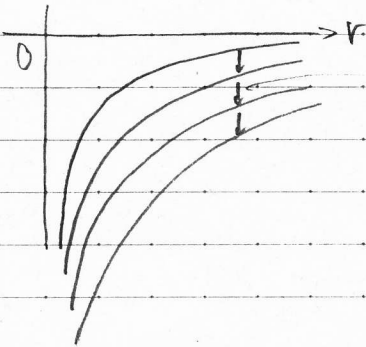


$$V_{\text{pot}}|_{\text{near}} \sim \text{const.} \times \underbrace{\mu \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_s(r)}\right)}_{\Delta_{\text{QCD}}}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$$\int V_{\text{pot}}(r) \sim (\mu r + \text{const.}) \times \Delta_{\text{QCD}}$$

hep-ph/0009087



$r = \frac{1}{\Lambda_{\text{QCD}}}$
 $\Delta_{\text{QCD}} \propto \text{shift}$

- \bar{b} , bottomonium ($b\bar{b}$), charmonium ($c\bar{c}$) のスペクトル間隔は Δ_{QCD}
 → スペクトルが予言能たは before 1998

Remark

今の例では μ defined 積分から出発すると renormalon pole が存在する。
 漸近級数とっては μ 積分

- 積分 μ well defined μ renormalon pole が存在する
 - 積分 μ ill defined μ renormalon pole が無い。
- という例もある。

§5. 全エネルギーにおける renormalization cancellation

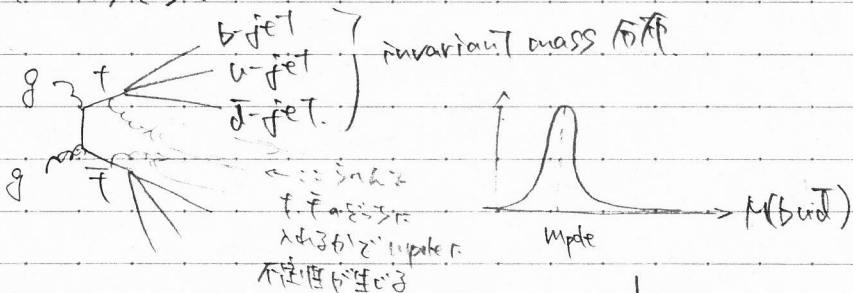
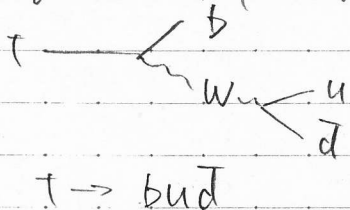
$$E_{tot}(r) := 2m_{pole} + V_{cor}(r)$$

m_{pole} と $M_{PS}(\mu)$ で書き表す時 m_{pole} は素粒子 renormalization と $V_{cor}(r)$ は反素粒子 renormalization が相殺する。

- Pole 質量 = 静止した単体 quark のエネルギー (= propagator の pole の位置)
- M_{PS} 質量 = Lagrangian 中の $-m\bar{\psi}\psi = -\sum_{ij} M_{ij}^E \bar{\psi}_i \psi_j$ と M_{PS} 処方では $\langle \psi \rangle = L^{-1} \langle \psi \rangle$ ($\sum_{ij} M_{ij}^E$ の pole の位)
 $= UV$ 発散の消滅 $\langle \psi \rangle = L^{-1} \langle \psi \rangle$

Pole 質量は quark の肉体的な描像と矛盾する下では、非擾動的な不確定性を受ける。 Λ_{cor} 程度の不確定性がある。

top quark を例に挙げてみる



$$m_{pole} = m_{PS}(\mu) \left[1 + \alpha_s(\mu) d_1 + \alpha_s(\mu)^2 \left(d_{21} \beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{m_{PS}}\right) + d_{20} \right) + \dots \right]$$

