

ホログラフィーで計算する
クォークハドロン物質の非線形電気伝導
---励起子絶縁体との類似点に注目して---

京都大学大学院理学研究科
中村 真

Ref. arXiv:1006.4105

Introduction

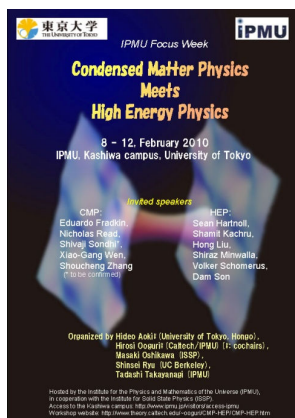
IPMU Focus Week

Condensed Matter Physics Meets High Energy Physics

hosted by the [Institute for the Physics and Mathematics of the Universe](http://www.ipmu.u-tokyo.ac.jp/) (IPMU),

in cooperation with the [Institute for Solid State Physics](http://www.issp.u-tokyo.ac.jp/) (ISSP).

February 8 - 12, 2010, in the main auditorium of IPMU



Organizers (*: co-chairs)

[Hideo Aoki](#)* (Department of Physics, University of Tokyo),

[Hiroshi Ooguri](#)* (Caltech & IPMU, University of Tokyo),

[Masaki Oshikawa](#) (ISSP, University of Tokyo),

Shinsei Ryu (University of California at Berkeley),

[Tadashi Takayanagi](#) (IPMU, University of Tokyo).

Taken from <http://www.theory.caltech.edu/~ooguri/CMP-HEP/CMP-HEP.htm>

物性研究者との交流

東大本郷の青木秀夫さん、岡隆史さんから、強相関電子系の絶縁体に関して興味深いお話を伺った。

Negative differential resistivity (NDR): 負性微分抵抗

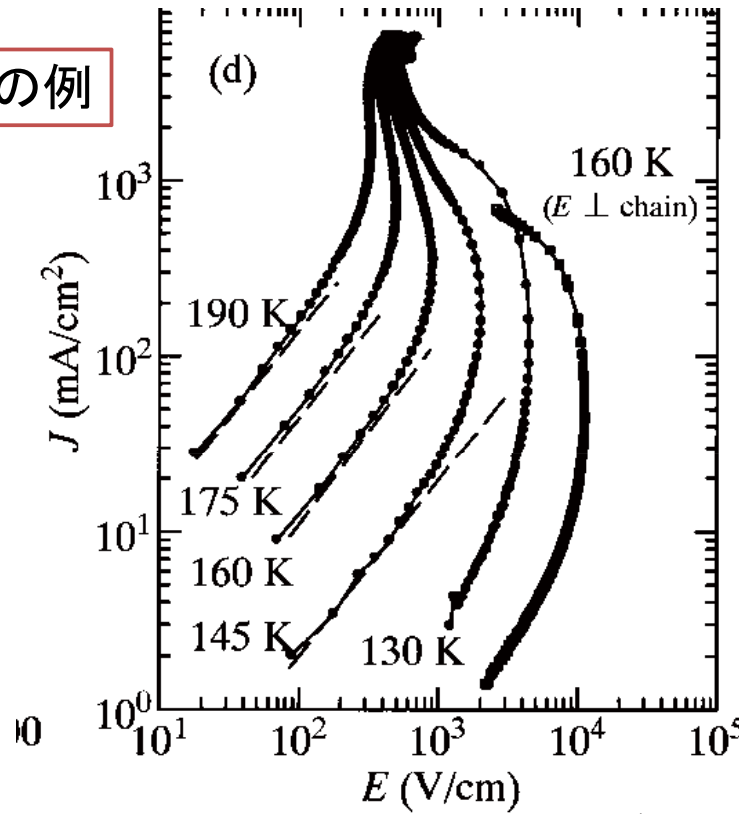
負性微分抵抗(NDR)

物質を流れる電流が増すと電位差が減少する特異な電気伝導特性。通常、強相関絶縁体でNDRが見られる場合は、電流は電場の多価関数となる。

“In correlated insulators (Mott, charge order), negative differential resistance is widely observed regardless of the dimensions....”

実験データの例

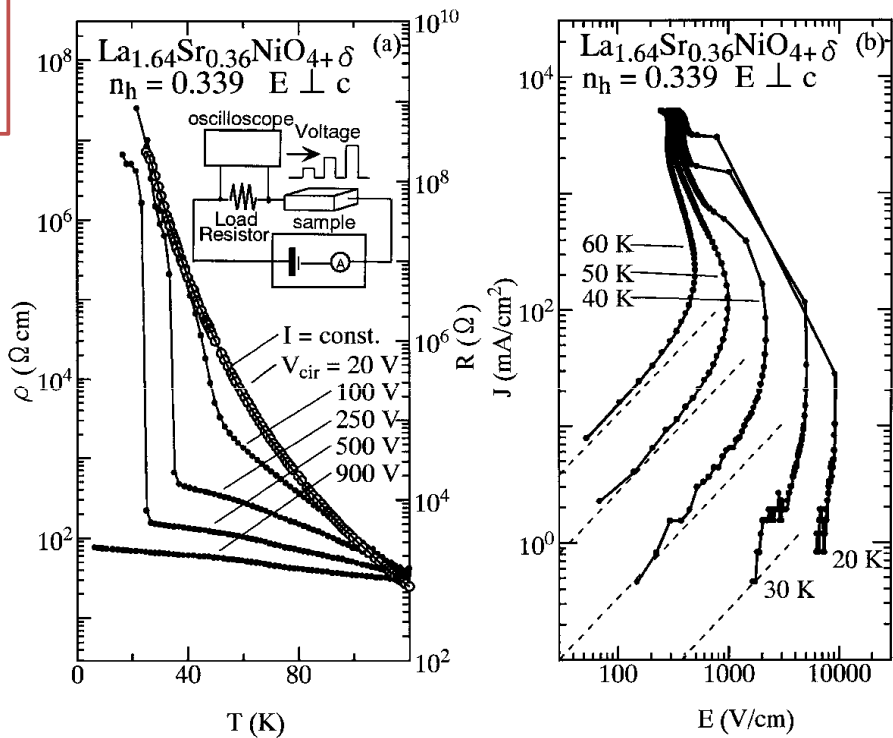
SrCuO₂
(1d Mott)



