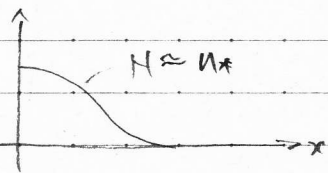
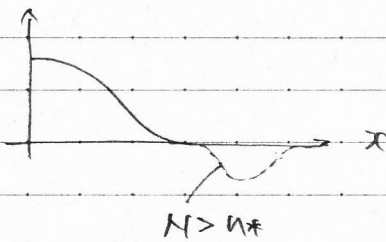
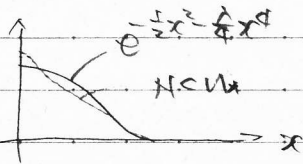


•  $r$  が大きいと  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $\Gamma$  は  $\Gamma = \frac{1}{2} \Gamma$  になる (従って  $\Gamma$  の level 間隔が Coulomb spectrum の) も  $\Gamma$  になる) 理由は  $\alpha_s(g)$  の running のため (ii) の場合  $\Gamma$   $\alpha_s$  とともに急激に増大するからである。

(補足)

漸近級数  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4}$

神羅合南数  $e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^4)^n}{n!}$



$$\int DA_\mu \exp \left[ i \int dx \left( \underbrace{\frac{1}{2} A_\mu^a \square A^{\mu a}}_{\text{自由項}} + \underbrace{L_{int}}_{O(g^2)} \right) \right]$$

•  $\Gamma$  が大きい  $A_\mu$  が大きい  $\epsilon \rightarrow 0$  では同じ問題が起る。

• pole  $\approx m_{pole}(\mu) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G \frac{4\pi \alpha_s(g)}{g^2}$  の導出

Inverse quark propagator

$S_F^{-1}(p) = A(p^2) \not{p} + B(p^2)$

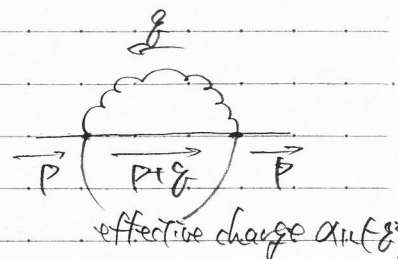
$\rightarrow S_F(p) = \frac{A \not{p} - B}{A^2 p^2 - B^2}$

pole mass (A(p^2)^2 p^2 - B(p^2)^2 |\_{p^2 = m\_{pole}^2} = 0) で定義する

$S_F^{-1} = A \not{p} + B = \not{p} - \bar{m} - \Sigma(p)$

$\Sigma(p) = -G \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \not{p} \frac{1}{\not{p} + \not{q} - \bar{m}} \not{q} \frac{4\pi \alpha_s(-g^2)}{g^2}$

$A = \left[ 1 - \frac{1}{4p^2} Tr(\Sigma \not{p}) \right], B = -\bar{m} - \frac{1}{4} Tr(\Sigma)$



•  $\Gamma$  が大きい  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $\Gamma$  は  $\Gamma = \frac{1}{2} \Gamma$  になる (従って  $\Gamma$  の level 間隔が Coulomb spectrum の) も  $\Gamma$  になる) 理由は  $\alpha_s(g)$  の running のため (ii) の場合  $\Gamma$   $\alpha_s$  とともに急激に増大するからである。

$m_{pole} \approx \bar{m}(1 + \delta)$

$\delta = \frac{1}{4\bar{m}} Tr[\Sigma(p)] + \frac{1}{4\bar{m}^2} Tr(\not{p} \Sigma(p)) \Big|_{p^2 = \bar{m}^2}$

$$\int \approx C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{f^{\mu\nu}(p+q+m)}{(p+q)^2 - m^2} \frac{4\pi\alpha_s(-q^2)}{q^2} \Big|_{p^2=m^2}$$

$$= -C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2p \cdot q + q^2} \frac{4\pi\alpha_s(-q^2)}{q^2} \times \{-2(p+q) + 4m\}$$

$p^\mu = (m, 0)$  とする frame では.

