961%
96	1.66	5.962%
96	1.76	5.962%
100	2.97	5.962%
100	3.11	5.962%
104	4.31	5.963%
104	4.42	5.963%
108	5.38	5.964%
112	6.05	5.964%
116	6.92	5.965%
120	8.73	5.966%

6.6 原子核半径の文献値

文献によると [6]、スタンフォード大学電子線型加速器を用いた弾性散乱の実験によって原子核の大きさが求められている。

ここでは、電荷 Ze の球形核に重心系での運動エネルギー E_e の電子をぶつけたときの弾性散乱の微分断面積を、ボルン近似を用いて、

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2E_e \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 |F(q)|^2 \quad (134)$$

$$F(q) = \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin qr}{qr} 4\pi r^2 dr \quad (135)$$

ただし、

$$q = \frac{2E_e}{\hbar c} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (136)$$

とした。

次に、核表面がぼやけている分布を考え、

$$\rho(r) = \rho(0) \left\{ 1 + \exp\left(\frac{r - R_B}{a}\right)^{-1} \right\} \quad (137)$$

とし、実験に最も合う R_B 、 a の値を求めた。そして、平均 2 乗根半径 $\langle r^2 \rangle$ を

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (138)$$

で定義し、その $\langle r^2 \rangle$ と等しい値を与える一様分布を考え、その分布の半径を原子核半径 R_{eq} とした。(図 29)

このようにして ^{12}C から ^{209}Bi までのいろいろな球形核について調べると、質量数を A として、次の関係式が求められた。

$$R_{eq}/A^{\frac{1}{3}} \equiv r_0 = \text{一定} = 1.1 \sim 1.2(\text{fm}) \quad (139)$$

式 (139) を用いると、 ^{12}C 、 ^{13}C の原子核半径は表 27 のようになる。

	文献値 (fm)	今回の実験値 (fm)
^{12}C	2.5 ~ 2.7	3.69 ~ 4.17
^{13}C	2.6 ~ 2.8	4.11

表 27: 原子核半径の文献値

実験値が文献値より大きいのは、実験値では原子核間距離の半分を原子核半径としているが、実際には粒子が衝突するときに原子核同士が接していなかったためであると考えられる。

また、実験値から求めた r_0 は、 ^{12}C では $1.61 \sim 1.82\text{fm}$ 、 ^{13}C では 1.75 となる。 ^{12}C の値については、参考論文 [5] の ^{12}C 同士の散乱における r_0 の値 1.75 と一致する。

6.7 定数倍

今回行った5つの実験では、定数倍の不定性を除けば実験値と理論値はよく合うという結論に至った。ここで、各実験で行った χ^2 を最小にする倍率 c をまとめておく。

表 28: 各実験で行った定数倍の倍率

実験の種類	c
$^{12}\text{C} - ^{13}\text{C}, 8\text{MeV}$	2.08
$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}, 8\text{MeV}$	1.66
$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}, 8\text{MeV}$	2.16
$^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}, 16.6\text{MeV}$	1.64
$^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}, 16.6\text{MeV}$	1.66

この表を見ても、倍率 c が入射粒子のエネルギー、実験の種類にどう依存するのかわからなかった。しかし、どの実験でも $c \geq 1$ であるという共通点がある。

