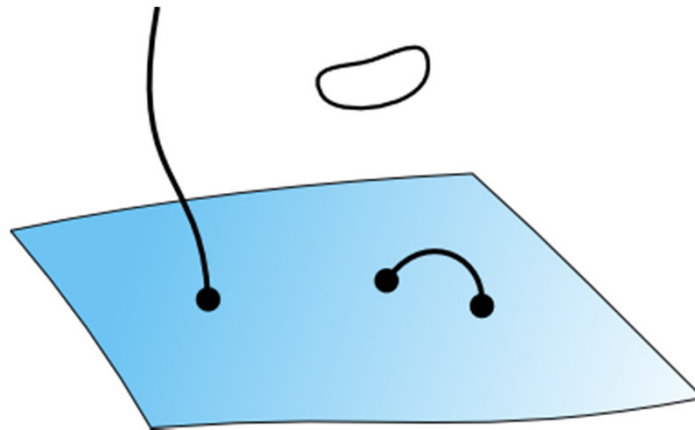
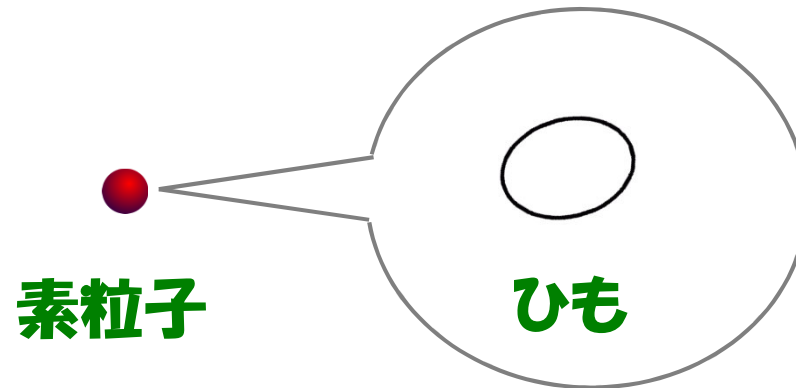


# ホログラフィック双対 と 強い力



# 1 イントロダクション

# 弦理論とは？



- 様々な素粒子をたった一つのひもで記述できる可能性がある！
- 特に、重力を媒介する重力子を自然に含み、矛盾のない量子重力理論になる！

➡ **究極の統一理論の候補！**

- 今でも魅力的なシナリオだが、まだ完成には至っていない。

**究極の理論の話**を期待して来られた方、  
**ごめんなさい。**  
**今日はこの話にはこれ以上**  
**深入りしません。**

**本日のキーワードは**

**ホログラフィック双対**

# ホログラフィック双対とは？

誤解を恐れずにざっくり言うと、

時間と空間を合わせて数える

4次元の平坦な時空中の  
ゲージ理論(素粒子の理論)

=

ある10次元の曲がった  
時空中の弦理論

等価！

- 時空の次元も異なり、理論の構成要素も異なるのに等価だと言っている！
- どんなゲージ理論でもこのような性質があるかどうかは不明。そうなる例が多数見つかっているという状況。
- 未だに証明はないが、非自明な証拠が非常にたくさんあり、今では広く受け入れられている。

**4次元**の平坦な時空上の  
ゲージ理論(**素粒子**の理論)

=

ある**10次元**の曲がった  
時空上の**弦理論**

**等価!**

時空の次元が異なる理論が等価になることから  
「**ホログラフィック双対**」と呼ばれる。



別名: ゲージ/ストリング双対性、ゲージ/重力対応、  
AdS/CFT対応、などとも呼ばれる。

- ① **なぜ、そんなことが言えるのか?**
- ② **どうして4次元の理論が高次元の理論と等価になり得るのか?**

後で議論するので、もう少しお待ちください。

- この双対性は1997年に当時まだ20代だったマルダセナが提唱し、研究者たちは衝撃を受けた。



(1998年の国際会議「Strings' 98」で、興奮した研究者たちがマルダセナダンスを踊っている様子)



マルダセナ

You start with the brane  
and the brane is BPS  
Then you go near the brane  
and the space is AdS  
Who knows what it means  
I don't I confess  
Ehhhh! Maldacena!

By Jeff Harvey (“マカレナ”の替え歌)

- ちなみにマルダセナのその論文の citation は10,000を超え、INSPIRE で検索できる論文の中で最も多い。

- さて、弦理論を研究していると言うと、分野外の人から、

「えー、そんな理論、  
一つも物証がないし、  
検証可能な予言もないし、  
科学とは言えないんじゃないの？」

というような批判を受けることがある。

- これが10年以上前だったら、

「いやいや、確かにまだ実験で検証されては  
いないけれど、これがすごい理論であることは  
もはや疑いようのないことなのですよ。」

みたいな反論を一生懸命するところだが、



- **これから説明するように、今や**

**「いやいや、弦理論を使って曲がいないにも  
様々な物理量を計算できて、実験値とかなり  
良く一致することも確かめられているし、  
予言もいろいろあるのですよ。」**

**という、より分かりやすい反論をすることができるようになった。**

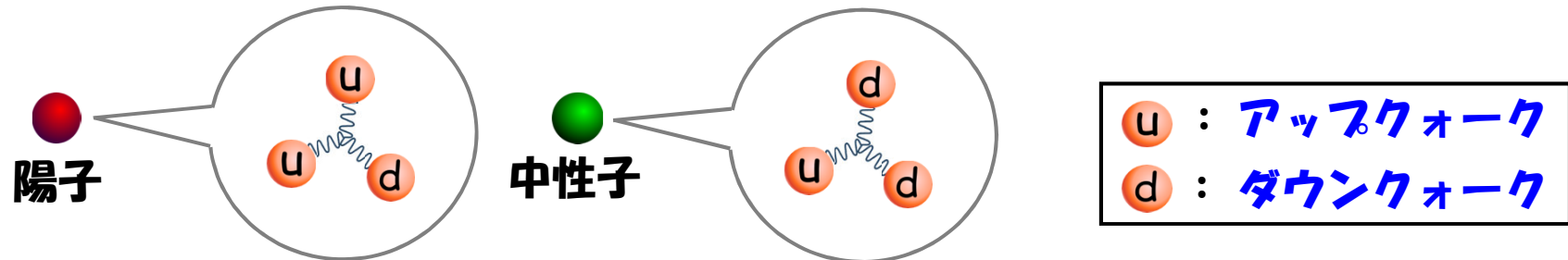
- **ただし、究極の統一理論としての弦理論ではなく、  
本日のもう一つのキーワードである**