Y. Taguchi T. Matsumoto and Y. Tokura. *Phys. Rev. B*, 62:7015, 2000.

実験データの例

Charge order insulator



S. Yamanouchi, Y. Taguchi and Y. Tokura, PRL83(1999)5555.

実験データの例

Tetrathiafulvalene-
p-chloranil (TTF-CA)

Neutral-ionic transition
のある系

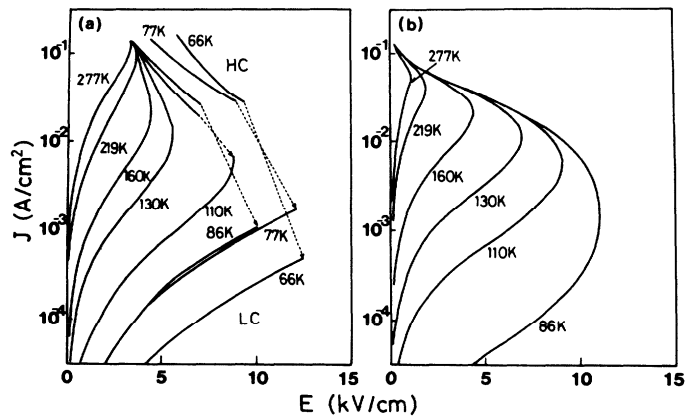


FIG. 3. (a) Experimental and (b) calculated J - E characteristics of TTF-CA crystal at various temperatures. Sudden current jumps between the low-conductive (LC) states and high-conductive (HC) states are shown only for the HC-to-LC switching to avoid confusion.

Y. Tokura et. al., PRB38(1988)2215.

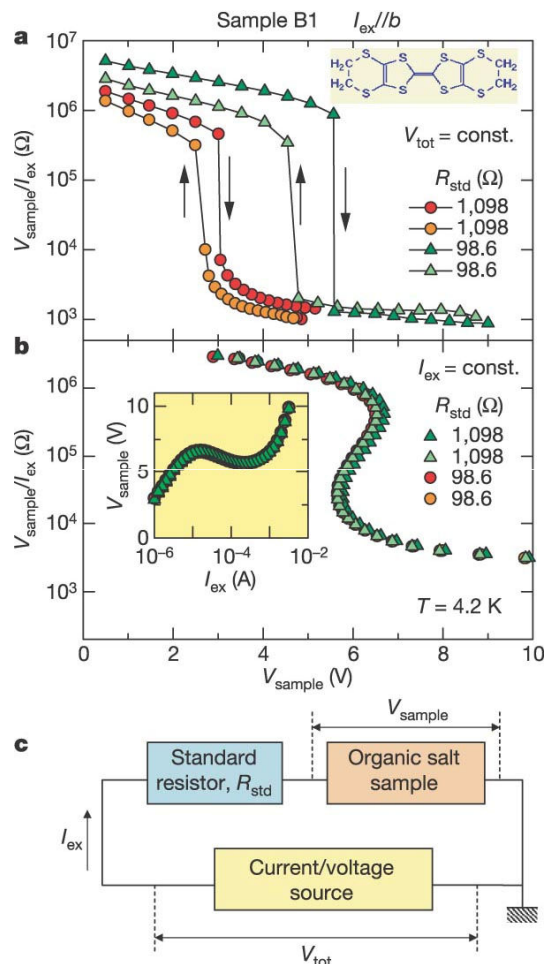
実験データの例

θ -(BEDT-TTF)₂CsCo(SCN)₄
crystal at 4.2 K.

Charge order insulator

「電流は電圧の多価関数」:
実際は電圧を電流の関数として
測定している。電圧は電流の一価関数。

F. Sawano et. al., Nature 437 (2005) 522.



Question

NDR は、強相関電荷系でかなり一般的に見られる非線形電気伝導特性だと考えてみよう。

それでは、QGP中の強く相関のあるquarkの系においてquark電荷の非線形伝導を調べた場合、やはりNDRが見られるのだろうか？

ここでは、少なくともある特殊な系においては

答えが **Yes,** であることを示す。

The theoretical setup
(review)

どのようにしてNDRを計算するか？

強相関係NDRの計算に付きまとう3つの“NON”。

- **Non-linear**: NDRは **非線形**現象である。
- **non-equilibrium steady state**: NDRは**非平衡**定常状態。
(電流による散逸があるため非平衡)
- **Non-perturbative**: 扱う系は**非摂動**な系。
(強相関係を扱うため。また絶縁体・金属転移は非摂動現象。)

しかし、**holography**を用いると計算できてしまう！

なぜNDRの計算が面白いのか？

技術的な視点:

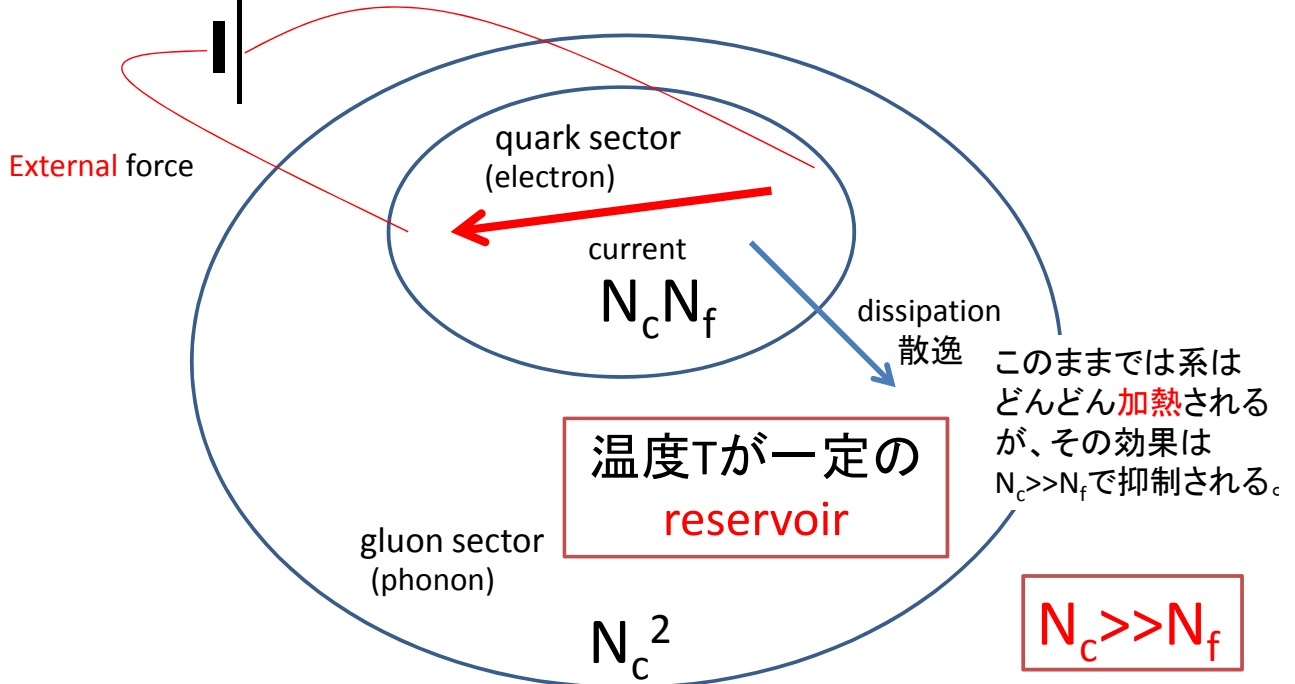
- 強相関係絶縁体のNDRに関しては、現在のところ**現象論的なモデル**しか存在していない。(Joule heating model、多体雪崩モデル.....)
- ここでの計算は、強相関係の**NDR機構**に関するいかなる**現象論的モデル**にも頼らない**計算例**の一つを提供する。

より物理的には:

- 我々が扱う系は**励起子絶縁体**(excitonic insulator)と**多くの共通点**がある。
- 励起子絶縁体の非線形電気伝導の研究は、**まだこれから**であると言ってよい。この状況で、**現実の励起子絶縁体でNDRが観測される可能性**を(予言とまでは言えないまでも)他に先んじて、超弦理論が示唆したと言えるかも知れない。
- NDRにとって**重要な物理プロセス**の一つ(**電荷・反電荷の対生成**)を同定できた。

我々が考える系：

Quark-gluonの系で、どのようにしたら**定常電流**を実現できるか？



$N_c \gg N_f$ とすれば矛盾なく**非平衡定常状態**をsetupできる。

quark sectorの温度は？

Probe近似のもとでは、**gluon sector** は温度Tで一定の**平衡状態**にあるとして扱って構わない。

しかしquark sectorについては、定常電流が存在する**非平衡状態**であり、**well-defined**な温度の概念が存在するのかどうか不明。

しかし以下の計算ではquark sectorの温度の概念は直接必要ない。従ってここではこの問題は深く追求しない。

Holographyで計算するために

出来るだけ単純で、良く確立したAdS/CFTの枠組みで計算するためにquark-gluonの系を理想化する。

Super-symmetric 3+1 dimensional systems with quarks and gluons (and their super-partners):
N=4 SYM + N=2 hyper-multiplet

さらに、以下の極限をとる。

- large- N_c
- large- λ ('t Hooft coupling)
- $N_c \gg N_f$ (quenched, or probe approximation)

D3-D7 system

最も標準的なAdS/CFT対応:

N=4 SYM \longleftrightarrow **AdS₅ × S⁵**

しかし、N=4 SYM はadjoint fieldしか含まない: **no flavor**.
gluon sectorに加えて**flavor sector**を導入する必要がある。

これは、**D7-brane**を加えることで実現可能。

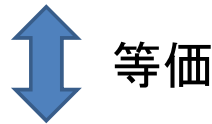
(Karch and Katz, JHEP0206(2002)043)

その結果得られる対応のゲージ理論側は
3+1 次元 **N=4 SYM + N=2 hyper-multiplet**

D3-D7 systemに基づく対応

SU(Nc) N=4 Super Yang-Mills (SYM) theory
at the large-Nc limit with $\lambda = g_{\text{YM}}^2 Nc \gg 1$
at the quantum level at finite temperature.

+ N_f flavors (N=2 hyper-multiplets)



Type IIB Super-gravity (SUGRA) on AdS-BH $\times S^5$
at the classical limit with small curvature.

+ N_f D7-branes on this curved spacetime

The dual geometry (at finite T)

	$R^{3,1}$	z	S^3	S^2
Horizon	○			
D7	○	○	○	

\leftarrow AdS₅-BH \rightarrow \leftarrow S⁵ \rightarrow

D7はS⁵のうちのS³部分を巻いている。

$$ds^2_{S^5} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 + \cos^2 \theta d\Omega_3^2$$