以下では定数倍の不定性が生じた原因について考える。微分断面積に定数倍の不定性を生じさせる原因として考えられるパラメータは

1. 平均荷電数
2. ターゲットの厚さ
3. ファラデーカップの値

の4つである。

平均荷電数は最大 20 %、ターゲットの厚さは最大 3 % の誤差が生じる可能性があり、合わせると微分断面積は最大 24 % の誤差が生じる可能性がある。よって、最大 2.16 倍 ($^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}, 8\text{MeV}$) の誤差が生じるためにはファラデーカップの値が最大 75 % の誤差をもつ必要がある。ファラデーカップはファラデーカップ内の電荷を計測する装置なので、ファラデーカップに入射粒子が当たった時に電子がファラデーカップの外に飛び出してしまうと、ファラデーカップは正の電荷を多く計測することになってしまう。よってファラデーカップの値には誤差が生じると考えられるが、75 % もの誤差を持つかどうかはわからなかった。さらに、この原因だけが誤差の原因であるとしてしまうと各実験によって倍率が異なることが説明できない。以上の事から、ここまで考えたことだけでは定数倍の不定性の原因が説明できないことがわかった。よって、今回考えていない原因によって定数倍の不定性が生じたと考えられる。

7 結論

異種粒子のクーロン散乱の微分断面積は Rutherford の公式で、同種粒子のクーロン散乱の微分断面積は Mott の公式で説明できた。これにより、同種粒子の示す対称性を確認できた。

核ポテンシャルの影響を受けるエネルギー領域では、Blair の公式を用いて微分断面積の実験値の説明ができた。

理論値と実験値の一致から、 ^{12}C のスピンは 0、 ^{13}C のスピンは $\frac{1}{2}$ であることがわかった。

原子核半径について、Blair 模型を用いて推定した原子核半径と文献値が大きく異なっていたことから、Blair 模型の考え方の限界が確認できた。

上記の理論値と実験値の一致は全て定数倍の不定性を除いたときの一致であり、定数倍の不定性の原因はわからなかった。

参考文献

- [1] Kunihiro Shima, Noriyuki Kuno, Mikio Yamanouchi, Hiroyuki Tawara. *ATOMIC DATA AND NUCLEAR DATA TABLES 51*, 180 (1992)
- [2] 猪木慶治・川合光 著, 「量子力学」講談社 (1999)
- [3] W.M.Gibson, "The Physics of Nuclear Reactions" Oxford, New York, Pergamon Press (1980)
- [4] A. メシア 著, 小出昭一郎・田村二郎 訳, 「量子力学」東京図書 (1981)
- [5] D.A.Bromley, J.A.Kuehner, and E.Almqvist "Heavy-ion Reaction Mechanisms. Elastic Scattering Data" in Proceedings (1960)
- [6] 八木浩輔 著, 「原子核物理学」基礎物理学シリーズ 4, 朝倉書店 (2004)
- [7] 笹川辰弥 著, 物理学選書 20 「散乱理論」裳華房 (2007)
- [8] John R.Taylor 著, 林茂雄・馬場涼 訳, 「計測における誤差解析入門」東京化学同人 (2008)
- [9] 国立天文台 編, 「理科年表 平成 22 年」丸善株式会社 (2009)
- [10] William R. Leo: "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments" (Springer-Verlag 1987)

図 25: figure3

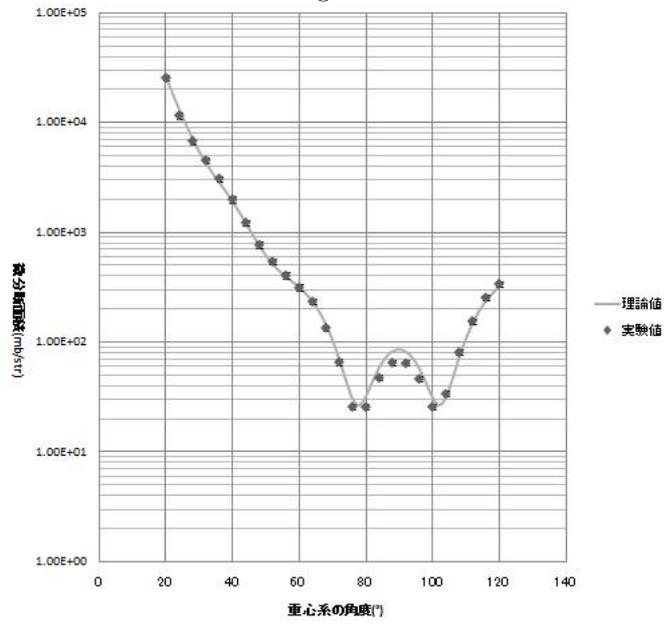


図 26: 実験値と Blair 散乱 (60° ~ 90°)