**強い力**

**を記述する理論としての弦理論の話。**

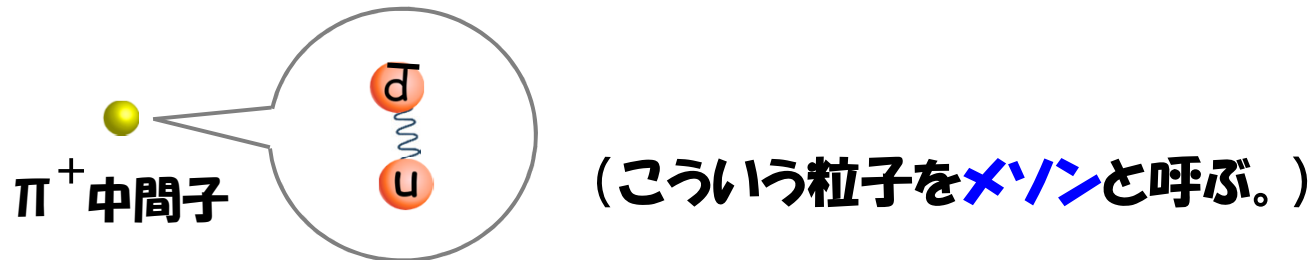
# 強い力とは？

- 陽子や中性子はクォークが3つくっついてできた複合粒子。













(こういう粒子を**バリオン**と呼ぶ。)

- クォークと反クォークがくっついてできた粒子もある。



- ここで、クォークや反クォークは非常に強い力でくっついている。この力のことを「**強い力**」と呼ぶ。

- 一般に、強い力で作られた複合粒子を**ハドロン**と呼ぶ。

|   |      |   |  |   |   |   |      |
|---|------|---|--|---|---|---|------|
| { | バリオン |  |  |  |  |  | etc. |
|   |      | $p$   | $n$  | $\Lambda$   | $\Sigma$  | $\Delta$  |      |
|   | メソン  |  |  |  |  |  | etc. |
|   |      | $\pi$   | $K$  | $\eta$  | $\rho$  | $\omega$  |      |

実験で確認されているハドロンは数百種類にも及ぶ。

- 1970年代になって、「**量子色力学(QCD)**」と呼ばれるゲージ理論が強い力の基礎理論として確立した。

**QCD**

$SU(N_c)$  ゲージ理論 ( $N_c = 3$ )

$A_\mu$        $\psi^i$        $i = 1, 2, \dots, N_f$

  $g$

  $q$

(   ...)

(gluon)

(quark)

強い力を媒介する素粒子

大変シンプルで美しい理論。しかし、解析が非常に難しい。

- ❗ QCDを解くことは現代物理学の重要な課題の一つ。
- ❓ QCDに対して、ホログラフィック双対が使えないものか？

**QCD**

?

ある**10次元**の曲がった  
時空上の**弦理論**

**等価！**

これから説明したいこと:

低エネルギーで QCD になるようなゲージ理論  
と等価な弦理論の記述が見つかる！

精度はまだあまり良いとは言えないが、さまざまな  
物理量を計算できる。

# Plan of Talk

- ✓ ① イン트로ダクション
- ② 第二次ストリング革命
- ③ Dフレインとホログラフィック双対
- ④ 様々な結果
- ⑤ ディスカッション

## ② 第二次ストリング革命

# ストリング革命

- **1<sup>st</sup> revolution (1984年頃～)** [Green-Schwarz 1984 ～]

**量子重力を含む究極の統一理論の候補**  
と呼ばれるようになった。

- **2<sup>nd</sup> revolution (1995年頃～)** [Polchinski 1995, Witten 1995 ～]