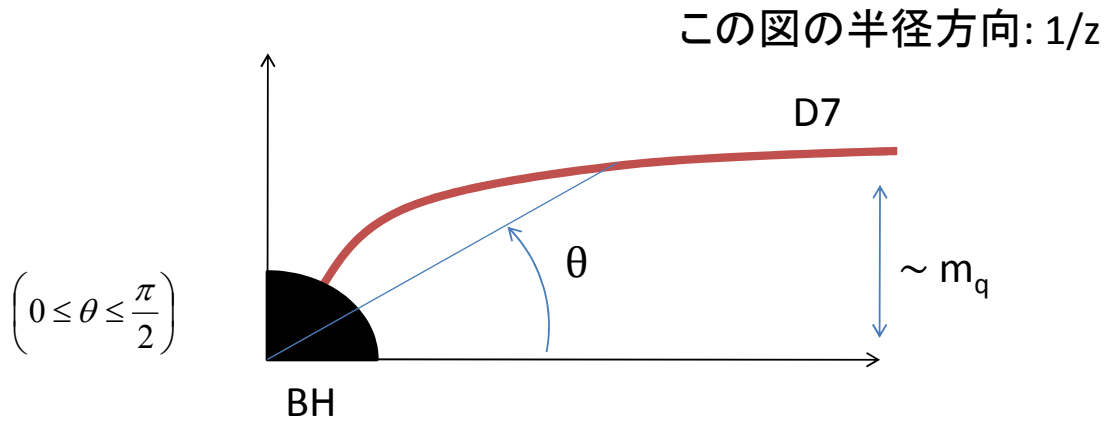
S⁵中のS³部分の位置: θ と φ で指定される。

回転対称性から $\varphi = 0$ を選択。

D7 configuration は $\theta(z)$ で与えられる。

$$\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

D7 configurationの直感的説明



$$\theta(z) = m_q z + \text{const. } z^3 + \dots$$

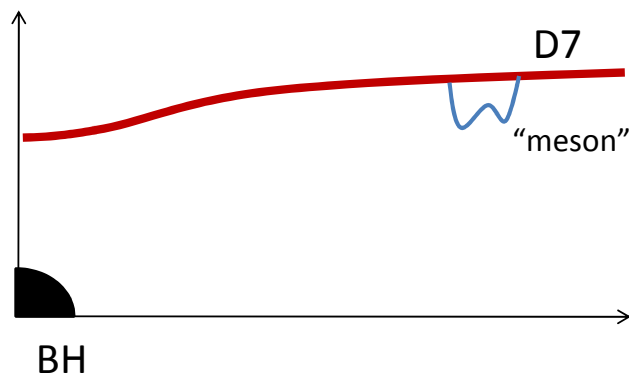
$$\left. \frac{1}{z} \sin \theta(z) \right|_{z \rightarrow 0} = m_q$$

Flavor sectorの“閉じ込め/非閉じ込め”

(BHがあるので、gluon sectorは常に非閉じ込め)

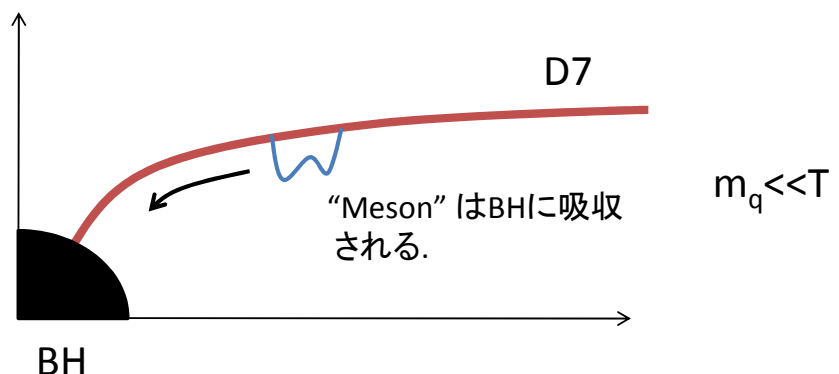
“Meson”は安定:
“confinement”

sQGP的な相



“Meson”は不安定:
“deconfinement”

