摂動QCDに基づく
クォーク間力とクォーク質量の理解

§1. QCD Lagrangian. Chiral 対称性. Quark 質量

$\gamma_5 \psi_R = + \psi_R$

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{\substack{f=u,d,s\\c,b,t}} \left[\bar\psi_L^{(f)} i\not{D} \psi_L^{(f)} + \bar\psi_R^{(f)} i\not{D} \psi_R^{(f)} - m_f \left(\bar\psi_L^{(f)} \psi_R^{(f)} + \bar\psi_R^{(f)} \psi_L^{(f)} \right) \right]$$

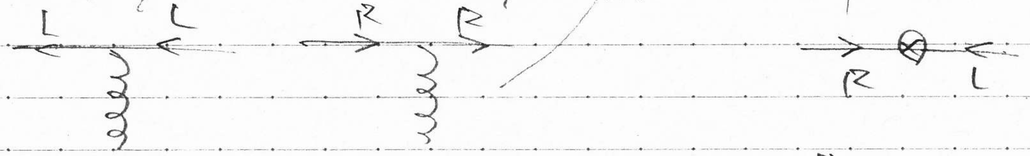
$$- \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a}$$

Chiral 変換：ψ_L と ψ_R を独立に回す変換

$\psi_L \to e^{i\theta_L} \psi_L \qquad \psi_R \to e^{i\theta_R} \psi_R$

$$\bar\psi (i\not{D} - m) \psi = \underbrace{\bar\psi_L i\not{D} \psi_L + \bar\psi_R i\not{D} \psi_R}_{\text{Chiral 不変}} - \underbrace{m (\bar\psi_L \psi_R + \bar\psi_R \psi_L)}_{\text{Chiral 不変ではない}}$$

Chiral 不変 $\Longleftrightarrow$ Chirality 保存（Lはずっと L. Rはずっと R）



QCDでは全ての $m_f \to 0$ としてもハドロン質量 $\neq 0$ かつ

$\langle 0 | \bar\psi_L \psi_R + \bar\psi_R \psi_L | 0 \rangle \neq 0$

と信じられている。

実際、 $m_u \simeq 2\,\text{MeV}$

$m_d \simeq 5\,\text{MeV} \quad \ll \quad m_p \simeq m_n \simeq 1\,\text{GeV}$

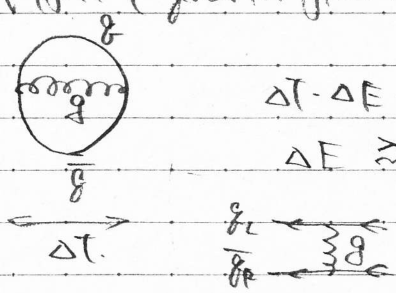
$\to$ constituent quark mass $\sim 300\,\text{MeV}$