同様の手法で d_n を調べると m_{pole} には Λ_{cor} 程度の不確定性が出る。とるが $E_{tot}(r)$ の擾動展開では、 m_{pole} の不確定性が相殺する。(すなわち $V_{cor}(r)$ と $m_{pole}(M_{PS})$ の Borel 変換の $u=1/2$ での renormalization pole は相殺して $E_{tot}(r)$ の最も厚い点に近づく。 renormalization pole は $u=3/2$ である。

→ 収束半径が拡大

→ $V_{cor}(r)$, m_{pole} 各々とも $r \rightarrow \infty$ で $E_{tot}(r)$ の収束性がよくなる。

このとき $V_{cor}(r)$ の不確定性が r に依らずとも重要。同様に m_{pole} の不確定性が M_{PS} に依らずとも重要。

• m_{pole} の擾動展開の高次をみる。

先と同様に LL 近似 ($\beta_0 \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$) では

$$m_{pole, \beta_0} = m_{PS}(\mu) (1 + \delta)$$

$$\delta = \frac{C_F \alpha_s(\mu)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\beta_0 \alpha_s(\mu)}{4\pi} \right]^n \left[\underbrace{n! G_{n+1}}_{\text{renormalization 発散}} + \frac{(-1)^n}{n+1} G_{n+1} \right]$$

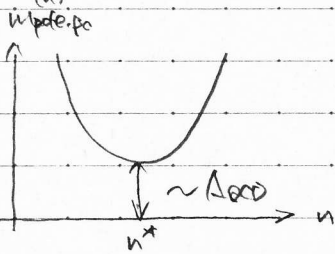
母関数表示: $\sum_{n=0}^{\infty} G_n u^n = \left(\frac{u^2}{M_{\overline{MS}}}\right)^4 \times 3(1-u) \frac{P(1-u)P(1-2u)}{P(3-u)}$

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n y^n = \frac{3-2y}{6} \frac{P(1-2y)}{P(1+y)P(2-y)^2P(3-y)}$

$\sum_{n=0}^{\infty} G_n u^n$ の $u = \frac{1}{2}$ の pole の 寄与 $\sim \text{const.} \times a^n n!$ $a/a = \frac{60 \text{ GeV}}{2\pi}$

導出は省略
だから

$M_{\overline{MS}} \cdot \left(\frac{1}{M_{\overline{MS}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$: $M_{\overline{MS}} = \frac{1}{2} \frac{60 \text{ GeV}}{2\pi}$



• $\Delta m_{\text{pole}} \sim \Lambda_{\text{QCD}} = 200 - 300 \text{ MeV}$

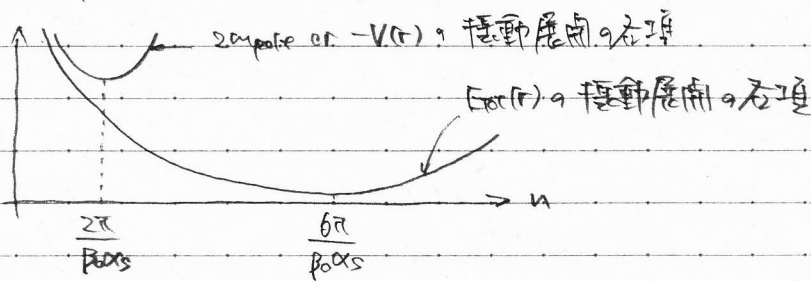
• Δm_{pole} は $M_{\overline{MS}} (= \frac{1}{2} \frac{60 \text{ GeV}}{2\pi})$ 特異点 $M_{\overline{MS}}$ or $M_{\text{bare}} \rightarrow 0$ での $\Delta m_{\text{pole}} \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ constituent quark mass? of \bar{s}

• 不定性, not 予言値

擾動QCDで何が $\epsilon = 3$ での因子 f_1 ?