$$= -C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2m q^0 + (q^0)^2 - |q|^2} \frac{4\pi\alpha_s(-q^2)}{q^2} (-2m q^0 - 2q + 4m)$$

$q^2 \sim -\Lambda_{QCD}^2$  かつ、 $|q| \neq 0$  とする条件.

$$2m q^2 \approx |q|^2 \Rightarrow (q^0)^2$$

$$q^0 \approx \frac{|q|^2}{2m} \rightarrow (q^0)^2 \ll |q|^2$$

IRF 近傍

$$\int \approx -C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2m q^0 - |q|^2} \frac{4\pi\alpha_s(|q|)}{-|q|^2} (-2m q^0 + 2q + 4m)$$

$$\approx C_F \frac{1}{2m} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\alpha_s(|q|)}{|q|^2} (-2m q^0 + 4m)$$

ある式は式に代入すればいい.

次元正規化では、 $\epsilon$  の極限も finite (0 の場合  $\epsilon/\epsilon^2$ ) になる.

$$i.g. \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left[ \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} - C \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[ \frac{p^\mu}{(p^2 - m^2)^2} \right] \right]$$

表面項は 0

$$= \frac{D}{(p^2 - m^2)^2} + p^\mu \frac{-2 \cdot 2 p_\mu}{(p^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{D}{(p^2 - m^2)^2} - \frac{4(p^2 - m^2) + 4m^2}{(p^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{D-4}{(p^2 - m^2)^2} - \frac{4m^2}{(p^2 - m^2)^3}$$

$C = \frac{1}{D-4}$  とすると、 $(p^2 - m^2)^2$  は相殺する.

$$= \frac{C}{\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{4m^2}{(p^2 - m^2)^3}$$

$D=4$  で finite.

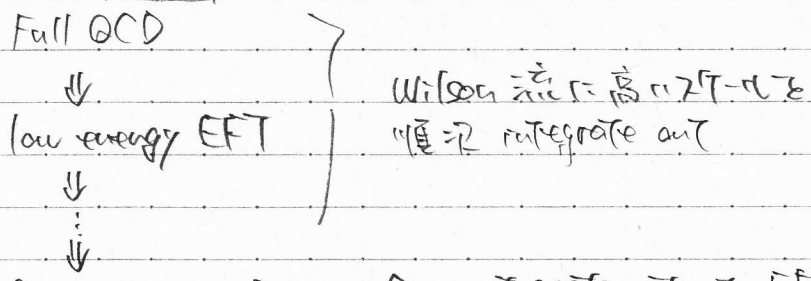
$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{(p+q)^2 - m^2} \frac{1}{q^2} - C \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{q^\mu}{[(p+q)^2 - m^2]^2} \right]$$

UV div. は消える. IR の構造はわかる.

だから "1" のような感じ. "2" MS-scheme は被積分関数の IR の構造は変化する.

§7 "非摂動"有効理論と OPE に于る renormalization 吸収  
 摂動 QCD の予言における renormalization 不変性は OPE における local operator の matrix element に吸収されることを示す。

§7-1 話の筋道

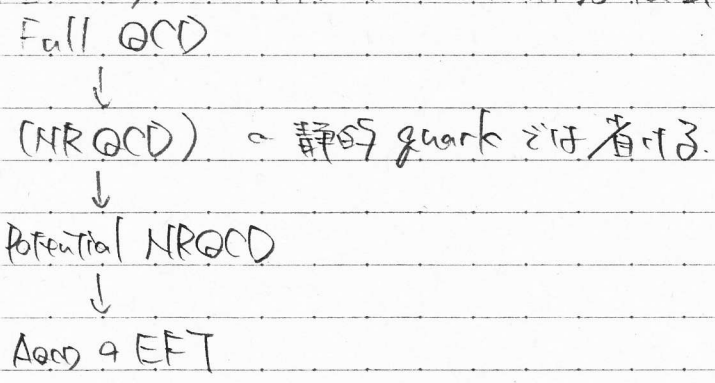


→ g, u, d, (S) ... 軽い自由度は local operator  $O(0), \partial_\mu O(0), \partial_\mu \partial_\nu O(0), \dots$  により表わされる。 (P/Q) は因子展開