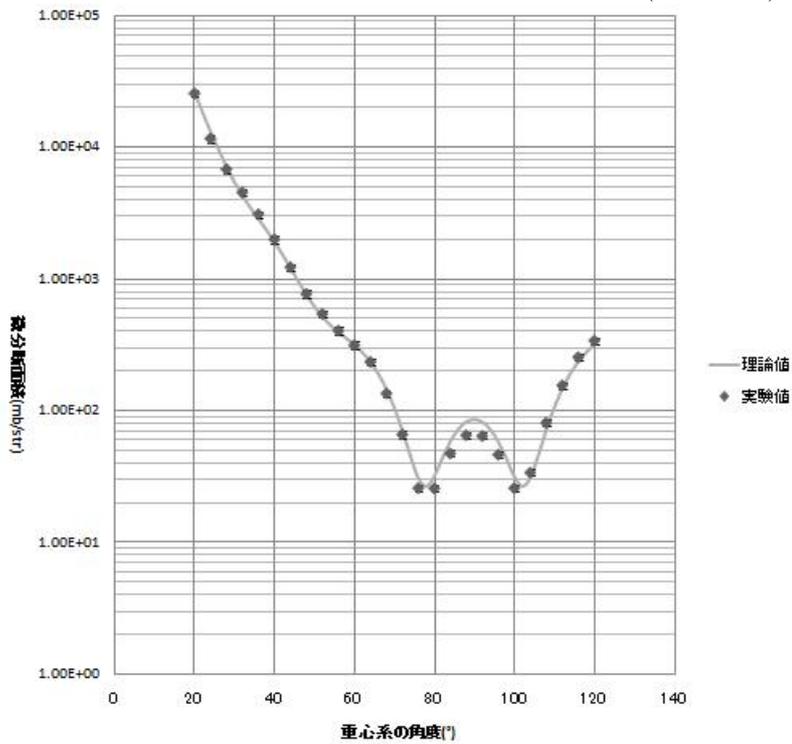
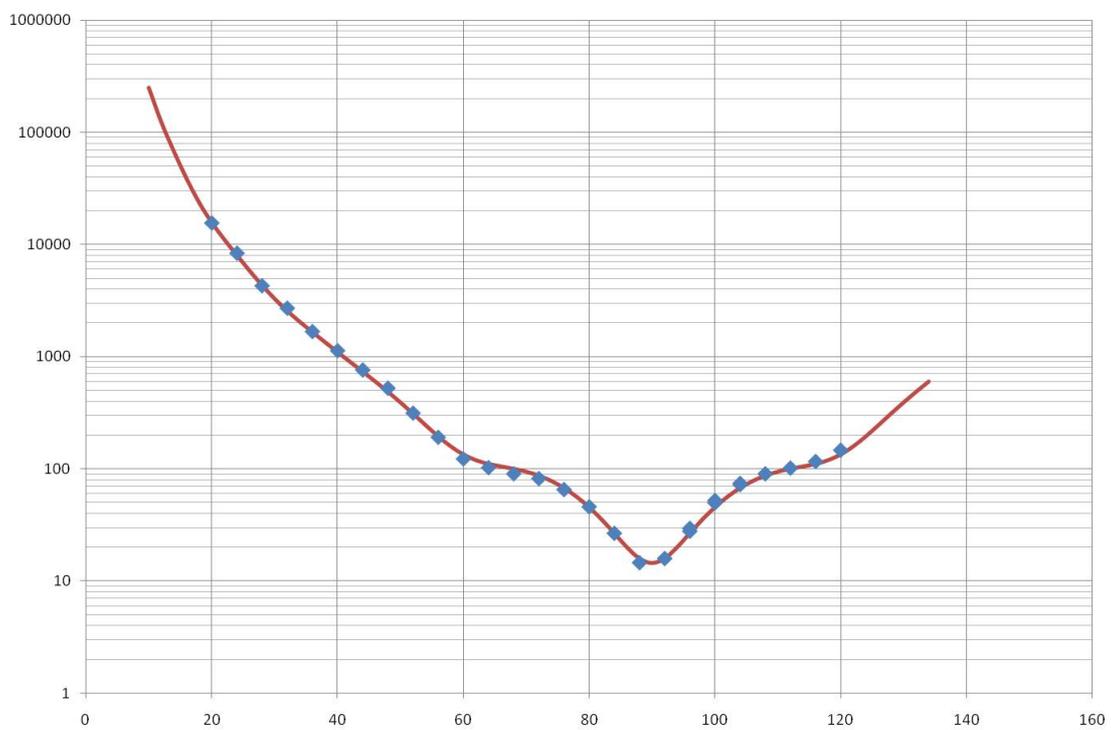