Chiral 対称性が自発的に破れている (SSB)。

$\to$ Chirality が保存しない。

§1-2 Chiral 対称性のSSBの描像

何もない（quark. gluon が1個もない）摂動的真空のから考



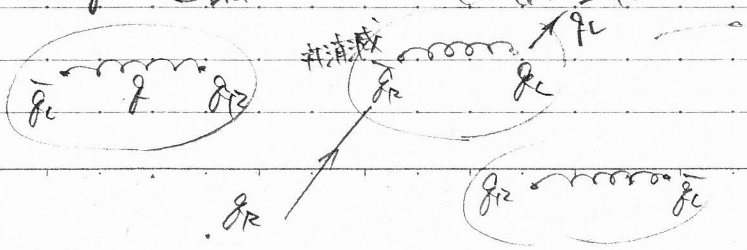
$\Delta t \cdot \Delta E \sim 1.$

$\Delta E \simeq 2m_q - E_{bin}$ 　　 ΔEが大きいとΔtが小さくなる

q_Lと$\bar q_R$の間の引力が強く、E_{bin}が大きいと推定される

$q = u, d, (s)$

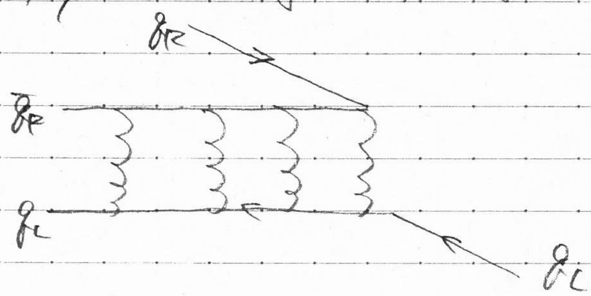
$2m_q - E_{bin} < 0$ － condensation

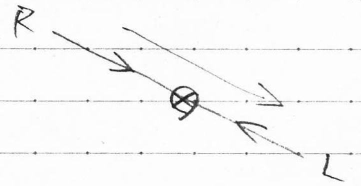


右巻きが
左巻きに移ったようにみえる

Date

Feynman diagram的には





基本相互作用はChiralityを保存

真空中をpropagateすると Chiralityが保存でないようにみえる

非摂動的解析が必要

e.g. NJL model, Schwinger-Dyson eq. Lattice QCD

しかし摂動QCDでも(おぼろげに)見えるものがある。→ リノーマロン

SSBは無理

constituent quark massの描像(?)に近いところまではいけそう

$\sim O(\Lambda_{QCD})$ の物理

§2 [準備] 摂動QCDの $\overline{MS}$ くりこみとくりこみ群

2-1. 摂動QCDのくりこみ

簡単のため gauge 場のみの部分をみる (quark, ghost を無視)

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a} \quad ; \quad G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\text{gauge fixing}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}$$

これらは bare な場と bare coupling で表されている。

一般に 複素数と考える

次元正則化: $D = 4 - 2\varepsilon$ (時間1次元, 空間 $3-2\varepsilon$ 次元)

$g = \tilde{\mu}^{\varepsilon} Z_g g_R$ 　　$\tilde{\mu}$: 次元1の量

次元をもつ　次元をもたない

$$A_\mu = \sqrt{Z_A} A^R_\mu$$

と置きかえて、$Z_i = Z_i(\varepsilon, g_R)$ として適切に $\varepsilon \to 0$ で発散させると、全ての物理量 (S行列要素, 断面積, スペクトル, …) の摂動展開を (UV) finite に計算できる ('t Hooft)

元は1つのパラメータ g を $\tilde{\mu}$ と g_R (と Z_g) に分割している

→ $\tilde{\mu}$ (あとで μ にかきかえる) と $\alpha_s := g_R^2/4\pi$ に関係がつく → $\alpha_s = \alpha_s(\mu)$

$\overline{MS}$-scheme　$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{4\pi}} e^{\gamma_E/2}$ と書き直す。 ← 経験則から摂動でこの形が出てくるため、あらかじめおきかえておく。

$$Z_g = 1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\frac{z_1}{\varepsilon} + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right)^2\left(\frac{z_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{21}}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right)^3\left(\frac{z_{33}}{\varepsilon^3} + \frac{z_{32}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{31}}{\varepsilon}\right) + \cdots$$

Z_A, Z_{ghost}, … も同様

ε の pole だけ引く。(ε^0, ε^1, … は引かない)

→ くりこみ処方が一意的に決まる

特徴: 収束性がよい (経験則)

2-2. くりこみ群と running coupling

Observable $A = A(\alpha_s(\mu); \mu/Q)$ 　　Q: A の典型的なエネルギースケール

摂動展開で計算

$$A(\alpha_s(\mu), \mu/Q) = a_0 + a_1 \alpha_s(\mu) + \alpha_s(\mu)^2\left[a_2^{(1)} \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + a_2^{(0)}\right] + \alpha_s(\mu)^3\left[a_3^{(2)} \ln^2\left(\frac{\mu}{Q}\right)^2 + a_3^{(1)} \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + a_3^{(0)}\right] + \cdots$$

スケールが1つしかない obs. だと μ/Q 依存性は $\ln$ しか現れない

∵ $\frac{\mu^\varepsilon}{Q^\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\ln^2\left(\frac{\mu}{Q}\right) + \cdots$

$g \propto \mu^\varepsilon$ より この形で現れる

物理量はくりこみスケール μ に依らない（bare な g を固定） → RG eq.