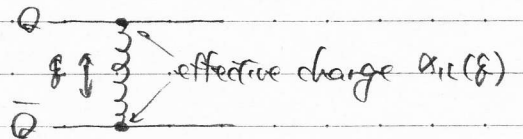
$E_{\text{tot}}(r) = 2m_{\text{pole}} + V_{\text{QCD}}(r)$

$u = \frac{1}{2}$ pole の 寄与 $\sim \text{const.} \times a^n n!$ f_1 $2m_{\text{pole}}$ と $V_{\text{QCD}}(r)$ で相殺
→ $|u| < \frac{1}{2}$ での収束半径が拡大



何が起る $\Rightarrow 7$ 粒子の f_1 ?

$V_{\text{B0}}(r) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} G \frac{4\pi\alpha_{\text{eff}}(q)}{q^2}$



$m_{\text{pole}} = M_{\overline{MS}}(\mu) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} G \frac{4\pi\alpha_{\text{eff}}(q)}{q^2}$

(*) 導出は時間がない



$\alpha_s(\mu)$ は IR ($g \sim \Lambda_{QCD}$) で大になる。これは "renormalization (running)" を引き起こす。
 g が "走る" $\Rightarrow \Lambda_{QCD} \propto \mu_{UV} \cdot \frac{1}{\beta}$

$$e^{ig\pi} = 1 + ig\pi + \frac{1}{2}(ig\pi)^2 + \dots$$

\downarrow 積分 Λ_{QCD} \downarrow 回転対称性の破れ β is loop \downarrow $u = \frac{3}{2}$ pole is 対称性

$$\delta V_{po}(\pi) |_{u=3/2} \sim \int d^3x (g\pi)^2 \frac{\alpha_s(\mu)}{g^2} \sim \Lambda_{QCD} (\Lambda_{QCD} r)^2$$

$E_{tot}(\pi)$ では 1 の部分の $g \sim \Lambda_{QCD}$ の領域で対称性が破れる。これは波長が長い gluon は全 color charge に結合するから。QQ は color singlet (charge 0) だが π 展開 (多重極展開) の leading order ではない。

残った renormalization $\Lambda_{QCD} \sim (\Lambda_{QCD} r)^2$ は $\pi \propto \Lambda_{QCD}^{-1}$ であり $\Lambda_{QCD} \propto \mu^{-\beta}$ として小さくなる。 \rightarrow 不安定性はなくなる。収束性が保たれる。

摂動 QCD の一般的な性質

- エネルギーが増えるほど摂動 QCD の収束性は悪くなる (r が大きい場合)
- これは IR gluon の寄与が増えるから
- IR gluon は total charge に couple する

(1-loop running だけではない) 摂動 QCD の予言値

$$\mu_{UV} = 9.190 \text{ GeV}, \quad \mu = 0.90 \text{ GeV}, \quad r = 400 \text{ MeV} \quad (r \approx 0.5 \text{ fm})$$

とすると 収束性は

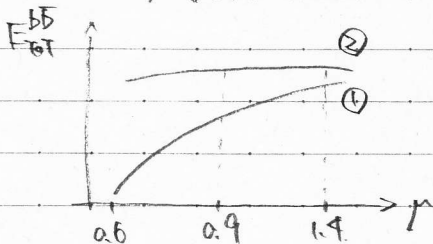
$$E_{tot}^{bb} = 10.408 - 0.275 - 0.362 - 0.589 \text{ GeV} \quad [\text{pole mass と MS mass}] \quad \textcircled{1}$$

$2 \text{ loop} \quad V_{QCD}^{LO}(r) \quad V_{QCD}^{NLO}(r) \quad V_{QCD}^{NNLO}(r) \quad \text{表 I の場合}$

$$= 8.380 + 1.560 - 0.110 - 0.022 \text{ GeV} \quad [\text{pole mass と MS mass}] \quad \textcircled{2}$$

$O(\alpha_s^0) \quad O(\alpha_s^1) \quad O(\alpha_s^2) \quad O(\alpha_s^3) \quad \text{表 II の場合}$