图 27: Blair



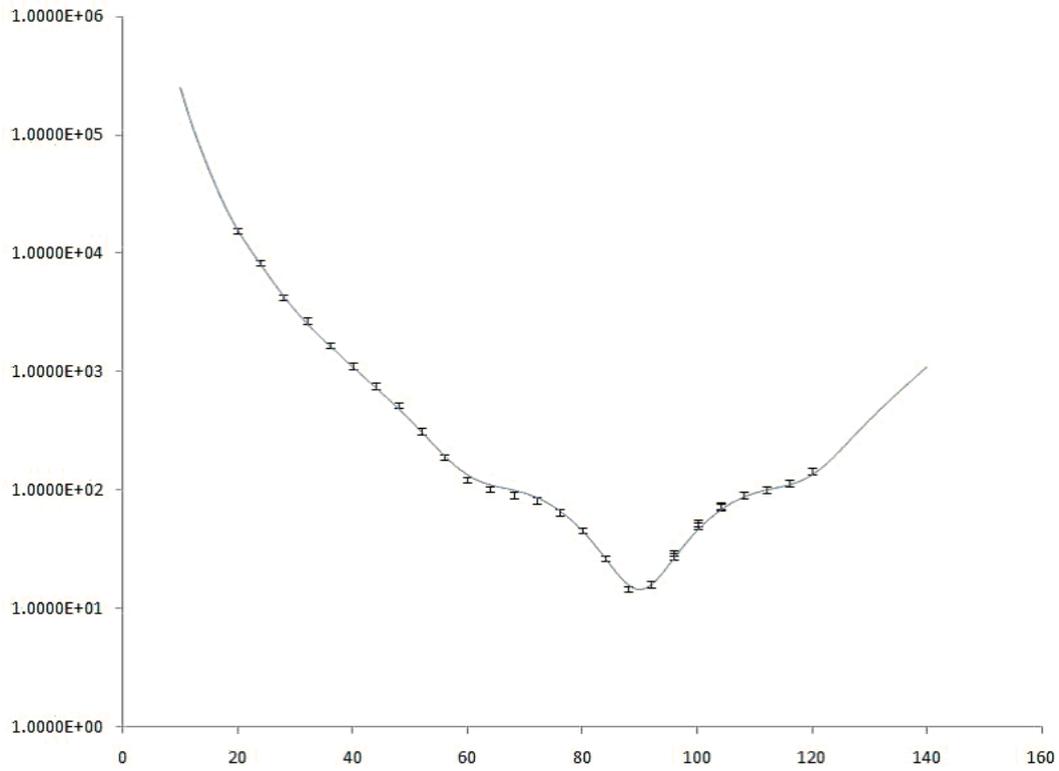


图 28: 误差解析

图 29: 文献值