“Meson”はBHに吸収される。



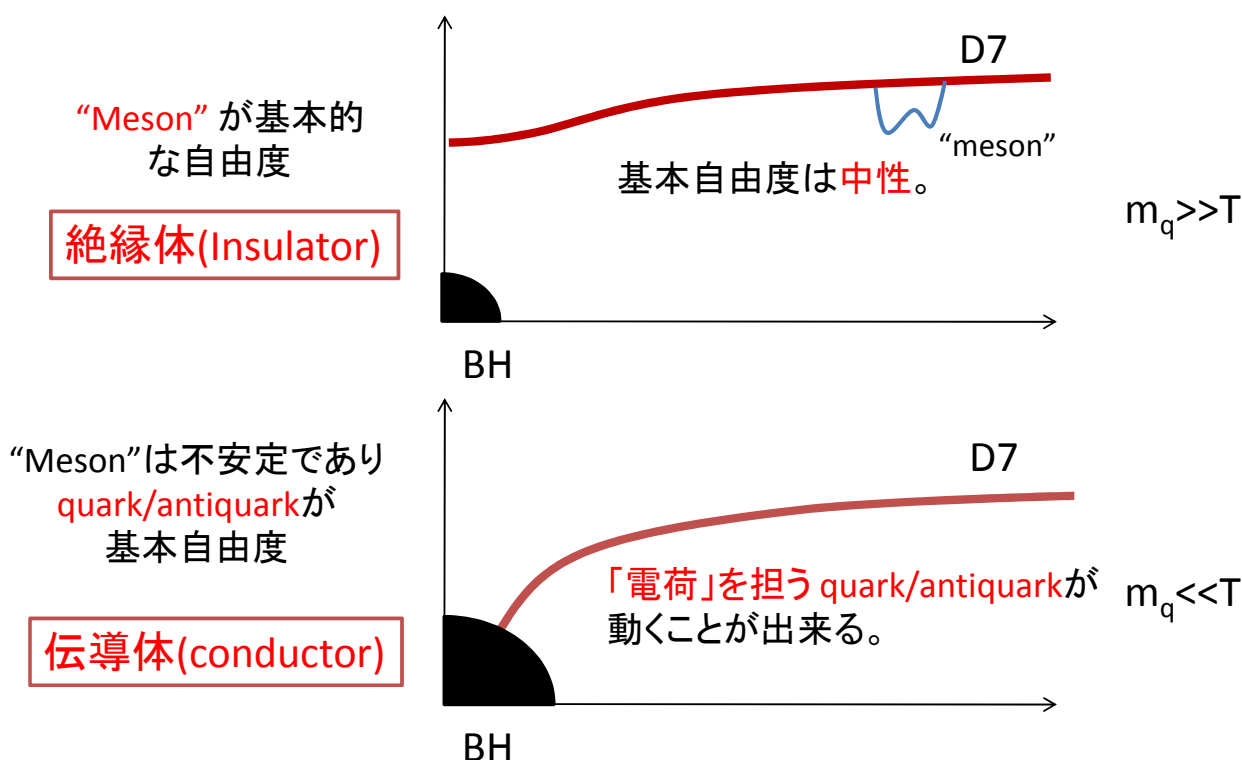
物性物理学的な視点では

この“閉じ込め/非閉じ込め”転移は、物性系の

quark電流の意味でのinsulator/conductor 転移に対応

- Meson: $U(1)_B$ chargeの意味で中性。
- Quark と antiquark: $U(1)_B$ chargeを担う。

物性物理学の視点からは



絶縁破壊

(Holographyの視点での初期の仕事:

J. Erdmenger, R. Meyer, J.P. Shock, arXiv:0709.1551

T. Albash, V.F. Filev, C. Johnson, A. Kundu, arXiv:0709.1554)

十分に大きな外部電場を加えることで、絶縁を破壊
することが出来る。

直観的には、外部電場が新たに作るpotentialが
quark-antiquarkの結合エネルギーより大きければ
“meson” はquark-antiquark pairに分離するであろう。



絶縁体から伝導体へ

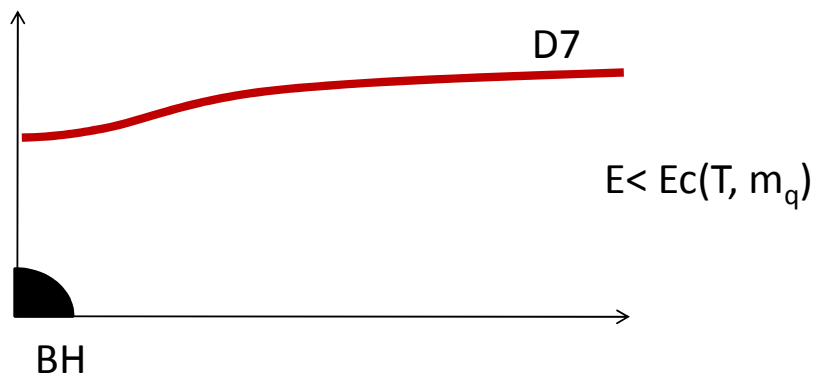
物性側の最近の仕事としては: Many-body Schwinger-Landau-Zener mechanism
See for example, T. Oka and H. Aoki, PRB81(2010)033103.

絶縁破壊

「低温相」

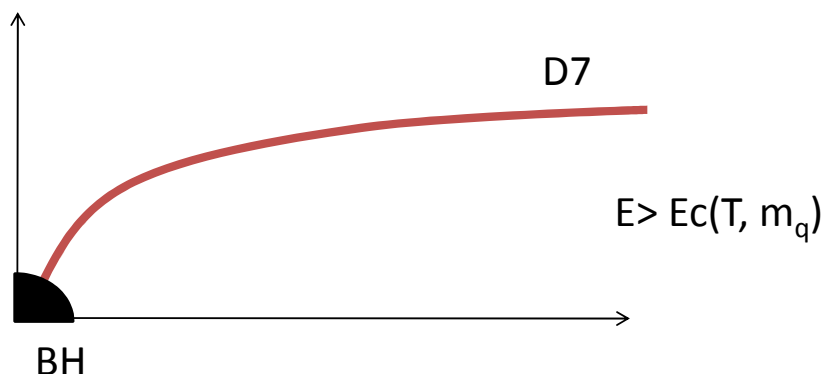
“Meson” が基本的
な自由度

絶縁体(Insulator)



“Meson” は不安定であり
quark/antiquarkが
基本自由度

伝導体(conductor)



Computation of the conductivity (again, review)

Main refs.

Karch, O'Bannon arXiv:0705.3870

Karch, O'Bannon, Thompson arXiv:0812.3629

Mass, Shock, Tarrío, arXiv:0904.3905

ここまでのまとめ

電荷を担うquark/antiquarkはD7-branes上に存在。
絶縁体・伝導体転移はD7-brane configurationの転移
として実現。

Probe近似 $N_c \gg N_f$ では background AdS-BH時空(gluon sector)
はD7-brane の物理(flavor sector)の影響を受けない。



電気伝導の物理は、主としてD7-brane の物理で
コントロールされる。では、どのように伝導度を計算
したら良いか？

D7-brane の有効作用: Dirac-Born-Infeld (DBI) action

$$S = -N_f T_{D7} \int d^{7+1}x \sqrt{-\det G_{ab}}$$

$$G_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g_{\mu\nu} + (2\pi l_s^2) F_{ab}$$

~~+ (non - abelian part)~~

1とする。

ここでは、abelian part
のみ考える

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad \text{The U(1) gauge field on the D7}$$