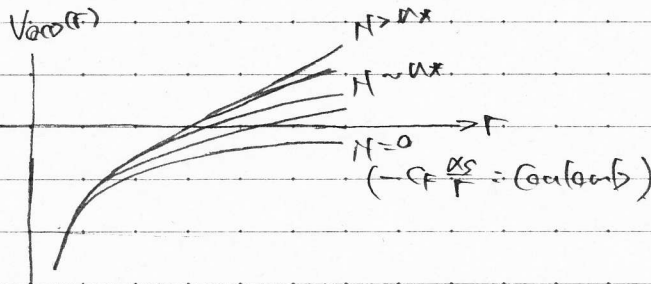
$Z(r, \mu)$ の収束性



§6 Renormalization 描像に基づいた Coulomb + linear 型 potential.

§6-1 背景

- $E_{tot}(r)$. あるいは $V_{eff}(r) + const.$. up to 3-loop (最新の 4 項 exact) は $r \lesssim 0.5 fm$ で lattice の計算結果に収束している。
 特に高次補正を含めると r が小さいほど予言能力が上がる。 r が大きいほど lattice 結果に近づいている。 ($r > 0.5 fm$ では収束性が悪く、予言能力は低い。)
- r が大きい。数値的には「Coulomb + linear 型」に近づいている。
- LL 近似でも、高次項を含めると (数値的には) 「Coulomb + linear 型」に近づいている。



⇒ 高次補正と r が大きい群で予想。L. renormalization-dominance 仮説と組み合わせると $E_{tot}(r)$ (あるいは定数部分を除いた $V_{eff}(r)$) はどのような形に漸近するのだろうか?
 Ans. あるいは「Coulomb + linear 型」

§6-2 結果 (Nth LL 以降は手打ちでいい)

格子法で LL, NLL, ... を足し上げると

$$V_{eff}(r) = V_C(r) + \sigma r + const. + [O(\Lambda_{QCD}^3 r^2) \text{ 不確か}]$$

- "Coulomb" potential (具体的表式は少し後)

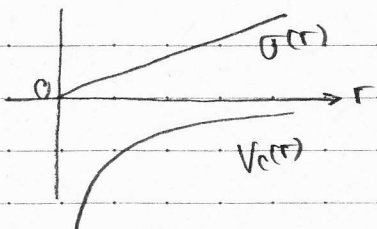
$$V_C(r) \rightarrow -\frac{2\pi C_F}{\beta_0 r} \ln(1/r\bar{\Lambda}) + \frac{1}{2\beta_0} \ln \ln(1/r\bar{\Lambda}) \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

$$\rightarrow -\frac{4\pi C_F}{\beta_0 r} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_{MS}$$

中間領域では 2 つの漸近形を $\sigma C - \sigma^2$ に近づける

- (linear potential) の降級

eg. $\sigma_{LL} = \frac{2\pi C_F}{\beta_0} (\bar{\Lambda}^{1-loop})^2$; $\bar{\Lambda}^{1-loop} = \mu \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu)}\right)$



具体的表式

[準備]
$$V_{\text{ord}}(r) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left[-CF \frac{4\pi\alpha_V(q)}{q^2} \right]$$

に於て $\alpha_V(q)$ を定義する。

$\alpha_V(q)$ を擾動的に計算して $\langle \gamma \rangle$ は群で improve して $q \in \mathbb{R}^4$ 上の $\alpha_V^{PT}(q)$ と書くと
種別表示として $q \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}$
解析情報

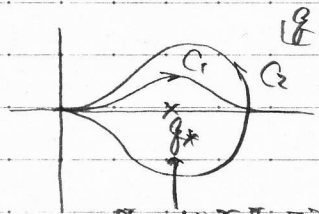
$$V_{\text{ord}}(r) = -\frac{CF}{i\pi} \int_{\mathbb{C}} dq \frac{\alpha_V^{PT}(q)}{q^2} - \frac{2CF}{\pi} \text{Im} \int_{\mathbb{R}} dq \frac{e^{iqr}}{q^2} \alpha_V^{PT}(q)$$