IR renormalization は  $O(\Lambda_{QCD})$  の物理は全て  $\langle O(0) \rangle, \langle \partial_\mu O(0) \partial^{\mu\nu} O(0) \rangle, \dots$   
 eg  $\langle G_{\mu\nu}^a(0) G^{\mu\nu a}(0) \rangle$

- 高エネルギーの物理は Wilson 係数に含み込まれ、摂動 QCD にて予言可能。

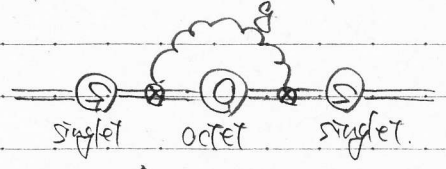
QCD potential (あるいは重クォークonium系) ではこの理論的枠組みが明確で多くのステップが  $\alpha_s$  に南極摂動展開で追える。



§7.2 Potential NRQCD (pNRQCD) の導入

・歴史的背景

QCD potential は 3-loop 以下 IR 発散を除去。(Appelquist, Dine, Muzinich, 1977)



$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(E_0 + i\epsilon) - E_S} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{|k_g| + \Delta V}$$

★  
 中間状態が "非摂動"

$$E_S := V(\sigma) = -C_F \frac{\alpha_S}{r} \text{ at LO}$$

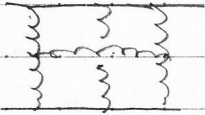
$$\left( T_{adj}^a T_{adj}^a = C_A N_{adj} \right)$$

$$C_A = N_c = 3$$

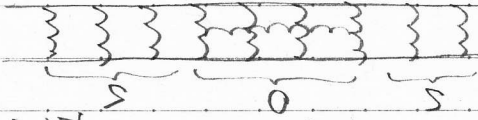
$$E_0 := V(\sigma) = \left( \frac{C_A}{2} - C_F \right) \frac{\alpha_S}{r} \text{ at NLO}$$

$$\delta) \Delta V := E_0 - E_S = \frac{C_A}{2} \frac{\alpha_S}{r} (+ O(\alpha_S^2))$$

$(|E_S| + \Delta V)^{-1}$  は  $\Delta V \propto \alpha_S$  で展開してしまうと loop 毎に IR div が出てくる



$\Rightarrow \Delta V$  を分母に残す (ladder diagram a resummation) は finite



of.  $(p^2 - m_0^2)^{-1}$  は  $m_0$  で展開すると collinear 発散, 分母に残すと  $\ln(\frac{E}{m_0})$

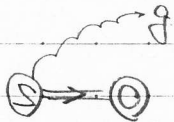
有効理論 PNRQCD

(以下では static limit:  $m_0 \rightarrow 0$  の場合)

$$\frac{C_A}{2} \alpha_S \ll 1$$

対象: static QQ pair + IR gluon

when  $\Delta V \ll \frac{1}{r}, E_g \sim \Delta V$



この系の dynamics を記述する

cut-off scale  $\mu_f$  は  $\Delta V \ll \mu_f \ll \frac{1}{r}$  (このように選ぶ)

$\mu_f$  以下の scale を integrate out.  $\Rightarrow$  Wilson 係数

物理的自由度

singlet

octet

QQ の束縛状態:  $S(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau), O(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau)$

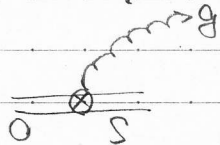
QEQ の位置を  $\mathbf{x} \pm \frac{\mathbf{r}}{2}$  とする。

IR gluon:  $A_0(\mathbf{x}, \tau), A(\mathbf{x}, \tau)$

展開の仕方

(i)  $r E_g = r p_g \ll 1$  かつ  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} + A, \mathbf{r} \cdot \nabla A_0$  はどの程度微小量と考える。

これは  $A_\mu(\mathbf{x} \pm \frac{\mathbf{r}}{2}, \tau)$  の  $\mathbf{r}$  による多重極展開から現れる。



