

# 閉じ込め現象とカイラル対称性の自発的破れの関連性について

京大理 菅沼秀夫

## 概要:

- ・ディラック演算子の固有モードで、ウィルソン・ループやポリヤコフ・ループを展開する方法を開発し、閉じ込めポテンシャルやQCDのセンター $Z_3$ 対称性とこれらディラック固有モードとの関係を調べた。一方、カイラル対称性の自発的破れは、Low-lying のディラック固有モードと直接関係づけられるので、この方法により、カイラル対称性の自発的破れと閉じ込め現象の相関が、明確な形で定量的に議論できる。
- ・我々は、この方法を用いて格子QCD計算を行い、ディラック固有モードの赤外領域は閉じ込め 及び センター $Z_3$ 対称性に殆ど影響しないことを定量的に示した。
- ・つまり、カイラル対称性の自発的破れの本質的な要素のみを取り除いた状況で、クォークの閉じ込め力を分析し、QCDにおいて“カイラル対称性の自発的破れ”と“クォークの閉じ込め”とが1対1には対応しないことを、基礎理論から直接的に示した。

S. Gongyo, T. Iritani, H.S., “Gauge-Invariant Formalism with a Dirac-mode Expansion for Confinement and Chiral Symmetry Breaking”, Phys. Rev. D86 (2012) 034510.

H.S. et al., PoS (QCD-TNT11) 044; PoS (Lattice2012) 217; PoS (ConfinementX) 081.

T. Iritani, S. Gongyo, H.S., PoS (Lattice2012) 218; PoS (ConfinementX) 053.

日本物理学会 素粒子論・理論核物理合同シンポジウム  
「多様なアプローチによる量子色力学の非摂動論的現象の研究」  
2013年3月28日 於 広島大学

## Confinement と Chiral Symmetry Breaking の相関

有限温度や有限体積効果でのQCD相転移の様相などから、  
両者には密接な対応関係があるのは明らか

～Deconfinement と Chiral Symmetry Restoration の一致

ただし、両者の関係はあまり良く分かっていないのが現状



2年半前の物理学会の直前に  
子猫を保護し、止むを得ず  
小倉の学会に連れてきました

日本物理学会 素粒子論・理論核物理合同シンポジウム  
「クォーク閉じ込めとカイラル対称性: QCDの難問と多彩なアプローチの検討」  
2010年9月12日 於 九州工業大学

# クォーク閉じ込め & ポリヤコフ・ループ & センター対称性

クォーク閉じ込めの order parameter :

ポリヤコフ・ループの真空期待値  $\langle P \rangle$

⇔クォークの1粒子自由エネルギー  $E_q$

$$\langle P \rangle \sim \exp(-E_q T)$$

- ・閉じ込め相ではゼロ
- ・非閉じ込め相では有限な値

対応する対称性: センター- $Z_3$ 対称性  $Z_3 \subset SU(3)$

“動的なクォークが無い場合” は、  
センター- $Z_3$ 対称性は well-defined で、  
 $\langle P \rangle$ と閉じ込めの関係も 厳密

動的なクォークがある場合は、クォークの運動項の為に  
 $Z_3$ 対称性は 顕わに破れ、well-defined ではない。  
また、動的クォークの生成による遮蔽効果により  
 $\langle P \rangle$ と閉じ込めの関係も straightforward ではなくなる。