(LL, NLL, NNLL, N³LL すべてでも使える表式)

LL 付近では σ と simple な表式がある (後述)

$$\sigma = \frac{CF}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} dq q \alpha_V^{PT}(q)$$

NNLL 付近では種別結果の解析的表式が得られる。



$\alpha_V^{PT}(q)$ が発散点 singularity
LL 付近 pole
NLL 以降 branch point

§6-3 解釈: V_{ord} or a UV-dominance

$$V_{\text{UV}}(r; \mu_F) := \int_{|\mathbf{q}| > \mu_F} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left[-CF \frac{4\pi\alpha_V(q)}{q^2} \right] = -\frac{2CF}{\pi} \int_{\mu_F}^{\infty} dq \frac{\alpha_V(q)}{q^2} \alpha_V^{PT}(q)$$

と定義する。F.T.L. $\mu_F \gg \Lambda_{\text{ord}}$ とする。

$q > \mu_F$ では $\alpha_V(q)$ は擾動的に予言できる [= $\alpha_V^{PT}(q)$]。擾動的に母関数に予言できり量。

V_{UV} の Borel 変換は ($q \sim \Lambda_{\text{ord}}$ を念頭に置いて) LL 付近に "anomalous pole" $u = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ の系列をまたいでとて示される。

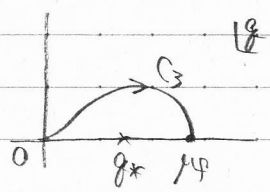
Theorem

$$V_{\text{UV}}(r; \mu_F) - [V_{\text{ord}}(r) + \sigma r] = \text{const.} + O(\mu_F^3 r^2) \quad \text{for } \mu_F r \gg 1 \quad (*)$$

$V_{\text{ord}}(r) = V_{\text{ord}}(r) + \sigma r + \text{const.} + O(\Lambda_{\text{ord}}^3 r^2)$ かつ $V_{\text{UV}}(r)$ の中で「Coulomb + linear」部分は UV の寄与で与えられる。擾動 QCD で予言可能な部分である。すなわち、 \mathbb{R}^4 の分離因子から与えられる量であると示される。

Proof

$$V_{\text{UV}}(r; \mu_F) - [V_{\text{ord}}(r) + \sigma r] = \frac{CF}{i\pi} \int_{\mathbb{C}} dq \frac{\alpha_V^{PT}(q)}{q^2} + \frac{2CF}{\pi} \text{Im} \int_{\mathbb{R}} dq \frac{e^{iqr}}{q^2} \alpha_V^{PT}(q) - \sigma r$$



$\mu\Gamma \ll 1$ 時 $C_3 F z^{-1} e^{i\mu\Gamma} = [1 + i\mu\Gamma + \frac{1}{2}(i\mu\Gamma)^2 + \dots]$ と展開できる。
 すると

$$\frac{2C_F}{\pi} \text{Im} \int_{C_3} d\mu \frac{\alpha_V(\mu)}{\mu\Gamma} = -\frac{C_F}{\pi i} \int_{C_2} d\mu \frac{\alpha_V(\mu)}{\mu\Gamma}$$

$$\frac{2C_F}{\pi} \text{Im} \int_{C_3} d\mu \left(-\frac{1}{2}\mu\Gamma\right) \alpha_V^{\text{PT}}(\mu) = -\frac{C_F}{\pi i} \int_{C_2} d\mu \left(-\frac{1}{2}\mu\Gamma\right) \alpha_V^{\text{PT}}(\mu) = 0$$