$r \ll \lambda_g (= E_g^{-1})$  かつ

IR gluon は束縛状態の内部構造と対して、多重極と couple。

(ii)  $r = r p_0 \sim O(1)$  かつ  $S, O$  は  $\mathbf{r}$  で展開してはいけない。

(iii)  $r E_{00} \sim r \Delta V \ll 1$  (大)  $r \in S$  は "はるばる" であるから、1個以上  $\partial_t$  on  $S=0$  は運動方程式を用いて除きうる。

Effective Lagrangian の構成

2通りの方法

① Sym と合う operator を列挙する。

→ tree level で full QCD と matching したいと解釈が深まる。

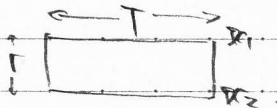
②  $\langle W[A_\mu] \rangle$  in full QCD ⊕ 場の書き換え ⊕ 多重極展開

⊕  $M$  以上の物理に起因する operator を補う。

⊥ 今回は ② を使う。

[準備]

Wilson loop を bilocal field で表す (先ほど static field  $\psi$  で表した)



bilocal field  $\psi(x, y; T) \sim \psi(x) \psi^T(y; T)$

$N_c \times N_c$  行列に値をとる複素スカラー場

$$W[A_\mu] \int d^3(x_1 - x'_1) \int d^3(x_2 - x'_2)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^T \exp \left[ i \int dt d^3x d^3y \mathcal{L}[\psi, \psi^T, A_\mu] \right]$$

$$\times \text{Tr}(\psi(x_1, x_2; T) \psi^T(x_1, x_2; T)) \text{Tr}(\psi^T(x'_1, x'_2; 0) \psi(x'_1, x'_2; 0))$$

$$\mathcal{L}[\psi, \psi^T, A_\mu] = \text{Tr}[\psi^T(x, y; T) i \not{D}_t \psi(x, y; T)]$$

$$= \text{Tr}[\psi^T(x, y; T) i \partial_t \psi(x, y; T) + g \psi^T(x, y; T) A_0(x; T) \psi(x, y; T) - g \psi^T(x, y; T) \psi(x, y; T) A_0(y; T)]$$

$$\int dt \int d^3x d^3y \mathcal{L}[\psi, \psi^T, A_\mu]$$

$$x = X + \frac{\pi}{2}, \quad y = X - \frac{\pi}{2}, \quad d^3x d^3y = d^3X d^3\pi, \quad \delta^3(x) \delta^3(y) = \delta^3(X) \delta^3(\pi)$$

$$\psi(x, y; T) = \phi(x, y; T) S(X, \pi; T) + \psi(x, X; T) O(X, \pi; T) \phi(X, y; T)$$

$\pi$ -変換性

$$S(X, \pi; T) \rightarrow S(X, \pi; T)$$

$$O(X, \pi; T) \rightarrow O(X, \pi; T) U^\dagger(X, T)$$

$\pi$ -変換は  $\pi$  による。  $X$  に関しては。

→  $\pi$  展開後の各次で  $\pi$ -変換は相互作用による。

②  $\pi$  を展開

$$\phi(x_1, x_2; T) = P \exp \left[ i g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ds \pi \cdot A(X + s\pi; T) \right]$$

$$= 1 + ig \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \pi \cdot A(x + s\pi, t) + O(r^2)$$

$$= 1 + ig \pi \cdot A(x, t) + O(r^2)$$

$$\phi(x_1, x; t) = 1 + \frac{1}{2} ig \pi \cdot A(x, t) + O(r^2)$$

$$\phi(x_2, x; t) = \dots$$

∴  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$

$$\chi(x_1, x_2; t) = S(x, \pi; t) + ig \pi \cdot A(x, t) S(x, \pi; t) + O(x, \pi; t) + \frac{1}{2} ig \{ \pi \cdot A(x, t) \cdot O(x, \pi; t) \} + O(r^2)$$