# Polyakov Loop $\langle P \rangle$

$$\text{Polyakov Loop: } P \equiv \text{Tr} P \exp(i \int_0^\beta A_4(\vec{x}, t) dt)$$

$$\text{Z}_3\text{対称性: } U_4(\vec{x}, t) \rightarrow z(t) U_4(\vec{x}, t)$$

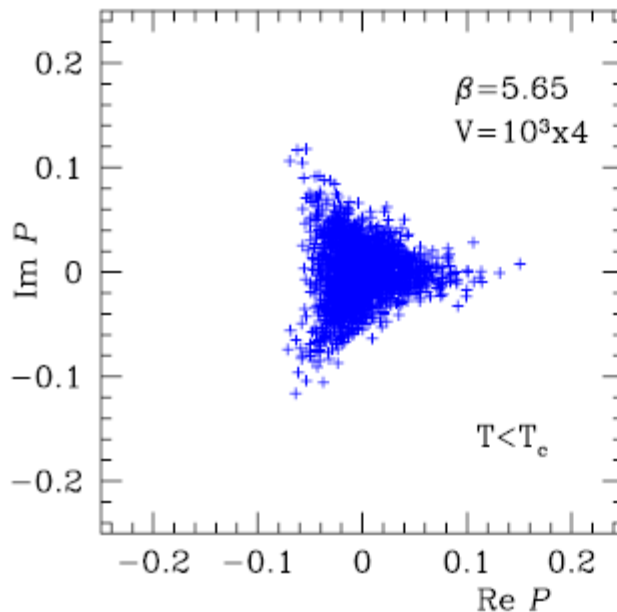
$$z(t) \in Z_3 \subset \text{SU}(3)$$

有限温度系



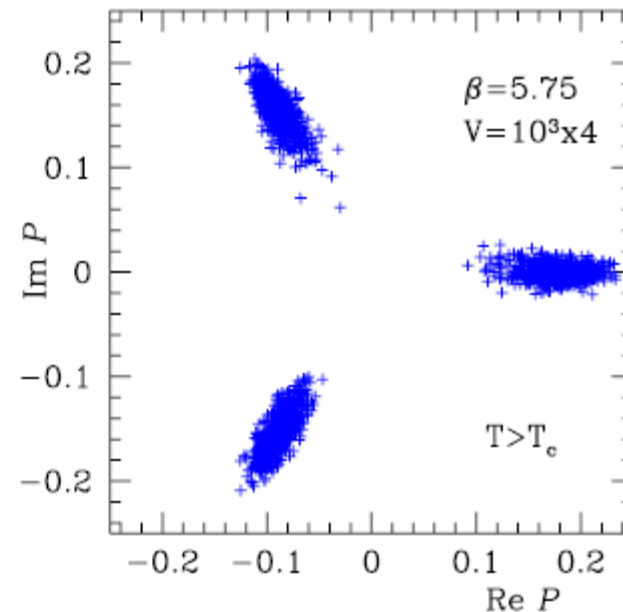
t 方向に周期的境界条件

Polyakov Loop  $\langle P \rangle$  の格子QCD計算 (scatter plot)