すなわち、この項は (*) で相殺し、残りは $\text{const.} + O(\mu\Gamma^2)$ となる。

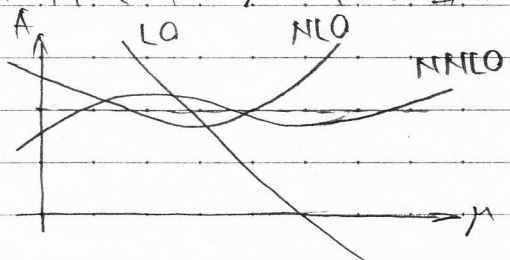
§6-4 導出

まず、実際には LO, NLO, NNLO, ... の高次補正計算が与えている物理量で、
 とおき、摂動 QCD の予言を得る。これを復習。

例. $A(\alpha_s(\mu); \mu) = a_0 + a_1 \alpha_s(\mu) + \alpha_s(\mu)^2 \left[a_2^{(1)} \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + a_2^{(0)} \right]$
 $+ \alpha_s(\mu)^3 \left[a_3^{(2)} \ln^2\left(\frac{\mu}{Q}\right) + a_3^{(1)} \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + a_3^{(0)} \right]$
 $+ \dots$

(注) この計算は、このようにして行われる。

ある Q に対して A の μ -dep を図示すると。



摂動 QCD が有効な場合、すなわち $Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ の時、高次補正を含まず、
 μ -dep が減って、予言が安定になる。

$O(\alpha_s^N)$ までの予言があるとき、 μ -dep. は $O(\alpha_s^{N+1})$

★ Minimal Sensitivity Scale (Stevenson)

Given $A(\alpha_s(\mu); \mu)$ up to N^{th} LO $[A]_N = \int_{\mu=0}^{\mu} A(\mu) \alpha_s^k$

→ Choose $\mu = \mu^*$ by $\mu \frac{\partial [A]_N}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu^*} = 0$

このとき $[A]_N |_{\mu=\mu^*}$ をよい予言値として選ぶ。

$$\delta A \approx \left| [A]_N |_{\mu=2\mu^*} - [A]_N |_{\mu=\frac{1}{2}\mu^*} \right|$$

以下では高次補正を LL 近似で見積もる (NNL, ... の場合は割愛)

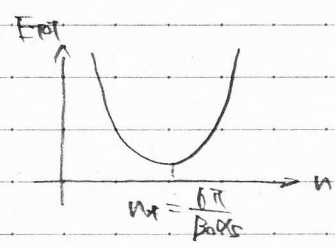
$$V_{\beta_0}(r) = -CF 4\pi \alpha_S(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2} \left[-\frac{\beta_0 \alpha_S}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) \right]^n$$

$$E_{\text{tot.}\beta_0}(r) = \sum \text{multipole } \beta_0 + V_{\beta_0}(r)$$

$N \gg 1$ a.e. $[E_{\text{tot.}\beta_0}(r)]_N \approx \text{const.}$

$$\alpha_S(\mu) = \frac{6\pi}{\beta_0 N}$$

したがって $\mu = \mu_*$ (a.e.) minimal sensitivity scale



高々 $N \gg 1$ の $[E_{\text{tot.}\beta_0}(r)]_N$ $\mu = \mu_*$ の漸近形を求めた。

LL の場合の結果

$$N \gg 1 \text{ a.e. } [E_{\text{tot.}\beta_0}(r)]_N \Big|_{\mu=\mu_*} = \frac{4CF}{\beta_0} \bar{\Lambda} \cdot \mathcal{V}(\bar{\Lambda} \cdot N) \quad \text{w/ } \bar{\Lambda} = \mu_* \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_S(\mu_*)}\right)$$

$$\mathcal{V}(R \cdot N) = \text{const.} + \underbrace{\mathcal{V}_C(R)}_{\text{"Coulomb" linear}} + \underbrace{\sigma R + D(R \cdot N)}_{\text{residual } O(\Lambda_{\text{QCD}}^3 r^2) \text{ renormalization}}$$