∴  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \text{Tr} [S^{-1} \Lambda \gamma_5 \pi \cdot \Sigma]$

$$f_{S\bar{S}} = g \text{Tr} [O^T \pi \cdot E S] \quad E = (-\gamma_5 A - \not{D} A_0 - ig [A_0, A])$$

$$f_{S0} = g \text{Tr} [O \pi \cdot E S^T]$$

$$f_{SS} = \text{Tr} [S^T i \not{\partial} S]$$

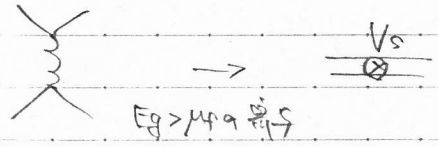
$$f_{00} = \text{Tr} [O^T i \not{D} O] + \frac{1}{2} g \text{Tr} [O^T O \pi \cdot E] + \frac{1}{2} g \text{Tr} [O O^T \pi \cdot E]$$

∴  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  potential term

$$f_{pot} = -\text{Tr} [S^T V_S(\pi) S + O^T V_O(\pi) O]$$

$$V_S(\pi) = -C_F \frac{g^2}{f} \quad V_O(\pi) = \left( \frac{C_F}{2} - C_F \right) \frac{g^2}{f}$$

∴  $f_{pot} = f a^4$  (static limit  $\rightarrow a$ ) pNRQCD Lagrangian (tree level)

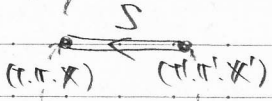


實際, 在 full QCD 与 pNRQCD 的 matching 中  $f_{pot}$  是固定的.

$$f = \text{Tr} [S^T (i \not{\partial} - V_S(\pi)) S + O^T (i \not{D} - V_O(\pi)) O + g S^T O \pi \cdot E + g O^T \pi \cdot E S + \frac{1}{2} g O O^T \pi \cdot E + \frac{1}{2} g O^T O \pi \cdot E] + O(r^2)$$

$$E = E(x, t), \quad A = A(x, t)$$

Feynman rule

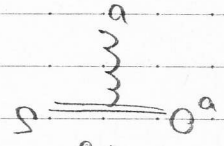


$$e^{-iV_S(\pi)(t-t')} \delta(t-t') \delta^3(\pi-\pi') \delta^3(x-x')$$

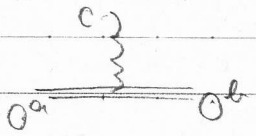


$$e^{-iV_O(\pi)(t-t')} [Y_{adj}(t-t')]^{ab} \delta(t-t') \delta^3(\pi-\pi') \delta^3(x-x')$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \exp \left[ ig \int_t^t dt A_a^c(t, x) [Y_{adj}]^{ab} \right]$$



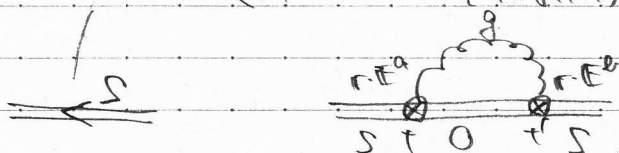
$$ig \sqrt{\frac{2}{N_c}} \pi \cdot E^a$$



$$\frac{1}{2} ig d^{abc} \pi \cdot E^c$$

Potential NRQCD z'ia Wilson loop の計算

$$\begin{aligned} \langle W[A_\mu] \rangle &= \int^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= \langle 0 | S(\mathbf{x}, \mathbf{r}) e^{-iHt} S^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{r}) | 0 \rangle + O(\alpha_s^2) \quad \hat{H} = \hat{H}_{\text{isoA}} + \hat{H}_{\text{QCD}} \\ &= N_c e^{-iV_S(r)T} \int^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &\quad \times \left[ 1 - g^2 \frac{T_F}{N_c} \int_0^T dt \int_0^T dt' e^{-i(V_0 - V_S)(t-t')} \right. \\ &\quad \left. \times \langle 0 | \pi \cdot E^a(\mathbf{x}, t) [\mathcal{Y}_{\text{adj}}(t, t')]^{ab} \pi \cdot E^b(\mathbf{x}, t') | 0 \rangle \right] + O(\alpha_s^2) \end{aligned}$$