**いろいろな双対性、D-brane、M理論** などの発見を  
契機に弦理論の非摂動的な性質の理解が飛躍的に進んだ。

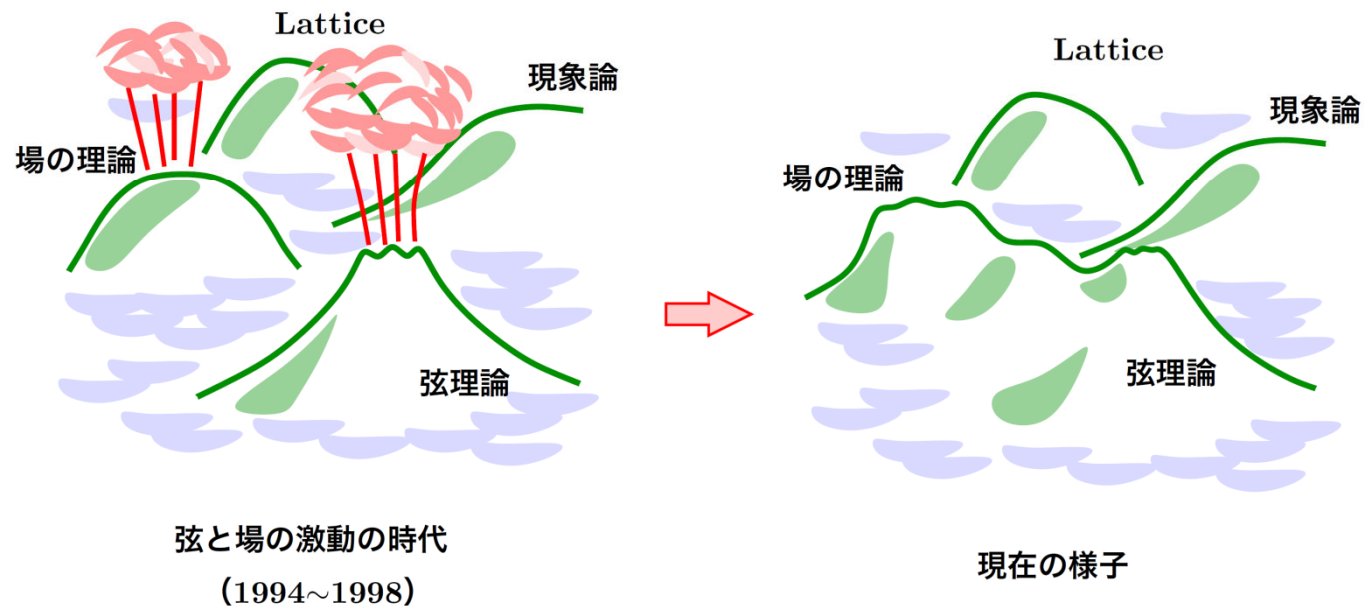


**様々なゲージ理論に対する弦理論を用いた  
全く新しい解析法が見出された。**

# 当時の様子

## 1998年度、教室発表会の素粒子論グループ報告より抜粋

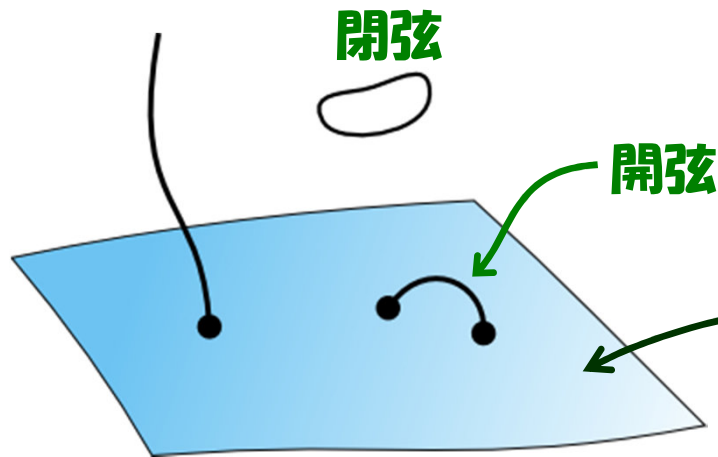
数年前までは、これらの4つの島の住人たちは、互いに影響を及ぼしあいながらも、割と独立して生活していたように思います。ところが、ここ数年の間に、弦理論と場の理論の間に大変大きな発展があって、現在では弦理論と場の理論の島はほとんど陸続きと言って良い状況になりました。





# 3 Dフレイムと ホログラフィック双対

# Dブレーンとは？

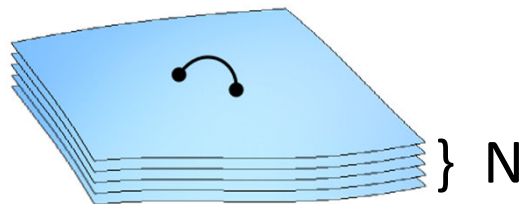


**D<sub>p</sub>-brane**

$\simeq$  弦が端を持てる(p+1)次元の壁

開弦からゲージ粒子が出ることが示される。

特にDブレーンがN枚重なっていると、U(N)ゲージ理論が実現される。



D<sub>p</sub>-brane



(p+1)次元のU(N)ゲージ理論

# 超重力理論におけるDブレーン

(超弦理論の低エネルギー有効理論)