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} A\left(\alpha_s(\mu), \frac{\mu}{Q}\right)$$

$$= \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \underbrace{\mu \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu}}_{\beta(\alpha_s(\mu)) = \text{ベータ関数} \cdots \text{obs にはよらない}} \frac{\partial}{\partial \alpha_s(\mu)}\right] A\left(\alpha_s(\mu); \frac{\mu}{Q}\right)$$

$T = \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right)$ とおくと $\frac{\partial}{\partial T} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} - \hat{H}\right) A(\alpha_s ; T) = 0 \quad w/ \quad \hat{H} = -\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}$$

$$\Rightarrow A(\alpha_s ; T) = e^{\hat{H}T} A(\alpha_s ; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n \hat{H}^n}{n!} A(\alpha_s ; 0)$$

$$= \sum_n \frac{\ln^n\left(\frac{\mu}{Q}\right)}{n!}\left[-\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right]^n \left(a_0 + a_1\alpha_s + a_2^{(0)}\alpha_s^2 + a_3^{(0)}\alpha_s^3 + \cdots\right)$$

$\beta(\alpha_s) = -\beta_0\alpha_s^2 - \beta_1\alpha_s^3 - \beta_2\alpha_s^4 - \cdots$ ← 計算したらこうなる

$n=1$ $\quad -\beta(\alpha_s)\underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\alpha_s}_{=1} = \beta_0\alpha_s^2 + \beta_1\alpha_s^3 + \beta_2\alpha_s^4 + \cdots \qquad (*)$

$n=2$ $\quad \left[-\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right]^2 \alpha_s = (\beta_0\alpha_s^2 + \beta_1\alpha_s^3 + \beta_2\alpha_s^4)\underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha_s}[(*)\text{の左辺}]}_{= 2\beta_0\alpha_s + 3\beta_1\alpha_s^2 + \cdots}$

$$= 2\beta_0^2\alpha_s^3 + 5\beta_0\beta_1\alpha_s^4 + \cdots$$

$n=3$ $\quad \left[-\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right]^3 \alpha_s = 3!\beta_0^3\alpha_s^4 - ☆\beta_0^2\beta_1\alpha_s^5 + \cdots$

⋮

$$A(\alpha_s ; T) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\underbrace{a_1\alpha_s\left[\beta_0\alpha_s\ln\left(\frac{\mu}{Q}\right)\right]^n}_{\text{LL (Leading Log)}} + \underbrace{☆\frac{\beta_1}{\beta_0}\alpha_s^2\left[\beta_0\alpha_s\ln\left(\frac{\mu}{Q}\right)\right]^n}_{\text{NLL (Next-to-Leading Log)}}\right.$$

$$\underbrace{+ \cdots}_{\text{NNLL }(\beta_2\text{ も必要})}$$

つまり

$$A\left(\alpha_s(\mu); \frac{\mu}{Q}\right) = a_0 + a_1\alpha_s(\mu)\left[1 + \alpha_s(\mu)\left(\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{Q}\right) + \frac{a_2^{(0)}}{a_1}\right) + \alpha_s(\mu)^2\left(\beta_0^2 \ln^2\left(\frac{\mu}{Q}\right) + \cdots\right) + \cdots\right]$$