閉じ込め相

Z<sub>3</sub>-symmetric phase



非閉じ込め相

Z<sub>3</sub>-broken phase

# カイラル対称性の自発的破れとカイラル凝縮

カイラル対称性の破れの order parameter :  
カイラル凝縮(クォーク凝縮)  $\langle \bar{q}q \rangle$

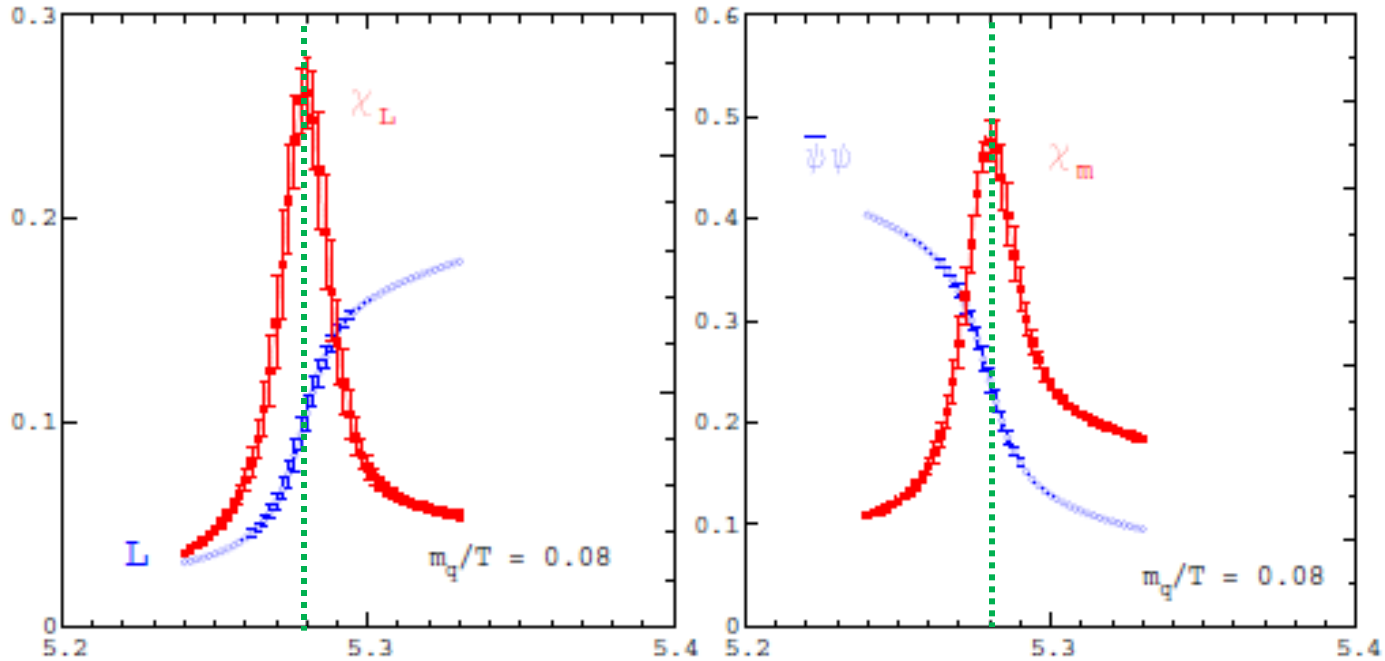
クォークの質量が0の場合は、  
カイラル対称性は well-definedで、  
 $\langle \bar{q}q \rangle$ とカイラル対称性の破れの関係も厳密

クォークに質量がある場合は、クォークの質量項の為に  
カイラル対称性は 顕わに破れ、well-defined ではない。  
 $\langle \bar{q}q \rangle$ も well-defined な order parameter ではなくなる。

# QCD相転移温度 (Deconfinement と Chiral Restoration) の一致 ～ 閉じ込めとカイラル対称性の破れとの関連性を示唆

格子QCD計算の例

F. Karsch, Lect. Notes Phys. (2002)



ポリヤコフ・ループ  $\langle P \rangle$

クォークの閉じ込め

クォーク凝縮  $\langle \bar{q}q \rangle$

カイラル対称性の自発的破れ

**Fig. 2.** Deconfinement and chiral symmetry restoration in 2-flavour QCD: Shown is  $\langle L \rangle$  (left), which is the order parameter for deconfinement in the pure gauge limit ( $m_q \rightarrow \infty$ ), and  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  (right), which is the order parameter for chiral symmetry breaking in the chiral limit ( $m_q \rightarrow 0$ ). Also shown are the corresponding susceptibilities as a function of the coupling  $\beta = 6/g^2$ .