- 一般相対論の教え: 重い粒子は時空を曲げる。



Einstein 方程式の解

Schwarzschild 解:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

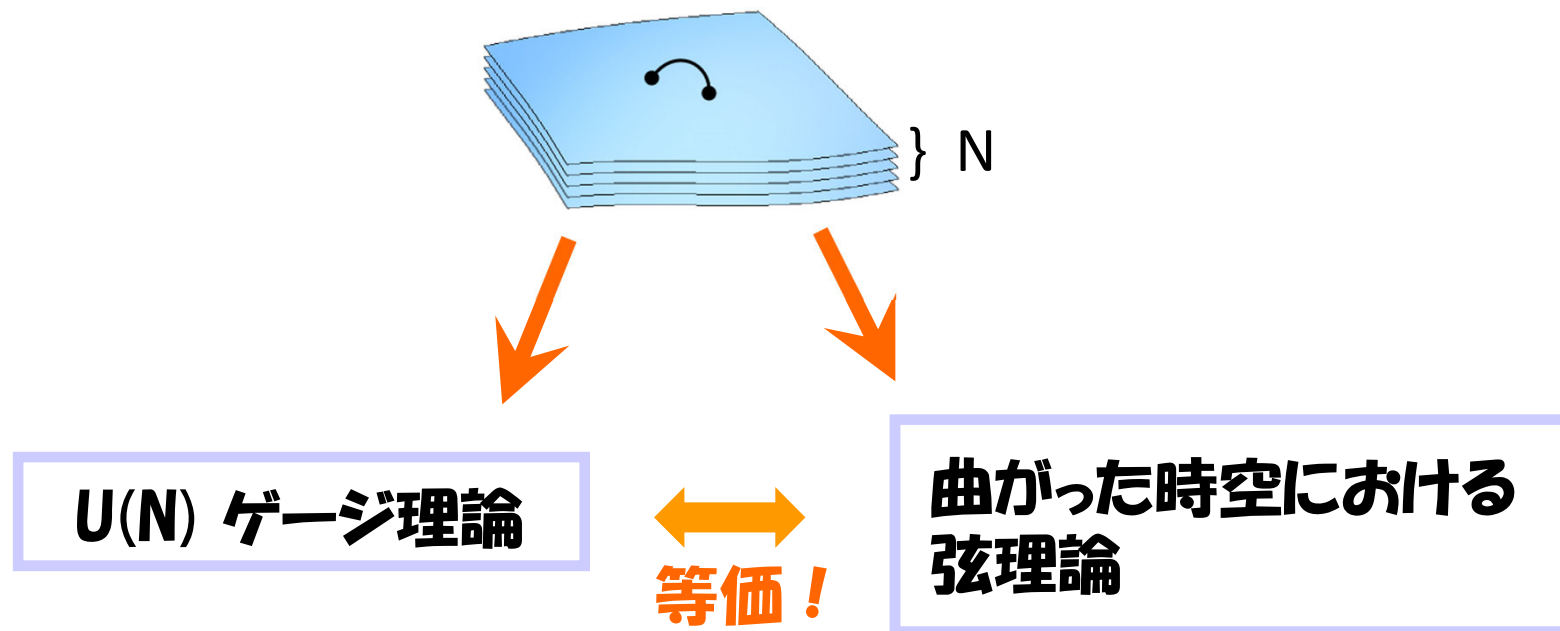
- 同様に、D-brane があると時空が曲がる。



超重力理論の  
運動方程式の解

# ホログラフィック双対のアイデア

- Dブレーンの系を記述する2つの見方

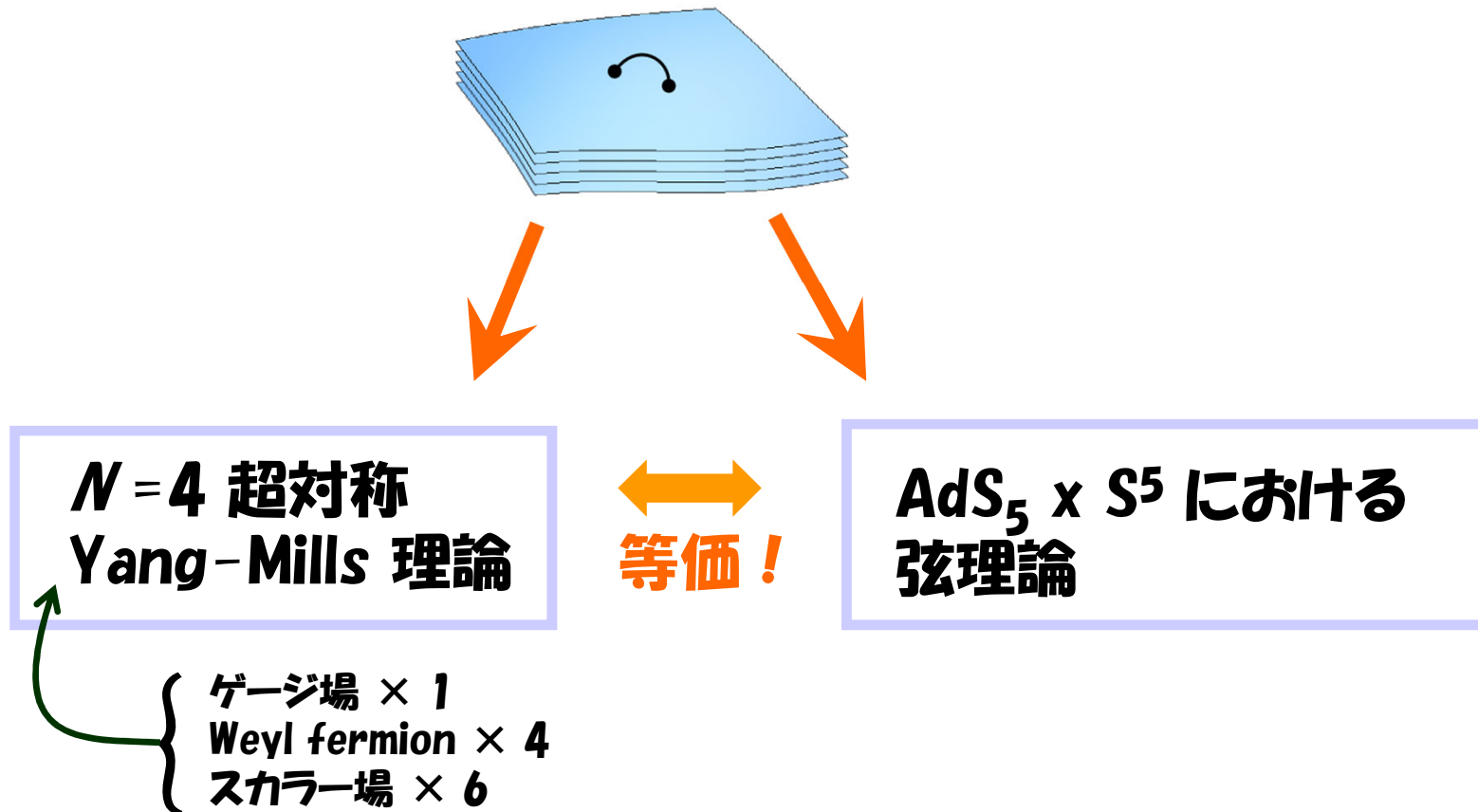


どちらも同じ系を記述しているので、  
二つの見方は等価であると予想

# 最も良く調べられている例

[Maldacena]

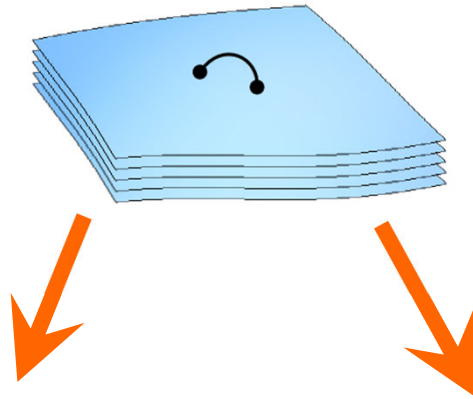
- D3ブレーンを考える



# 4次元 Yang-Mills 理論

[Witten]

- D4ブレーンを考え、空間の1次元を  $S^1$  に丸める。  
フェルミオンに反周期的境界条件を課して超対称性を破る。



Yang-Mills 理論

(より正確には、  
Yang-Mills 理論 + 重い粒子)

⇔  
等価!