LLは β_0 で決まる

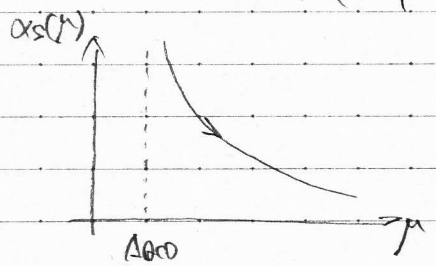
$$\mu\frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\beta_0\alpha_s(\mu)^2 - \beta_1\alpha_s(\mu)^3 - \cdots$$

以後 $\beta_0/2\pi$ と書く　　以後ほとんど無視

1-loop running

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{QCD})}$$　　Λ_{QCD} : 積分定数

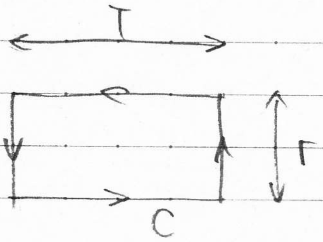
逆に解くと　$$\Lambda_{QCD} = \mu \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu)}\right)$$



Λ_{QCD} は摂動論が破綻するスケール
$\alpha_s(\mu) \sim O(1)$
実験値と比較すると
$\Lambda_{QCD} \sim 200 - 300$ MeV

§3 Quark間力 QCD potential

Wilson loop $W[A_\mu] = \mathrm{Tr}\left[P\, e^{ig\int_C dx^\mu A_\mu(x)}\right]$



Wilson loopの期待値からQCD potential $V_{QCD}(r)$を

$$\langle W[A_\mu]\rangle := \int \mathcal{D}A_\mu\, W[A_\mu]\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{QCD}}$$

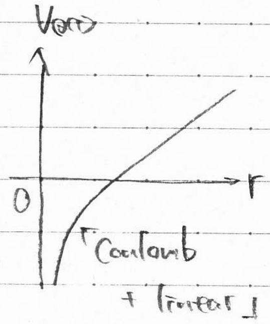
$$= \text{const.} \times e^{-iTV_{QCD}(r)} \quad \text{as } T\to\infty$$

$V_{QCD}(r)$は:
すぐ後に説明する理由から、重いquark (= static color charge) の間のエネルギーを表す。

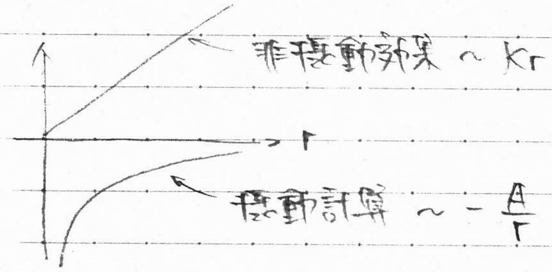
例えば、lattice QCDによる数値計算から

$$V_{QCD}(r) \simeq -\frac{A}{r} + Kr \ (+\,\text{const.})$$

でよくfitできることが知られている

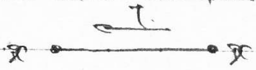


Folklore



⇒ 間違い!!
特に $r \lesssim 0.5$ fm
摂動で線形部分も再現できる。

・QCD potentialの意味をより明確にするためにかきかえる。
Wilson lineの経路積分表示



$$e^{i\int_0^T dt\, A_0(t,x)}\, \delta^3(x-y) = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^\dagger\, \psi(T,x)\psi^\dagger(0,y)\, \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_{HQET}\right]$$

heavy quark effective theory

$\mathcal{L}_{HQET} = \psi^\dagger(x)\, iD_t\, \psi(x)$, $\quad D_t = \partial_t - igA_0(x)$

$\psi(x)$: 複素スカラー場 (SU(N)のN表現)

両辺をTで微分して同じ方程式に従い、同じ初期条件をみたすことから示せる。
これを使うと

$$W[A_\mu]\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

$$= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^\dagger\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\chi^\dagger\, \exp\left[i\int d^4x\left(\psi^\dagger iD_t\psi + \chi^\dagger iD_t\chi\right)\right]$$