# QCD相転移温度 (Deconfinement と Chiral Restoration)

～非閉じ込め相転移とカイラル相転移のずれ？⇒論争中

## 別の格子QCD計算の例

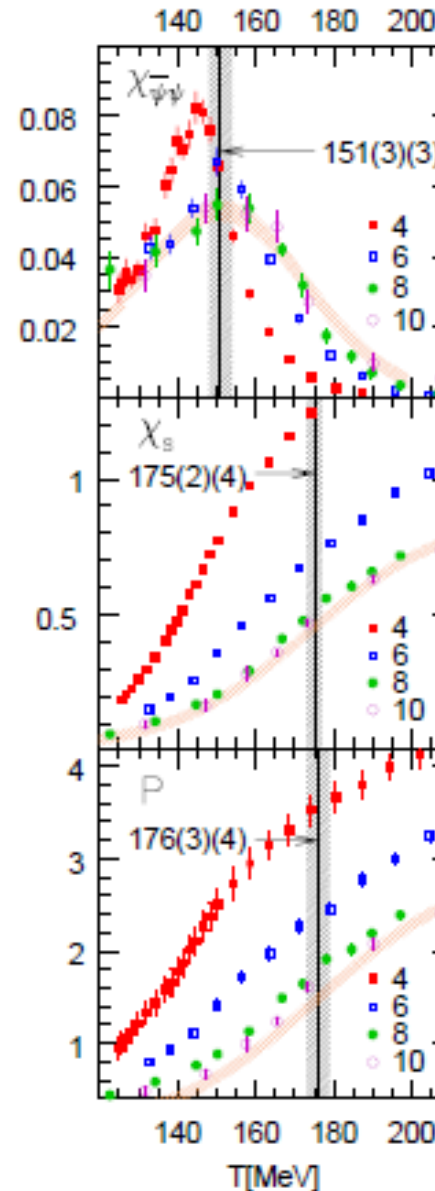
Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz,  
K.K. Szabo, PLB643 (2006)

カイラル相転移:  $T_c \doteq 151\text{MeV}$

非閉じ込め相転移:  $T_d \doteq 176\text{MeV}$

151～176MeVでは  
カイラル対称性は回復していて  
閉じ込めは起きている？

Don't be so serious...



軽いクォーク凝縮  $\langle \bar{q}q \rangle$   
カイラル対称性

ストレンジクォーク凝縮  
 $\langle \bar{s}s \rangle$

ポリヤコフ・ループ  $\langle P \rangle$   
クォークの閉じ込め



# QCD相転移温度 (Deconfinement と Chiral Restoration)

~ Adjoint fermion の場合の非閉じ込め & カイラル相転移の不一致

Adjoint fermion (カラーが随伴表現) の場合の格子QCD計算

“Deconfinement and chiral symmetry restoration in an SU(3) gauge theory with adjoint fermions”, F. Karsch, M. Lutgemeier, NPB550 (1999).

We analyze the finite temperature phase diagram of *QCD* with fermions in the adjoint representation. The simulations performed with four dynamical Majorana fermions show that the deconfinement and chiral phase transitions occur at two distinct temperatures. While the deconfinement transition is first order at  $T_d$  we find evidence for a continuous chiral transition at a higher temperature  $T_c \simeq 8 T_d$ . We observe a rapid change of bulk thermodynamic observables at  $T_d$  which reflects the increase in the number of degrees of freedom. However, these show little variation at  $T_c$ , where the fermion condensate vanishes. We also analyze the potential between static fundamental and adjoint charges in all three phases and extract the corresponding screening masses above  $T_d$ .

Umm... It is not QCD...

QCD (基本表現のフェルミオン) でのカイラル相転移:

$$T_c \doteq T_d \text{ (非閉じ込め相転移とほぼ同じ)}$$

Adjoint fermion の場合のカイラル相転移:

$$T_c \doteq 8T_d$$





# 有限体積QCD系での相転移の一致 ～閉じ込めとカイラル対称性の破れとの関連性を示唆

同様な非閉じ込め相転移とカイラル相転移の一致は、有限体積格子QCD系でも見られる。つまり、格子体積に応じて2つの相転移がほぼ同時に起こる。

Large Volume Lattice

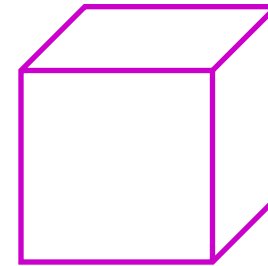


閉じ込め

カイラル対称性の破れ



Small Volume Lattice



非閉じ込め

カイラル対称性の回復

両相転移が同時に起きる！

逃げるデス



勿論、有限温度の相転移はユークリッド時空での虚時間方向に関する有限体積効果の一種

# モノポールを通しての閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れとの相関

閉じ込めとカイラル対称性の破れとの密接な相関は、QCDの Maximally Abelian Gauge において現れるモノポールの観点からも示唆されている。

QCD真空からこのモノポールを除去すると  
“閉じ込め”と“カイラル対称性の自発的破れ”という  
QCDの2大非摂動性質が同時に失われる。

H.S. Sasaki, H.Toki, NPB (1995) : 双対超伝導理論により  
カイラル対称性とモノポールの相関を予測

→ O. Miyamura, PLB (1995), R.Woloshyn, PRD (1995) :  
格子QCD計算で両者の相関を検証



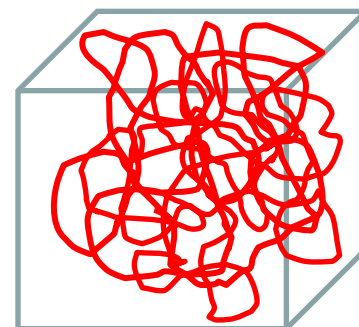
宮村修教授  
広島大学

# Important Role of Monopoles to Nonperturbative QCD

QCDは、そのままでは 閉じ込め等に重要な自由度が抽出しにくい

MA gauge fixing

Monopole projection



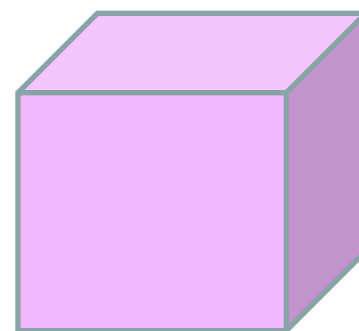
Monopole part

monopole のみで 閉じ込め力やカイラル対称性の自発的破れやインスタントンを再現:

**Monopole Dominance**

Hodge 分解

Photon projection



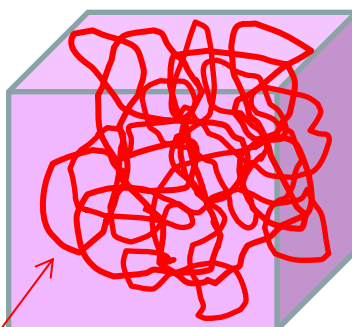
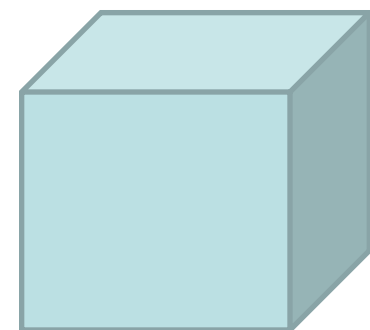
Photon part