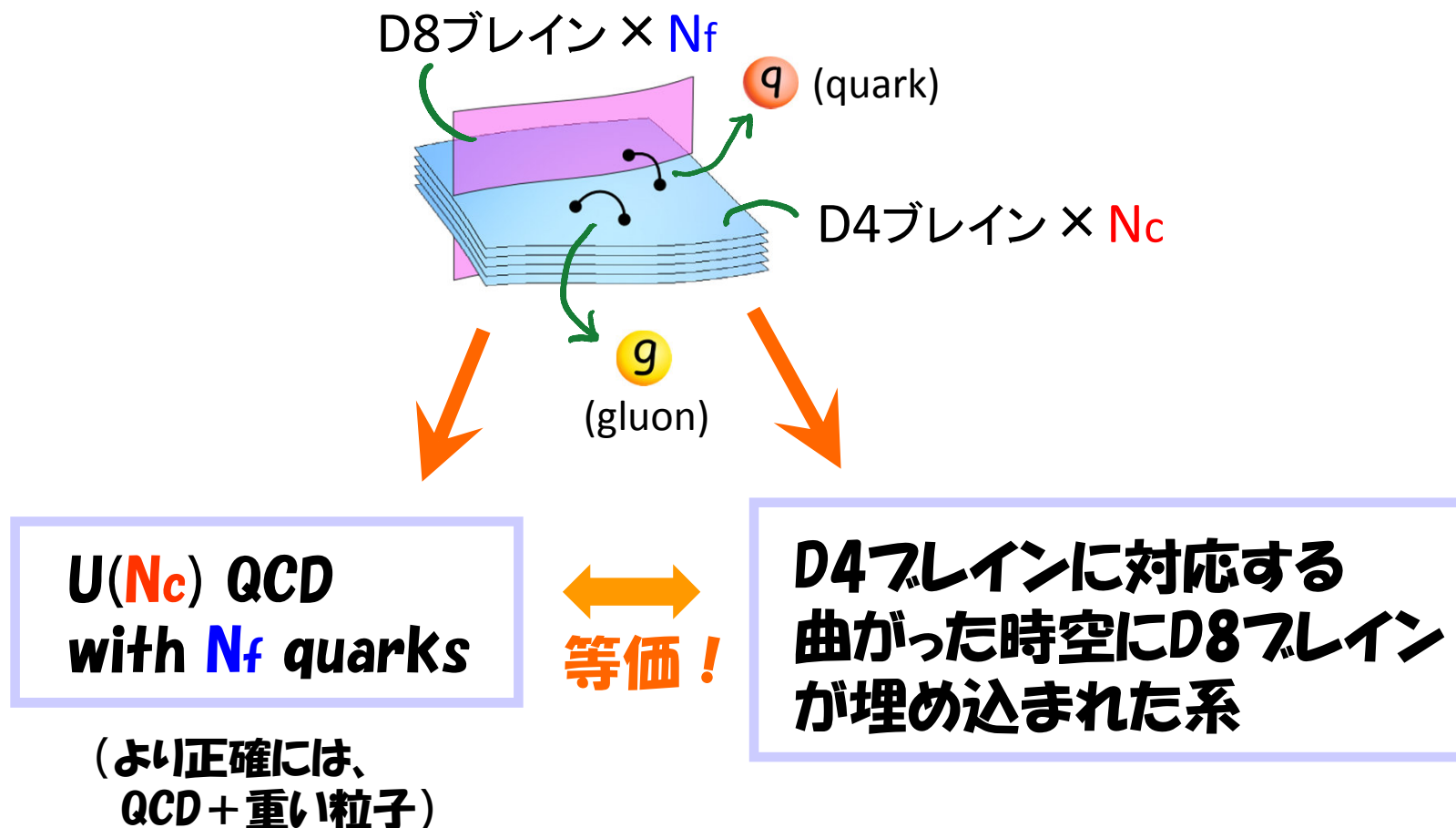
対応する曲がった時空  
における弦理論

(フラックD4ブレーン解を  
Wick 回転したもの)

# ホログラフィック QCD

[Sakai-S.S.]