Full QCD z'ia

$$\langle W[A_\mu] \rangle = \text{const.} \times e^{-iT V_{\text{QCD}}(r)} \quad \text{as } T \rightarrow \infty$$

Matching: 両者を等しいとおく  $\alpha_s \ll 1$  とする

$$V_{\text{QCD}}(r) = V_S(r) - ig^2 \frac{T_F}{N_c} \int_0^\infty dt e^{-i(V_0 - V_S)t} \langle 0 | \pi \cdot E^a(t) [\mathcal{Y}_{\text{adj}}(t, 0)]^{ab} \pi \cdot E^b(0) | 0 \rangle$$

$V_{\text{QCD}}^{US}(r)$  [Matching の基本的関係式 (2)]

$V_{\text{QCD}}^{US}(r)$  は  $\int dt$  積分前に  $\alpha_s \propto V_0 - V_S$  で展開できると 0 になる。

① 展開の各項は scaleless 積分になる。次元正則化で 0 になる。

$V_{\text{QCD}}(r) |_{\alpha_s \ll 1 \text{ 展開}} = V_S(r) |_{\alpha_s \ll 1 \text{ 展開}}$

$\epsilon = 4-d > 0$  のとき  $V_S(r)$  は  $V_{\text{QCD}}(r) |_{\alpha_s \ll 1 \text{ 展開}} = -C_F \frac{\alpha_s}{r} + O(\alpha_s^2)$

特に  $V_S(r)$  は  $O(\alpha_s^2)$  の IR-div を含む。

$V_{\text{QCD}}^{US}(r)$  の計算

$$\mathcal{Y}_{\text{adj}}(t, 0)^{ab} = \delta^{ab} + O(\alpha_s)$$

$$V_{\text{QCD}}^{US} = -ig^2 \frac{T_F}{N_c} \int_0^\infty dt e^{-i(V_0 - V_S)t} \langle \pi \cdot E^a(t) \pi \cdot E^b(0) \rangle$$

$$\text{(公式')} \quad \langle \pi \cdot E^a(t) \pi \cdot E^b(0) \rangle = \int^3 \langle E^{ia}(t) E^{ib}(0) \rangle$$

$$\langle E^{ia}(x) E^{ib}(y) \rangle = \int^{0a} \langle i \partial^0 A^i(x) - \partial^i A^0(x) i (\partial^0 A^i(y) - \partial^i A^0(y)) \rangle + O(\alpha_s)$$

$$= -i \frac{C_F C_A}{T_F} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} [k^i k^j - (k^0)^2 \delta^{ij}]$$

$$\rightarrow \langle 0 | E^{ia}(x, t) E^{ib}(x, 0) | 0 \rangle$$

$$= -i \frac{C_F C_A}{T_F} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} (k^z - d(k^0)^2)$$

$$= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^D} k^z e^{-ik \cdot (t-d)}$$

$$u / d = D - 1 = 3 - 2\epsilon$$

$$k = (k^0)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^n}{(k+a)^d} = \int r^d \pi^{-d/2} \frac{\Gamma(n-d) \Gamma(d-n)}{\Gamma(n) \Gamma(d-n)} a^{d+n-d}$$

これを3使うと

$$V^{US} = -4\pi\alpha_s \mu^{2\epsilon} \frac{d-1}{2d} C_F r^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k}{\Delta V + k} \quad (*)$$

今般の冒頭で見た形

§7-3.  $\alpha_s$  展開に付 matching (\*)式

まず、 $\int d^d k$  種々の前に  $\alpha_s$  2 $V^{US}$  を展開した

$$\Delta V \approx \frac{CA \alpha_s}{2 r} \quad \text{および} \quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k P = 0 \quad (\text{Scaleless 種々の})$$