Induced metric のうち non-trivialなのは
(z,z) 成分 $G_{zz} = 1/z^2 + \theta'(z)^2$ のみ。

AdS/CFT dictionary: GKP-Witten relation

$$A_x(z) = -Et + \frac{(2\pi)^2}{2N_c N_f} \langle J^x \rangle z^2 + O(z^4)$$

5次元ゲージ場 $A_x(z)$ を決めることが出来れば
E と J^x の関係が決まることになる。



非線形部分まで含めた**伝導度**が得られる。

ジレンマ？

しかし、 A_x は2階の微分方程式に従う。

→ 解を決めるためには2つの境界条件が必要。

第1項と第2項は、両方とも「手で与えるべき」境界条件。

しかし、もし勝手な境界条件を用いてD7-braneの on-shell 作用を求めると、作用にimaginary partが現れる。

D7 作用が実数であること(系の安定性)を要請すると第1項と第2項の関係は特別なものでなくてはならない。

Karch, O'Bannon arXiv:0705.3870

具体的に見てみる。

$$A_x(z) = -Et + \frac{(2\pi)^2}{2N_c N_f} \langle J^x \rangle z^2 + O(z^4)$$

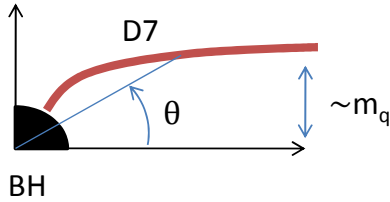
まず、任意の境界条件(Eと J^x)から出発し、DBI作用から来る運動方程式の解を求め、解を作用に代入する。



On-shell の作用は J^x, E および D7 configuration θ を用いて記述される。

On-shell D7-brane 作用

$$S_{D7} = -N \int dr dt \cos^6 \theta g_{xx}^{5/2} |g_{tt}|^{1/2} \sqrt{W}$$



$$W = \frac{g_{zz} (|g_{tt}| g_{xx} - E^2)}{|g_{tt}| g_{xx}^3 \cos^6 \theta - \frac{g_{xx} \langle J_x \rangle^2}{N^2}}$$

分母、分子ともにAdS-BH時空のどこかで (horizonと境界の間のどこかで) **必ずゼロを横切る**。

これを救うには、**分母と分子が同時にゼロを横切れば良い**。
この点を $z=z_*$ とする。

The conditions for reality

$$(-g_{tt})g_{xx} \Big|_{z=z_*} - E^2 = 0 \quad \rightarrow \quad z_* \text{ in terms of } E$$

$$\left. (-g_{tt})g_{xx}^3 \cos^6 \theta - \frac{g_{xx} \langle J_x \rangle^2}{N^2} \right|_{z=z_*} = 0$$

➡ J_x は E and $\theta(z_*)$ を用いて書かれる。

➡ J_x は E and m_q を用いて書かれる。

$$\frac{1}{z} \sin \theta(z) \Big|_{z \rightarrow 0} = m_q$$

電気伝導度が m_q (およびAdS-BHのパラメータである温度 T や相互作用 λ) を用いて決まった。

電気伝導度

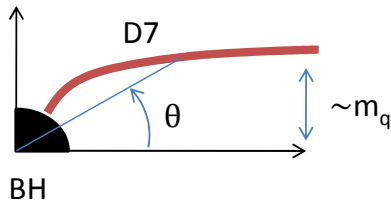
電荷密度も導入して計算した一般的な結果
Karch, O'Bannon arXiv:0705.3870

通常の電気伝導

$$\sigma_{xx} = \sqrt{\frac{N_f^2 N_c^2 T^2}{16\pi^2}} \sqrt{e^2 + 1} \cos^6 \theta(z_*) + \frac{d^2}{e^2 + 1}$$

$$d \equiv \frac{\langle J^t \rangle}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda T^2}}, \quad e \equiv \frac{E}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda T^2}},$$

対生成の寄与



- $\cos\theta(z_*)$ goes to **1** at $m_q \rightarrow 0$.
- $\cos\theta(z_*)$ goes to **zero** at $m_q \rightarrow \text{infinity}$.

この結果はreasonable?

$$J_x|_{m_q \rightarrow \infty} = \frac{d}{\sqrt{1+e^2}} E_x \rightarrow \begin{cases} \approx d \cdot E_x & (e \ll 1) \\ \approx \text{saturate} & (e \gg 1) \\ \approx 0 & (T \gg 1) \\ (e \leftrightarrow -e \text{ symmetric}) \end{cases}$$

(Thanks to H. Hayakawa, H. Wada, A. Shimizu.)

Reproduction of NDR.
(My original)

Strategy

We need to rely on the **numerical analysis** to solve the EOM for θ .

1. Start with some **E** we like.
2. Then z_* will be computed in terms of **E**.
3. Solve the EOM for θ with the “boundary condition”
 $\theta(z_*) = \theta_0$ so that the D7 is smooth until the horizon.
We choose θ_0 as we like.
4. Read m_q from the asymptotic value of $\theta(z)$.
5. Compute **J** from $\theta(z_*)$ and **E**.



As a result, **J- m_q curve** is obtained **at given E** (and T).

Results

Parameters in the numerical computations:

$$\lambda = (2\pi)^2, N_c N_f = (2\pi)^2, T = \sqrt{2}/\pi$$

(I have mainly analyzed the **zero-density** cases.)

The most important question

NDR: the voltage goes down when the current increases.

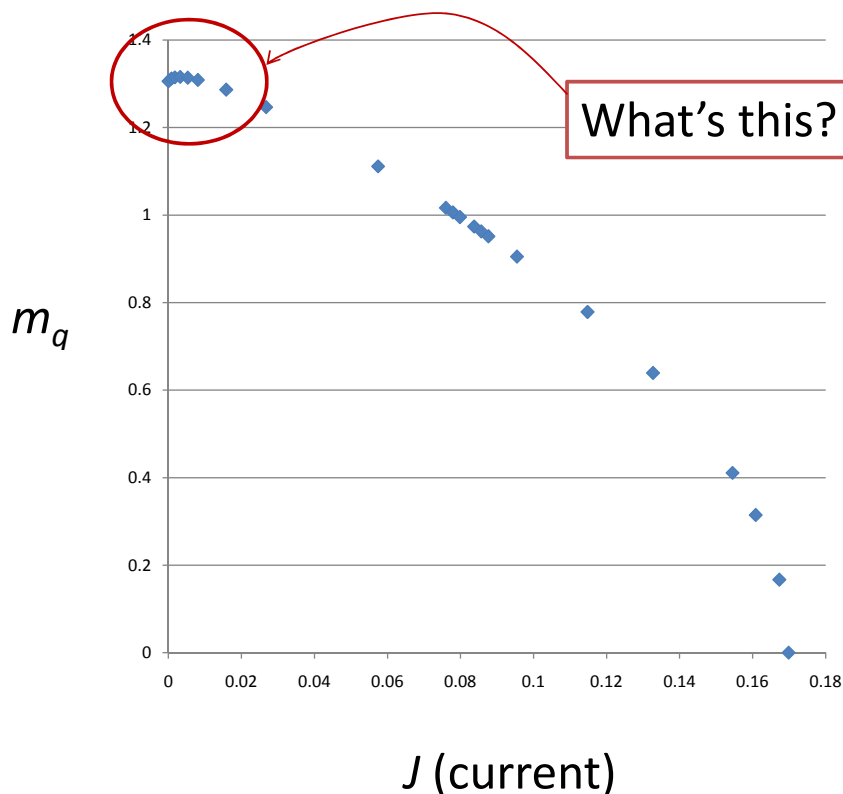
Typically, the current can be a **double-valued function** of the electric field if we have NDR.