- さっきの系にクォークを加えるためにD8ブレーンを加える。



**U( $N_c$ ) QCD  
with  $N_f$  quarks**



**D4ブレーンに対応する  
曲がった時空にD8ブレーン  
が埋め込まれた系**

(より正確には、  
QCD + 重い粒子)

質量  $M_{KK}$  ( $\sim 1$  GeV)  
カットオフスケールに相当する。

**$1/N_c$  展開**



**弦理論の結合定数に関する摂動展開**

**$1/\lambda$  展開**



**場の微分の次数に関する展開**

スケール  $M_{KK}$   
における結合定数  
( 't Hooft coupling)

**$1/N_c$  展開と  $1/\lambda$  展開の leading (large  $N_c$  & 強結合で良い近似)  
なら弦理論側で簡単に計算できる!**



## 4 様々な結果

# ハドロン

◆ 説明しなかったが、今の時空のトポロジーは

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^2 \times S^4$$

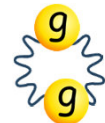
特に4次元球面  $S^4$  があることに注意。

◆ この系に含まれる粒子

● 閉弦



グルーボール



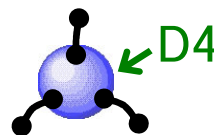
● D8 にくっついた 開弦



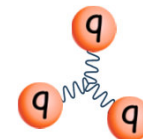
メソン



●  $S^4$  に巻きついた D4



バリオン



これを用いて、ハドロンに関するさまざまな計算ができる！

# メソンの有効作用

D8-brane 上の開弦の有効作用

→ 5 dim U(N<sub>f</sub>) ゲージ理論になる

5 dim ゲージ場

$$A_\mu(x^\nu, z), A_z(x^\nu, z)$$

$\mu, \nu = 0 \sim 3$

$$S_{5\text{dim}} \simeq S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}}$$

$$S_{\text{YM}} = \kappa \int d^4x dz \text{Tr} \left( \frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_5 \omega_5(A)$$

(M<sub>KK</sub> = 1 unit)

CS5-form

$k(z) = 1 + z^2$

$h(z) = (1 + z^2)^{-1/3}$

パラメータは  $\kappa$  と  $M_{\text{KK}}$  の2つのみ。

# モード展開

$z$  の関数の完全系

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z) \quad A_z(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(x^\mu) \phi_n(z)$$

$\varphi^{(0)} \sim \text{pion} \quad B_\mu^{(1)} \sim \rho \text{ meson} \quad B_\mu^{(2)} \sim a_1 \text{ meson} \quad \dots$

→  $S_{5\text{dim}}(A) = S_{4\text{dim}}(\pi, \rho, a_1, \rho', a'_1, \dots)$

## ★ いろいろな現象論的モデルを再現！

- Skyrme model ⇒ バリオンをソリトンとして記述するモデル
- Vector meson dominance ⇒ 光子との相互作用に関するモデル
- Gell-Mann Sharp Wagner model ⇒  $\omega$ メソンの崩壊に関するモデル
- Hidden local symmetry ⇒  $\rho$ メソンに関するモデル
- Son-Stephanov の5次元モデル ⇒  $\rho$ メソンと  $a_1$ メソンのタワーを加えたモデル

## ★ 質量、結合定数の計算

| mass      | $\rho$ | $a_1$ | $\rho'$ |
|-----------|--------|-------|---------|
| exp.(MeV) | 776    | 1230  | 1465    |
| our model | [776]  | 1189  | 1607    |
| ratio     | [1]    | 1.03  | 0.911   |

↑  
input

| coupling         | our model              | experiment                       |
|------------------|------------------------|----------------------------------|
| $f_\pi$          | [92.4 MeV]             | 92.4 MeV                         |
| $L_1$            | $0.584 \times 10^{-3}$ | $(0.1 \sim 0.7) \times 10^{-3}$  |
| $L_2$            | $1.17 \times 10^{-3}$  | $(1.1 \sim 1.7) \times 10^{-3}$  |
| $L_3$            | $-3.51 \times 10^{-3}$ | $-(2.4 \sim 4.6) \times 10^{-3}$ |
| $L_9$            | $8.74 \times 10^{-3}$  | $(6.2 \sim 7.6) \times 10^{-3}$  |
| $L_{10}$         | $-8.74 \times 10^{-3}$ | $-(4.8 \sim 6.3) \times 10^{-3}$ |
| $g_{\rho\pi\pi}$ | 4.81                   | 5.99                             |
| $g_\rho$         | 0.164 GeV <sup>2</sup> | 0.121 GeV <sup>2</sup>           |
| $g_{a_1\rho\pi}$ | 4.63 GeV               | 2.8 ~ 4.2 GeV                    |

ものによっては 20~30 % くらいのずれはあるが、近似の精度から期待される以上に良く合っている。

## その他のメソン

[Imoto-Sakai-S.S.]

弦の励起モードからスピンの高いメソンを含め、  
様々なメソンが出てくる。

- 1<sup>st</sup> excited states

→  $a_2(1320)$ ,  $b_1(1235)$ ,  $\pi(1300)$ ,  $a_0(1450)$ , ...

- 2<sup>nd</sup> excited states

→  $\rho_3(1690)$ ,  $\pi_2(1670)$ , ...

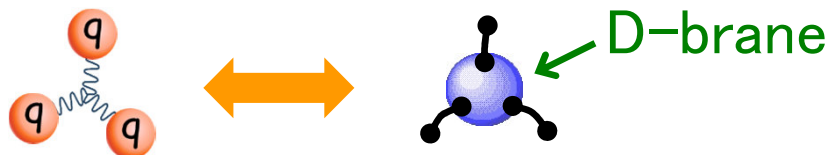
- 3<sup>rd</sup> excited states

→  $a_4(2040)$ , ...

mass: 
$$m_N \simeq \sqrt{\frac{N}{\alpha'}} + \frac{M_{\text{KK}}}{2\sqrt{2}}$$
$$(N = 1, 2, 3, \dots)$$