$\mathcal{V}_C(R)$, σR は $N \rightarrow \infty$ の極限
 $D(R \cdot N)$ は $N \rightarrow \infty$ の発散
 漸近形を調べる

$$(i) \mathcal{V}_C(R) = -\frac{\pi}{R} + \frac{1}{R} \int_0^{\infty} dx e^{-x} \text{Arctan} \left[\frac{\sqrt{x}}{\ln(\beta_0 x)} \right]$$

$$\left(= \frac{1}{R} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}-1}{t} \text{Im} \left[\frac{1}{\ln(\beta_0 t) - i\pi/2} \right] \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow 0 \text{ a.e. } \mathcal{V}_C(R) \sim -\frac{\pi}{2R \ln(1/R)} \\ r \rightarrow \infty \text{ a.e. } \mathcal{V}_C(R) \sim -\frac{\pi}{R} \end{array} \right.$$

$$(ii) \sigma = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{linear potential } \frac{2\pi CF}{\beta_0} \bar{\Lambda}^2 r$$

$$(iii) D(R \cdot N) = \frac{1}{12} R^2 \ln N + f(R) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

$$f(R) = \begin{cases} -\frac{1}{6} R^2 \left[\ln \ln\left(\frac{1}{R}\right) + \text{const.} \right] & \text{as } R \rightarrow 0 \\ -\frac{1}{6} R^2 \left[\ln \ln R + \text{const.} \right] & \text{as } R \rightarrow \infty \end{cases}$$

由り $2G - 2'G \rightarrow \text{const.}$ $O(\Lambda_{\text{QCD}}^3 r^2)$ renormalization 不変性を表す。

$\nu(R, N)$ の導出 角座積分単位

$$[V_{\beta_0}(r)]_N \Big|_{r=r^*} = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty dg \frac{\sin(g r)}{g r} \frac{1-L^N}{1-L}}{\pi r}$$

$$\left(L = \frac{\beta_0 \alpha_S(r^*)}{2\pi} \ln\left(\frac{r^*}{g}\right) = 1 + \frac{3}{N} \ln\left(\frac{\Lambda}{g}\right) \right)$$

↑ $r^* \cdot \Lambda$ の定義

$$= -\frac{4CF}{\beta_0} \int_0^\infty dg \frac{\sin(g r)}{g r} \frac{1-L^N}{\ln(\Lambda/g)}$$

$$= \frac{4CF}{\beta_0} \Lambda [v_1(\Lambda r) + v_2(\Lambda r)]$$

$$v_1(R) = \text{Im} \int_0^\infty dg \frac{e^{i g R}}{g R} \frac{1}{\ln(\Lambda/g) - i\epsilon}$$

$$v_2(R) = -\text{Im} \int_0^\infty dg \frac{e^{i g R}}{g R} \frac{[1 + \frac{3}{N} \ln(\Lambda/g)]^N}{\ln(\Lambda/g) - i\epsilon}$$

$\sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty dg = \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty dg$
 $\epsilon \rightarrow 0$ の場合 $g=1/r$ 無限小
 の虚部を与える積分を
 正規化して。

$$= \frac{\pi \cos R}{R} - \text{Pr} \int_0^\infty dg \frac{\sin(g R)}{g R} \frac{1}{\ln(\Lambda/g)} [1 + \frac{3}{N} \ln(\Lambda/g)]^N$$

↑ $\frac{1}{2+i\epsilon} = \text{Pr} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$

$\lim_{N \rightarrow \infty} [1 + \frac{3}{N} \ln(\Lambda/g)]^N$ に注意して $v_1(R), v_2(R, N)$ の $\left\{ \begin{matrix} r \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{matrix} \right\}$ の漸近形

と直接に調べた。

$v_2(R, N)$ の 先には $L^N \rightarrow 1/g^3$ とすると const. かつ R^2 部分には IR div の積分となる。

IR is sensitive には IR renormalization = 紫外可子部分。 $\sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty dg$ で取除。