よ) (\*) は 0 とする。  $\rightarrow V_S(r) = V_{OCD}(r) |_{\alpha_s \text{ の展開}}$

§7-4. pNRQCD の concept に 従って matching

pNRQCD の 構成理念 (§7-2) に 従って matching

展開に付  $\epsilon \rightarrow 0$  は既に指定した。 特  $E \ll \Delta V$  時の (\*) は 3 粒子種々の。 種々の  $\epsilon \rightarrow 0$  2 UV 発散を含む。

$$[*] \text{式} = \frac{C_F \alpha_s}{\pi} \frac{r^2}{3} \Delta V^3 \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\Delta V^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{3} \right]$$

(I) (\*) 式 右辺 2 $O(\alpha_s^3)$

- $V_S(r) [= V_{OCD}(r) \text{ の } \alpha_s \text{ 展開}]$  の 3-loop に 含まれる IR div  $\sim \frac{\alpha_s^4}{r} \times \frac{1}{\epsilon}$
- $V^{US}$  に 含まれる UV div  $\sim \alpha_s r^2 \Delta V^3 \frac{1}{\epsilon}$   $\Delta V = \frac{CA \alpha_s}{2 r}$

は相殺して  $\epsilon \rightarrow 0$  は 正確な 3 粒子

(II) (\*) 式 右辺 の 和  $V_S + V^{US}$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  2 finite 2

次元正規化 2  $\Delta V \sim \frac{CA \alpha_s}{2 r} (r/r)^{\epsilon}$  に 注意 する

$$C_F \alpha_s r^2 \Delta V^3 \ln(r^2 \Delta V^2) \sim \frac{C_F CA^3}{r} \alpha_s^4 \ln(CA^2 \alpha_s^2) \text{ 含む}$$

よ) する

$$[*] \text{式 右辺} = \frac{\alpha_s^4}{r} [\star \ln(CA \alpha_s) + \star] \quad \text{Collinear 発散 vs. } \ln \left( \frac{E}{\mu} \right)$$

(III) (\*) 式 右辺 の 和 は Appelquist, et al の 結果 に 従って (adder diagram の resummation (§7-2) と ladder に 含まれる 3-loop 以下 の 2) と の 和 と 一致 する。

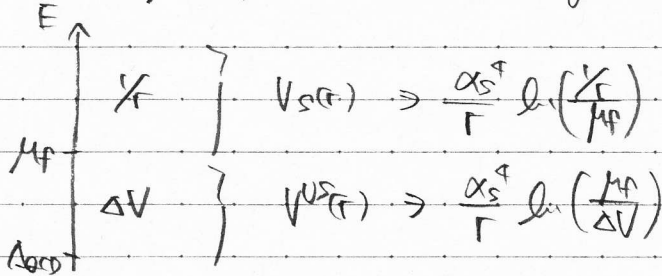
(IV) pNRQCD に 付、系統的に  $\alpha_s$  と  $\ln \alpha_s$  に 付 2 重 展開 が 計算 される。



§7-5 Wilson 流のくりこみ展開と Wilson 係数のくりこみ

(Bare #) Wilson 係数又  $V_S(r)$  の IR div と pNRQCD における UV div. 消滅は非  
 次元正規化で運動量空間に cut-off が入ると計算には artifact があり  
 of. xPT:  $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \ln(\mu/\Lambda)$

本来 Wilson 流は  $\mu$  以上 a mode と integrate out してあり



すなわち  $V_S(r)$  中の  $\frac{1}{\epsilon}$  (IR div)  $\rightarrow \ln\left(\frac{1}{\mu r}\right)$   
 $V^{US}(r)$  中の  $\frac{1}{\epsilon}$  (UV div)  $\rightarrow \ln\left(\frac{\mu}{\Delta V}\right)$

と消滅させるべきで、これが pNRQCD におけるくりこみ (繰りこみ) の除去の目的である。

$\frac{1}{\epsilon}$  の相殺は  $\mu$ -dep. の相殺を意味している。実際くりこみは  $\mu$  に依存して消滅する。  
 of. SM vs. QUT

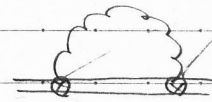
§7-6.  $V^{US}(r)$  の renormalization

PLB 595 (2004) 387

$V^{US}(r)$  は LL 近似で計算可能

- $u = \frac{3}{2}$  UV renormalization. [ $g \gg \Delta V$  から生ずる = くりこみ]
- $u = 2$  IR renormalization [ $g \sim \Lambda_{QCD}$  " ]