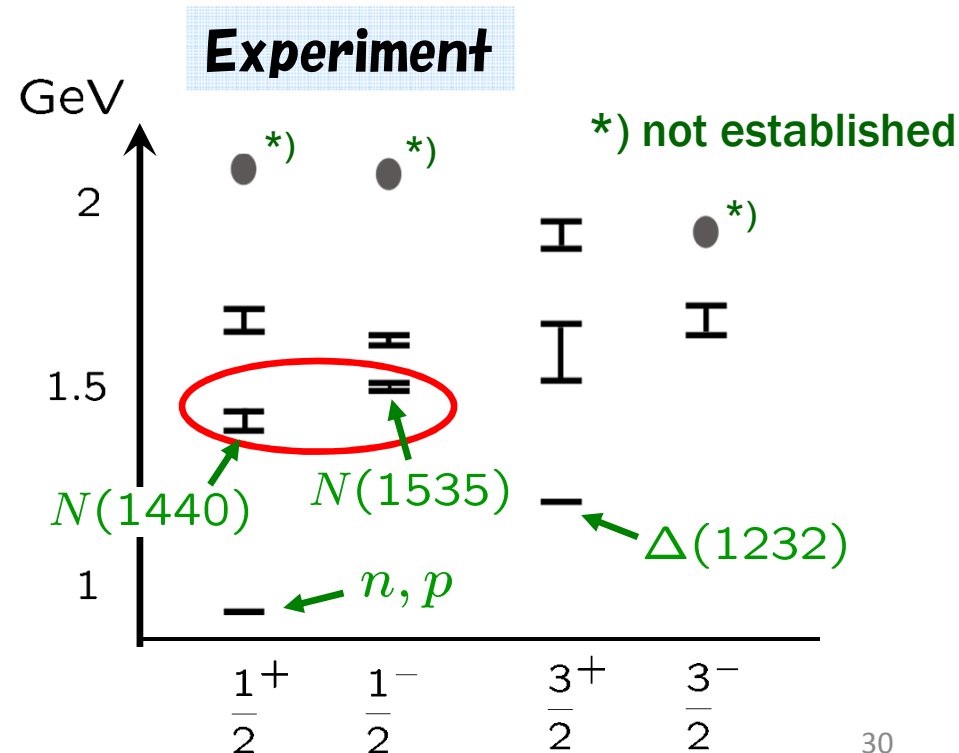
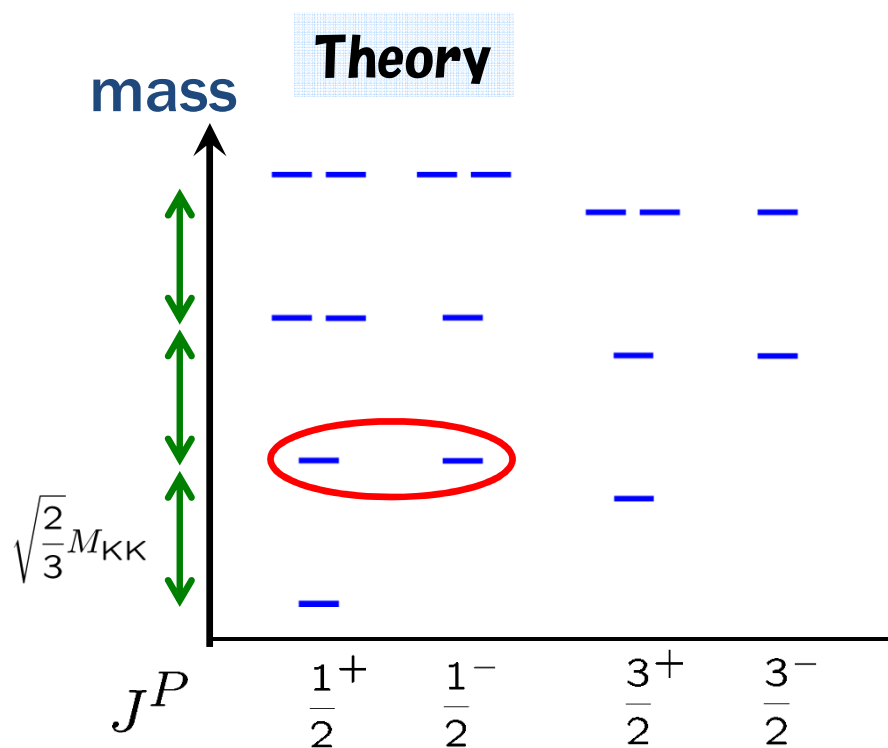
# バリオンのスペクトル

[Hata-Yamato-Sakai-S.S.]