Implication

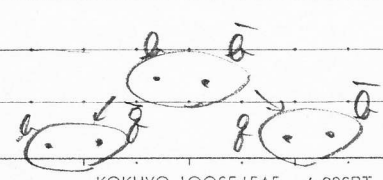
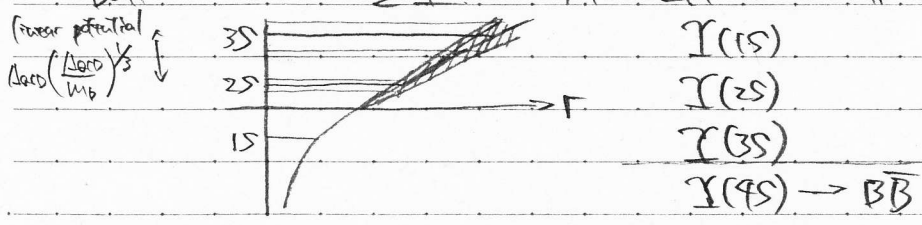
• したがって得た表式から

$$[E_{tot} \beta_0(r)]_N \Big|_{r=r^*} \approx \left(Q_{\text{max}}(r^*) + \text{const.} + \frac{4CF}{\beta_0} \Lambda [v_1(\Lambda r) + v_2(\Lambda r)] \right) + \frac{4CF}{\beta_0} \Lambda D(\Lambda r, N)$$

擾動 QCD の予言値

--- \therefore 不安定性 (L.N での) 即ち記述面と解銀可

Bottomonium の質量 $\approx \bar{H} = E_{tot}(r) + \frac{p^2}{2m_b}$ の IR 部分 = 固有値



別の見方

$$Z_{MP} = Z_{MS}(M) + \int_{g_{min}}^{\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(E_F + \pi \alpha_{II}(g))}{g^2}$$

$$= Z_{MS}(M) + \frac{Z_F}{\pi} \int_0^M dg \alpha_{II}(g)$$

角動量保存

$$V_{CD}(r) \sim - \frac{Z_F}{\pi} \int_0^{\infty} dg \frac{\alpha_{II}(g)}{g r} \alpha_{II}(g)$$

X = 1S, 2S, 3S ; 1P, 2P

E_{CD}(r) の IR 部分

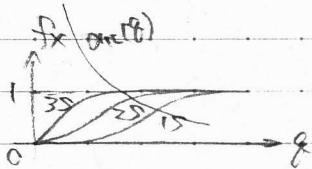
$$E_x^{bb} = \langle X | H | X \rangle$$

$$= \langle X | \left[Z_{MS}(M) + \frac{Z_F}{\pi} \int_0^M dg \alpha_{II}(g) - \frac{Z_F}{\pi} \int_0^{\infty} dg \alpha_{II}(g) \frac{r^2}{g r} + \frac{p^2}{M P} \right] | X \rangle$$

$$= Z_{MS}(M) + \langle X | \frac{p^2}{M P} | X \rangle + \frac{Z_F}{\pi} \int_0^{\infty} dg \alpha_{II}(g) f_x(g)$$

$$f_x(g) = \theta(M-g) - \int_0^{\infty} dt t^3 |R_{x,t}(r)|^2 \frac{\alpha_{II}(g)}{g r}$$

$f_x(r) = \langle r | X \rangle$ の動径方向成分



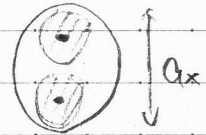
B-quark の自己エネルギー $g \geq \sqrt{\alpha_x}$ } 2つの成分
 B-quark " " $\times 9$ 成分 } 対応の $E_x^{bb} = Z_{MS}(M)$ が決まる

1S → 2S → 3S

$\sqrt{\alpha_{1S}} \rightarrow \sqrt{\alpha_{2S}} \rightarrow \sqrt{\alpha_{3S}}$

2つの $\alpha_{1S}(g)$ が急激に増大

→ 励起状態の自己エネルギーが計算不能になる



Bottomonium の質量は主に

(i) B と反B 対の MS 質量

(ii) B と反B 対の自己エネルギーのうち gluon の波長が $\lambda \approx \alpha_x$ の成分

より、特に (ii) は (x = 1, 2, 3) の constituent quark mass と MS mass の差がより大きい。