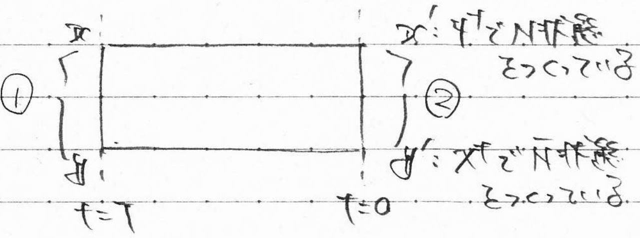
$$\times\, \mathrm{tr}\left[\psi(x;T)\,\phi^\dagger(x,y;T)\,\chi(y;T)\right] \quad \leftarrow ①$$

$$\times\, \mathrm{tr}\left[\psi^\dagger(x';0)\,\phi(x',y';0)\,\chi^\dagger(y';0)\right] \quad \leftarrow ②$$

$\psi(x)$ $\chi(x)$ 複素スカラー場 $\quad D_t = \partial_t \pm igA_0$

N表現 $\bar{N}$表現

$$\phi(x, y; T) = P\, e^{-ig\int_y^x dz \cdot A(z, T)}$$



あるいは 正準形式では

$$|\alpha\rangle = \psi^\dagger(x')\,\phi(x', y'; 0)\,\chi^\dagger(y')\,|0\rangle$$

$$|\beta\rangle = \psi^\dagger(x)\,\phi(x, y; T)\,\chi^\dagger(y)\,|0\rangle$$

$$H = H_{QCD} + ig\psi^\dagger A_0 \psi - ig\chi^\dagger A_0 \chi$$

として

$$\langle W[A_\mu]\rangle = \int \mathcal{D}A_\mu\, e^{i\int dx\, \mathcal{L}_{QCD}}\, W[A_\mu] = \frac{\langle\beta|\, e^{-i\hat{H}T}\,|\alpha\rangle}{\delta^3(x-x')\,\delta^3(y-y')}$$

$$= \text{const.} \times e^{-iT V_{QCD}(r)} \quad \text{as} \quad T \to \infty$$

つまり $V_{QCD}(r)$ は $|\alpha\rangle$ という状態と overlap がある $\hat{H}$ の固有状態のうち最低エネルギーの状態のエネルギー固有値

$$\langle\beta|\, e^{-i\hat{H}T}\,|\alpha\rangle = \sum_n \langle\beta|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\, e^{-iE_nT} \xrightarrow[T\to\infty]{} \langle\beta|n_0\rangle\langle n_0|\alpha\rangle\, e^{-iE_{n_0}T}$$

$-i\epsilon$処方をとっている

補足

非相対論的 Schrödinger 場 の Lagrangian ($\to$ Schrödinger eq.)

$$\mathcal{L}_{QM} = \psi^\dagger\left(iD_t - \frac{D^2}{2m}\right)\psi$$

これで $m \to \infty$ とすると $\mathcal{L}_{HQET}$ になる

§4 QCD potential のリノーマロン

§4-1. 概略

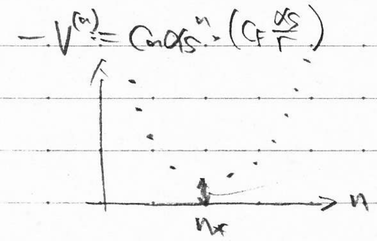
QCD potential を摂動QCDで計算すると

$$V_{QCD}(r) = -C_F\frac{\alpha_s(\mu)}{r}\left[1 + C_1\alpha_s(\mu) + C_2\alpha_s(\mu)^2 + \cdots\right]$$

という α_s に関する展開が得られる
くりこみ群に基づくある方法で C_n を推定(計算)すると

$$C_n \approx n!\left(\frac{\beta_0}{2\pi}\right)^n$$

となる。$n!$ のせいで高次で急激に増大する級数となっている



$$n_* \approx \frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu)}$$

$$\left[-V^{(n)}\right]_{n=n^*} \sim \Lambda_{QCD} = \mu\exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu)}\right)$$