= 5次元ゲージ理論  
におけるソリトン

ソリトンの量子化により、バリオンのスペクトル、荷電半径、磁気モーメントなどを求めることができる。 cf) Skyrme model



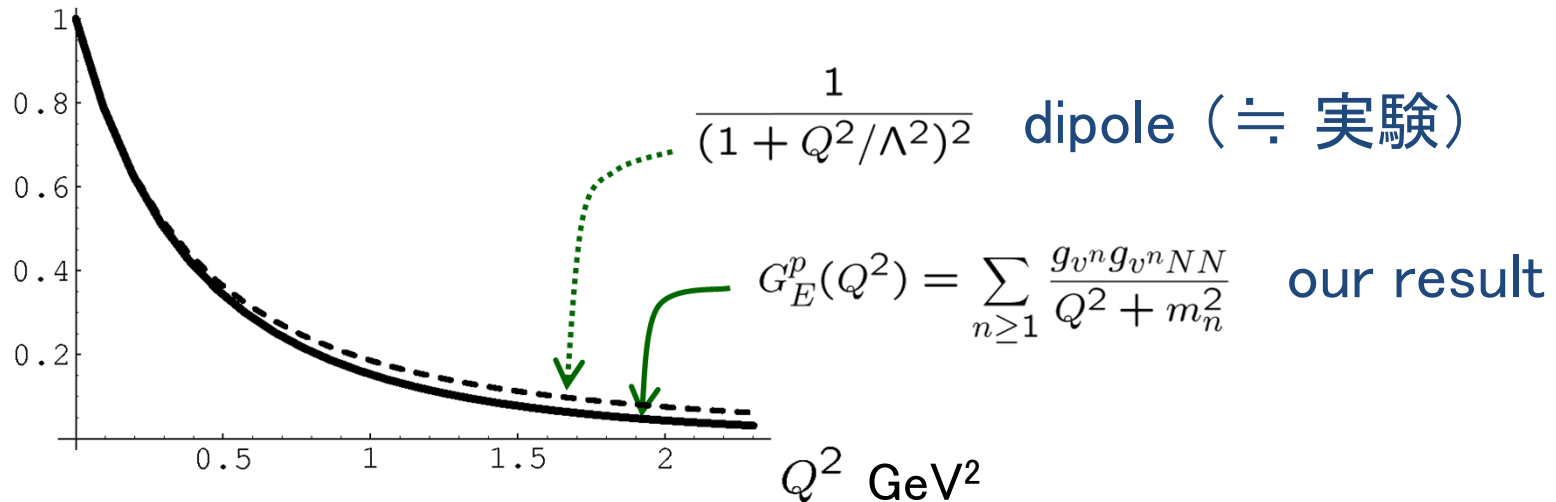
# 核子の性質

[Hashimoto-Sakai-S.S.]

|                                   | our result | exp.    |
|-----------------------------------|------------|---------|
| $\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$ | 0.74 fm    | 0.81 fm |
| $\langle r^2 \rangle_{I=1}^{1/2}$ | 0.74 fm    | 0.94 fm |
| $\langle r^2 \rangle_A^{1/2}$     | 0.54 fm    | 0.67 fm |
| $g_{I=0}$                         | 1.7        | 1.8     |
| $g_{I=1}$                         | 7.0        | 9.4     |
| $g_A$                             | 0.73       | 1.3     |

[See also,  
Hong-Rho-Yee-Yi, Hata-Murata-Yamato, Kim-Zahed]

# 電磁形状因子



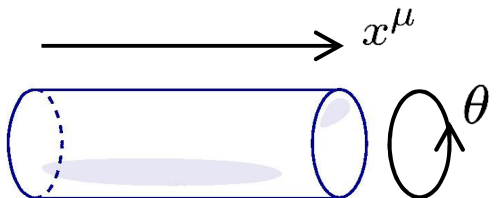
## 5 ティスカッション




# 時空の次元とは？

❓ 何故、4次元の理論が高次元の理論と等価になり得るのか？

簡単な例:  $S^1$  コンパクト化

5 dim   $\int d^4x d\theta (|\partial_\mu \varphi|^2 + |\partial_\theta \varphi|^2)$

↓

4 dim   $\int d^4x \sum_n (|\partial_\mu \varphi^{(n)}|^2 + n^2 |\varphi^{(n)}|^2)$

$\varphi(x^\mu, \theta) = \sum_n \varphi^{(n)}(x^\mu) e^{in\theta}$

教訓: 無限個の粒子を含む4次元理論 = 高次元の理論

- **非自明な例: タイプIIA 弦理論 (10次元の理論)**

この理論には D0ブレーンがある。D0ブレーンが  $n$  個重なった状態を *threshold bound state* と考えると、 $n = 0, 1, 2, \dots$  の無限個の粒子がある。これによって、次元が一つ上がった11次元の理論と等価になる。

**タイプIIA 弦理論 = M理論の  $S^1$  コンパクト化**

**10次元**

**11次元**

- **Large N QCD:** SU(N) QCD で  $N$  が大きい極限を考えると無限個のハドロンがいることが知られている。

⇒ **高次元の理論と等価になってもそれほど不思議ではない。**

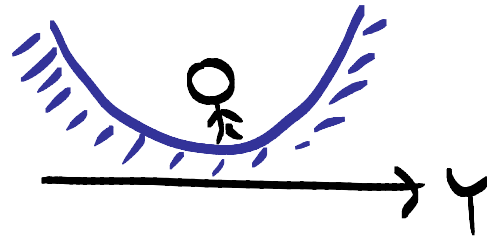
❓ 余剰次元があるのなら、なぜその方向に進めないのか？

● コンパクト化の場合



余剰次元の空間  $Y$  は狭いので実質 4 次元

● 今の場合



余剰次元の方向に動くには余計にエネルギーが必要なので実質 4 次元

ここで得られたハドロンは皆、**4次元**の粒子。

- エネルギーを上げれば、余剰次元が見えてくるはず、と思うかも知れない。しかし、今の場合、エネルギーを上げると 4次元QCDの漸近自由性のために結合定数が小さくない、弦理論側の記述が悪くなる。

❓ では、余剰次元は実験で見えないのか？

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 1} B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z) \quad A_z(x^\mu, z) = \sum_{n \geq 0} \varphi^{(n)}(x^\mu) \phi_n(z)$$

$$\varphi^{(0)} \sim \text{pion} \quad B_\mu^{(1)} \sim \rho \text{ meson} \quad B_\mu^{(2)} \sim a_1 \text{ meson} \quad \dots$$

という解釈を思い出す。

- $\rho$ メソンと  $a_1$ メソンは、5次元有効理論の中では同じ粒子だが、余剰次元方向への振動のしかたが異なるために4次元では別の粒子に見える、と解釈できる。
- $a_1$ メソンは実験で見つかっているので、その意味で余剰次元の痕跡は既に見えているとも言える。

# OUTLOOK

- **ホログラフィック双対は大変奥が深い。**
- **弦理論を使うと、簡単な計算でハドロンに関するさまざまな物理量が計算できて楽しい。**
- **格子QCDの結果と比べると、精度はまだまだ不十分だが、それでも、伝統的な場の理論とまるっきり異なる方法で、それないにもっともらしい答えがちゃんとでるところが面白い。**
- **$1/N$  展開や  $1/\lambda$  展開の補正を計算して精度を改善するのは今後の重要な課題。**
- **？ カットオフスケールを無限大にする極限を取りたいが、どうすれば良いか？**
- **？ 場の理論が与えられた時に、それとホログラフィック双対な理論を直接見つける方法はないだろうか？**