monopole を取り除くと QEDと同様に自明な真空

QCD

QCD in MA gauge

クラスター状に絡み合った monopole の世界線が出現  
この自由度がNPQCDに重要



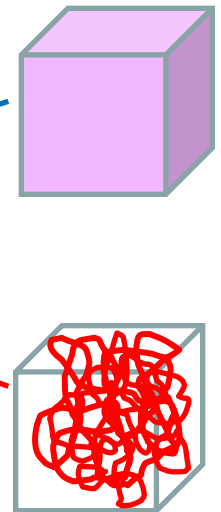
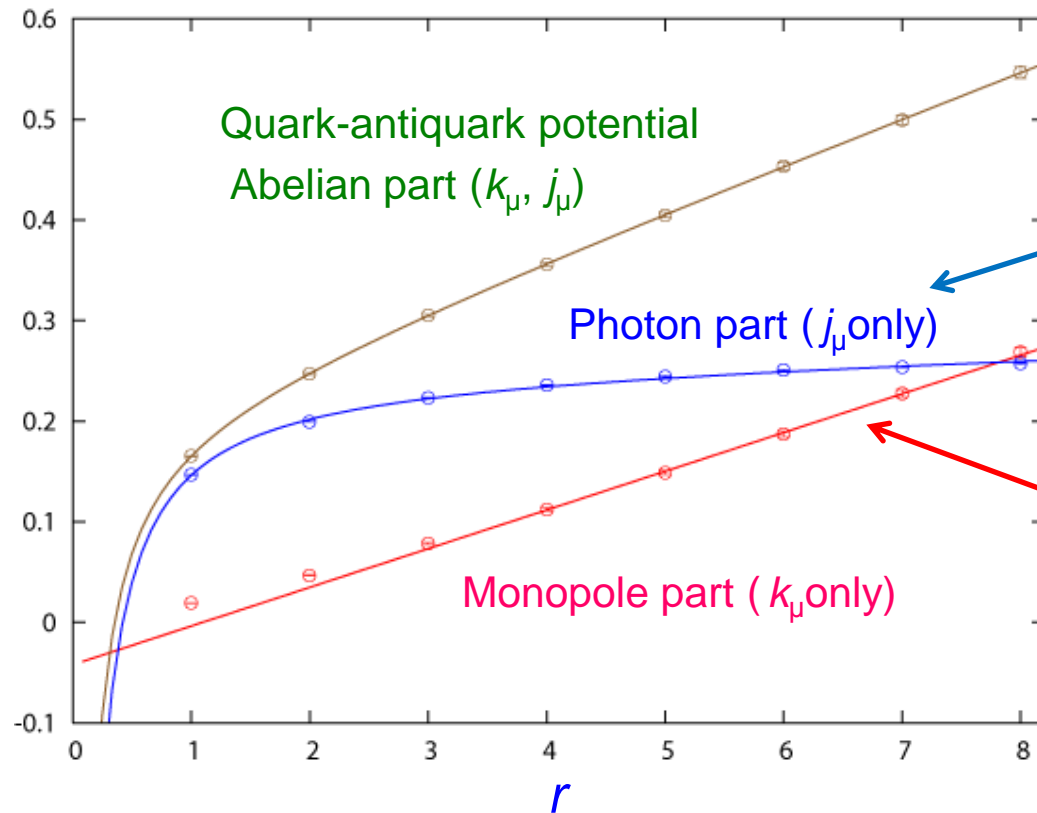
*Hodge Decomposition* in *Maximally Abelian Gauge*

→ **Monopole part** (including only monopole) : **Linear Confinement potential**  
**Photon part** (after removing monopole) : **Coulomb potential (QED-like)**

SU(3) Lattice QCDの計算例 ( $\beta=6.0, 16^4$ )

H.S, N. Sakumichi et al. (2008)

$$V_{q\bar{q}}(r)$$



cf. 近藤グループ:ゲージ固定なしで同様な議論

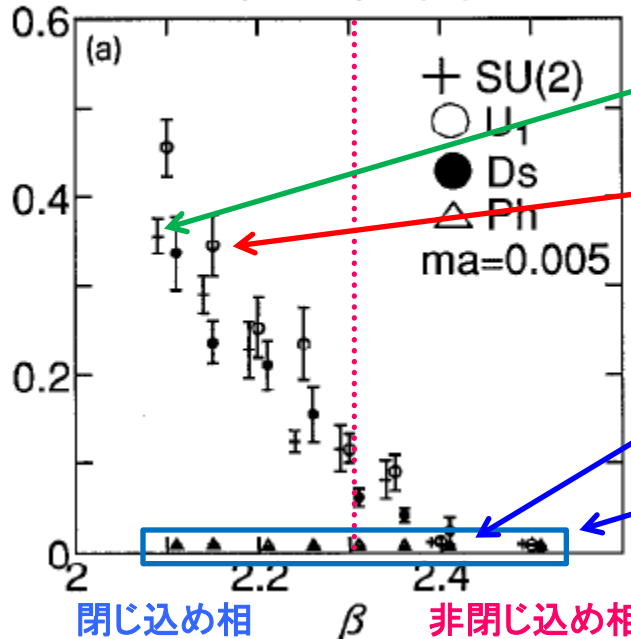
# カイラル対称性の自発的破れとモノポールの相関(格子QCD)