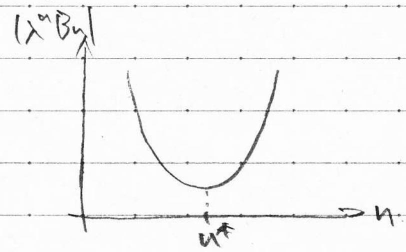
[背景] 漸近級数

e.g. $F(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4}$　　$\lambda\phi^4$ 理論をイメージしたおもちゃ

- $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ で積分は well defined
- $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ で積分は発散
- $\lambda = 0$ が真性特異点

λで展開したときの収束半径は0

$$\to F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda}{4!}x^4\right)^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n B_n \quad B_n = \sqrt{2}\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)$$

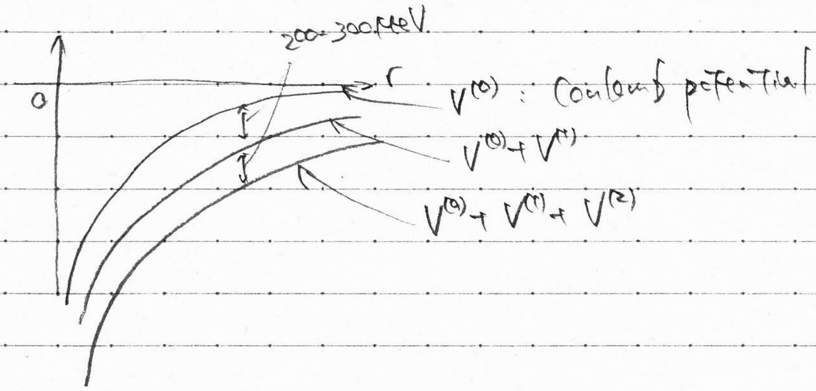


$$\delta F_N = \left|F(\lambda) - \sum_{n=0}^{N}\lambda^n B_n\right|$$

は $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ のとき $N \lesssim n_*$ の間は近似をどんどんよくすることができる

$\boxed{N \approx n_* \text{ で } \delta F_N \approx |\lambda^n B_n|_{n=n_*}}$

QCDも $\alpha_s = 0$ は真性特異点だろう。
→ at best 漸近級数だろう
◦ $\delta V_{QCD} = \Lambda_{QCD} \sim 200-300$ MeV



§4-2. 詳細
摂動計算

$$V_{QCD}(r) = -C_F \frac{\alpha_s(\mu)}{r}\left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\beta_0 \ln(\mu r) + a_1\right) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2\left(\beta_0^2 \ln^2(\mu r) + \cdots\right)\right]$$

$$C_F = \frac{4}{3} \qquad T_F^a T_F^a = C_F \mathbb{1} \qquad \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha_s^2 - \cdots$$

運動量空間でLLをたしあげた(F.T.) potential を形式的に

$$V_{\beta_0}(r) := -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} C_F \frac{4\pi\alpha_{1L}(q)}{q^2} \qquad w/\ q = |\vec{q}|$$

とおく。

$$\alpha_{1L}(q) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(q/\Lambda_{QCD})} = \frac{\alpha_s(\mu)}{1 + \frac{\beta_0\alpha_s(\mu)}{2\pi}\ln(q/\mu)} \qquad \text{1-loop running coupling}$$

$$\Lambda_{QCD} = \mu \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu)}\right)$$

LLを q-space でたしあげたことになる。
$q = \Lambda_{QCD}$ で $\alpha_{1L}(q)$ に pole があるために $V_{\beta_0}(r)$ は ill-defined
$\alpha_s(\mu)$ で展開すると各項は well-defined

$$V_{\beta_0}(r) = -C_F 4\pi\alpha_s(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{q^2}\left[-\frac{\beta_0\alpha_s}{4\pi}\ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)\right]^n$$

$$=: -C_F 4\pi\alpha_s(\mu) \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\beta_0\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right]^n f_n(r;\mu) \times n!$$