The question is whether $J(m_q)$ as a function of m_q is a **multi-valued function** or not, at a given E .

If it is, at least **two different values of J** can be realized at the **same E** under our particular choice of m_q .

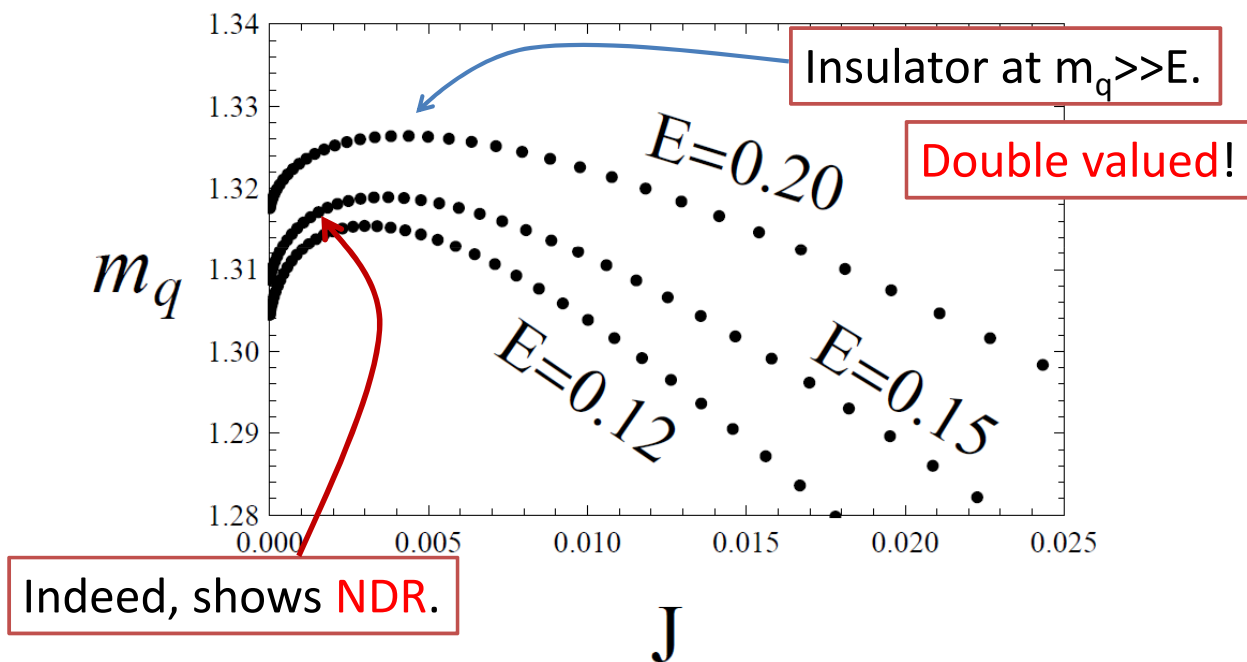
➔ Suggesting the presence of **NDR**.

J- m_q characteristics



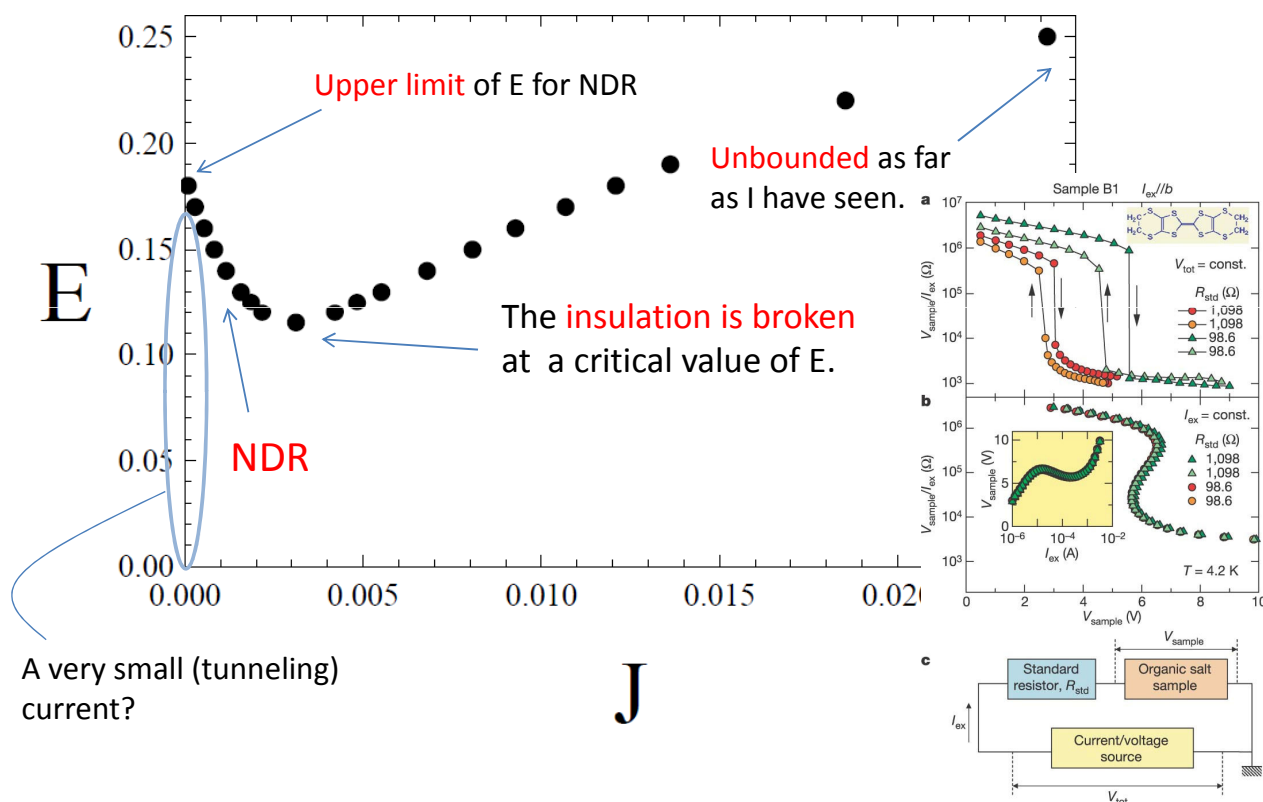
$E=0.13$ in our convention.