LL 近似 =  
 effective charge  $\alpha_s(k)$



したがって  $u = \frac{3}{2}$  renormalization は  $V_S(r) + V^{US}(r)$  での

相殺可能 = くりこみ確定する

$u = 2$  renormalization (残り)  $V_S(r) + V^{US}(r)$  は

$O(\Lambda_{QCD}^4 r^3)$  不定性を生成する。

前節と全く同様の論理により  $V_S(r)$  [ $= V_{QCD}(r)$  の  $\alpha_s$  展開] に含まれる

IR renormalization は 差し引いて  $V^{US}(r)$  にくりこみ消滅する。

$V_S(r)$  からの renormalization の分離は §6 参照。

くりこみ後  $V_S(r)$  は  $V(r) + O(r)$  であり  $V_{UV}(r = \mu)$  と呼ぶべきである。

$\Gamma = L$ . (IR div)  $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{\mu r}\right)$  の消滅と同時に消滅。

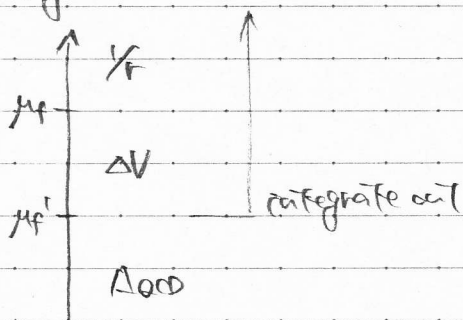
この結果、不定性が段階的に減少している。

$V_S(r) [= V_{QCD}(r) \text{ の } \alpha_s \text{ 展開}] : O(\Lambda_{QCD}) \quad u = 1/2, 3/2, \dots$

$E_{tot} = 2 \alpha_s p r e + V_S(r) : O(\Lambda_{QCD}^3 r^2) \quad u = 3/2, \dots$

$E_{tot} + V^{US}(r) : O(\Lambda_{QCD}^4 r^3) \quad u = 2, \dots$

もう一回 integrate out



§7-7  $\Lambda_{QCD}$  の EFT と local gluon condensate

工事中: 2F-1V  $E_g \sim \Lambda_{QCD} \ll \Delta V$  の物理

物理的自由度は pNRQCD と同じ S.O.  $A_n$

展開パラメータ  $\rightarrow E_g/\Delta V \rightarrow$  pNRQCD を更に  $\beta$  on  $A_n$  の展開

基本的 matching

$$V_{QCD}(r) = V_{UV}(r) - r g^2 \frac{T_F}{N_c} \int dt e^{-i t \Delta V} \langle O | \left( \left( 1 + \frac{t}{2} \partial_t + \dots \right) \bar{\psi}(0) \right) \left( \left( 1 - \frac{t}{2} \partial_t + \dots \right) \psi(0) \right) | O \rangle$$

\*  $T = 1/\Delta V$  とおくと "first"  $1/\Delta V$  の展開

$$\sim r g^2 \frac{T_F}{N_c} \int dt e^{-i t \Delta V} r^2 \cdot d \cdot \langle O | \bar{\psi}(0) \psi(0) | O \rangle$$

$$\langle O | \bar{\psi}(0) \psi(0) | O \rangle$$

$$\sim g^2 \frac{T_F}{N_c} r^2 \langle \bar{\psi} \psi(0) \rangle$$

$$\sim \frac{T_F}{N_c} r^3 \quad O(\Lambda_{QCD}^4) \text{ の nonpert. 効果}$$

$$V_{UV} = V_S + V^{US} - (u=2 \text{ renormalization})$$

と  $\mathbb{Z}$  renormalization は 第2項に  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  である。実際、吸収された形式で  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  である。

その結果 Wilson 係数  $V_{UV}(r)$  は renormalization を含み、収束性のある非摂動的級数に好むと予想される。