各 $f_n(r;\mu)$ は well-defined だが、漸近級数になっている。
→ $O(\Lambda_{QCD})$ の不定性が生じる。

これを示すために母関数を定義
[Borel 変換]

$$F(r,\mu;u) := \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{iq\cdot r}}{q^2}\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)^u = \sum_n f_n(r;\mu)\,u^n$$

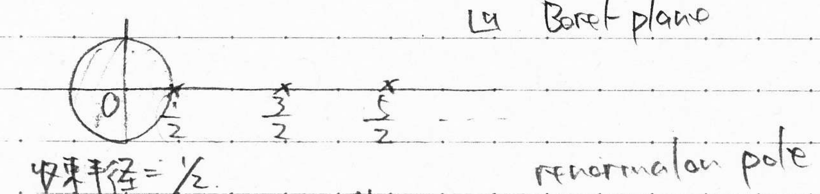
$$\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)^u = e^{u\ln\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)} = \sum_n \frac{u^n}{n!}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)\right]^n$$

$$= \frac{1}{4\pi^{3/2} r}\left(\frac{\mu r}{2}\right)^{2u}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-u\right)}{\Gamma(1+u)}$$ これがpoleを出す

$$\left(\frac{1}{q^2}\right)^{u+1} = \frac{1}{\Gamma(1+u)}\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^u e^{-\alpha q^2}$$ を使うと q積分はGauss積分になる。

最後のα積分もΓ関数を使って実行できる。

$f_n(r;\mu)$ の $n\gg 1$ でのふるまいが、$F(r,\mu;u)$ の解析性からわかる



これから、$f_n(r,\mu) \simeq \frac{\mu}{2\pi^2}\times 2^n$ for $n\gg 1$ がわかる。
実際、F を $u\sim\frac{1}{2}$ でLaurent展開すると

$$F \sim \frac{1}{4\pi^{3/2} r}\left(\frac{\mu r}{2}\right)^1\frac{1}{\frac{1}{2}-u}\frac{1}{\sqrt{\pi}/2} = \frac{\mu}{2\pi^2}\frac{1}{1-2u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu}{2\pi^2}2^n u^n$$

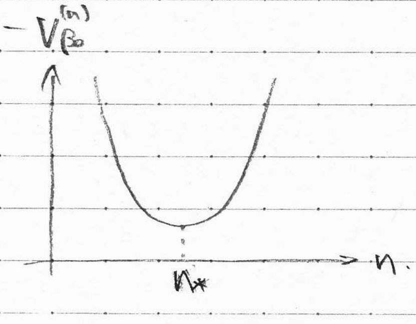
$$\sum_n\left[f_n(r,\mu) - \frac{\mu}{2\pi^2}2^n\right]u^n$$

とすると F から $u=\frac{1}{2}$ のpoleをとり除いたことになるので、収束半径が $u=3/2$ まで広がる。つまり $f_n-\frac{\mu}{2\pi^2}\times 2^n$ のふるまいは n が大きいところで小さくなっている。

よって $n\gg 1$ で

$$V_{\beta_0}^{(n)} \sim -C_F 4\pi\alpha_s\times\frac{\mu}{2\pi^2}\left(\frac{\beta_0\alpha_s}{2\pi}\right)^n\times n! = \overset{r\text{ indep.!!}}{\text{const.}}\times a^n\times n!$$

w/ $a := \frac{\beta_0\alpha_s}{2\pi}$



最小となる n^*

$$a^{n_*-1}(n_*-1)! \simeq a^{n_*}n_*!$$

$$n_* \simeq \frac{1}{a} = \frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu)}$$

$$a^{n_*}\times n_*! \simeq a^{1/a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/a}e^{-1/a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-1/a}$$