J- m_q characteristics



J-E characteristics

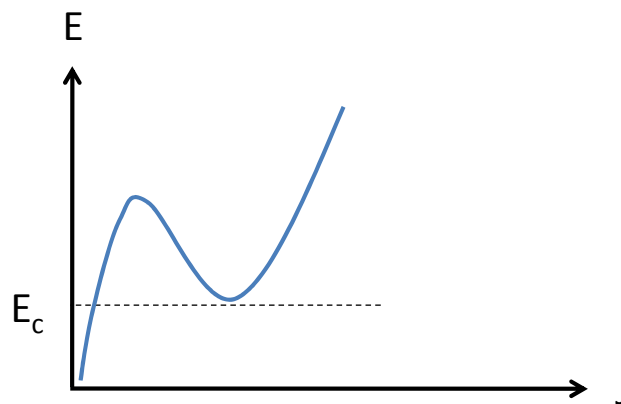
$$m_q = 1.315$$



A very small (tunneling) current?

At finite quark density

A preliminary analysis shows,



(quark-number density) $\neq 0$

The doped quarks can carry the current at arbitrary small E.

The relevant process

$$\sigma_{xx} = \sqrt{\frac{N_f^2 N_c^2 T^2}{16\pi^2} \sqrt{e^2 + 1} \cos^6 \theta(z_*) + \frac{d^2}{e^2 + 1}}$$

Normal conduction

$$d \equiv \frac{\langle J^t \rangle}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda T^2}}, \quad e \equiv \frac{E}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda T^2}}, \quad \text{Pair creation}$$

In our setup, NDR occurs due to the **non-trivial dependence of θ** on E. NDR can be seen only when we take the **pair-creation process**.

➔ The **pair-creation process** is crucial for our NDR.

Possible phenomenological explanations

- Joule heating

For example, Law and Kao, IEEE Trans. Electron Devices 17 (1970) 562.

- Many-body avalanche mechanism

Oka, Kishida and Aoki, talk given at JPS 2010 Annual Meeting.
(unpublished)

NDR due to Joule heating

Law and Kao, IEEE Trans. Electron Devices 17 (1970) 562.

$$dJ/dE = (\text{normal conduction}) - (\text{suppression due to heating})$$

If the second term dominates, NDR is achieved.

The **assumptions** made in this model is that

- there is a notion of “temperature” $T(E)$ even under the presence of the current.
- the **mobility** of the charge carrier depends on $T(E)$
- $T(E) > T(E=0)$

$$\text{mobility} = (\text{velocity})/E$$

However, it is not immediately clear **how this model explains the importance of pair creation.**

➡ JH does not seem to fit very well (for me).

Many-body avalanche mechanism

Oka, Kishida and Aoki,
talk given at JPS2010 Annual Meeting.

Their idea is to attribute the origin of NDR to
dynamical creation of charge carriers.

My intuitive understanding:

If we increase J , more charge carriers are produced so that we need less E to maintain the same value of J .

Our NDR is deeply related to the **pair-creation process**. I am very much tempted to pursue their model.

NDR in excitonic insulators?

Our system shares several features similar to **excitonic insulators**.

Exciton: **electron-hole bound state**

In the phase where **excitons** are the fundamental degree of freedom, the system is an **insulator** (since excitons are neutral).

Excitons resemble **mesons**.

“Common” features:

- The **charge** (quark/hole) and the **anti-charge** (anti-quark/electron) interact via a **coulomb-like** interaction.
(Our gluonic sector (N=4 SYM) is a **CFT**.)
- The charges/anticharges are **strongly correlated**.
- They form the neutral **bound states** (mesons/excitons) and the system is an insulator in the mesonic/excitonic phase.
- The system exhibits the **insulator-conductor transition**.
- The particles (gluons/phonons, photons) which mediate the interaction are **neutral** for the electric field.

If these feature are essential for NDR,

Our result **suggests** a possibility to observe the **NDR** depicted here in the **excitonic insulators** **in the realistic materials**.

- The excitonic insulator (EI) has been theoretically studied since 1961 (N. F. Mott). However, its **candidate** has been found recently (e.g., T. Pillo et. al. PRB61(2000)16213).
- The non-linear charge transport in EI has **not yet been studied** very well.

I propose experimental physicists to study the **non-linear conductivity in EI** to see whether the **NDR** is observed or not.

We can also say, this is a **starting point** of applying **AdS/CFT** to studies on **non-equilibrium phenomena**.

I hope this framework provides a good **theoretical laboratory** for **non-equilibrium steady states**!