O. Miyamura, PLB (1995) : First Lattice QCD Study to reveal Important role of Monopoles to Chiral Symmetry Breaking (CSB)

クォーク凝縮

$|\langle \text{Tr}G(0,0) \rangle|$

SU(2) QCD on  $16^3 \times 4$



・閉じ込め相ではCSBが起きている

・モノポールのみでもCSBは起こる

Photon part  
(after removing monopoles)

・QCD真空からモノポールを除去するとCSBは起こらない

Fig. 4. (a)  $|\langle \text{Tr}G(0,0) \rangle|$  for  $ma = 0.005$  in the SU(2) field (cross), in the U(1) field (open circle), its singular (filled circle) and regular (triangle) components on a  $16^3 \times 4$  lattice. (b) Same for  $ma = 0.01$ .

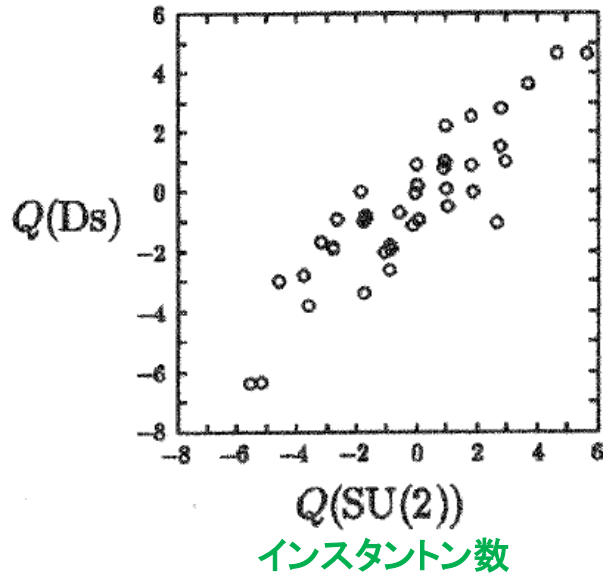
Monopole part : カイラル対称性が自発的に破れている

Photon part : カイラル対称性は破れていない(自明な真空構造)

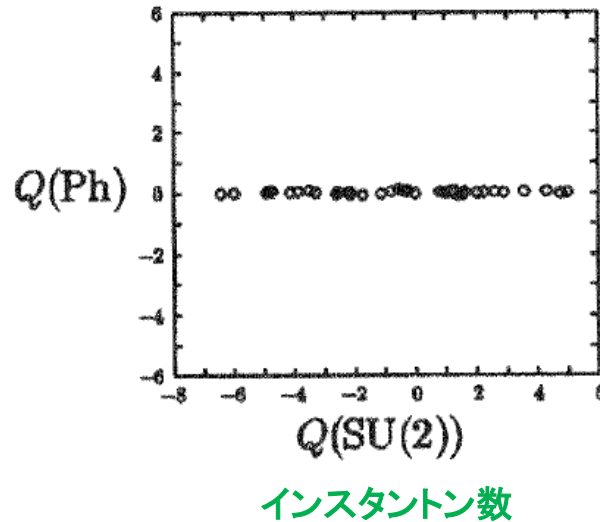
*Hodge Decomposition* in *Maximally Abelian Gauge*

→ **Monopole part** (including only monopole) : **Instantons (almost same)**  
**Photon part** (after removing monopole) : **No Instantons**

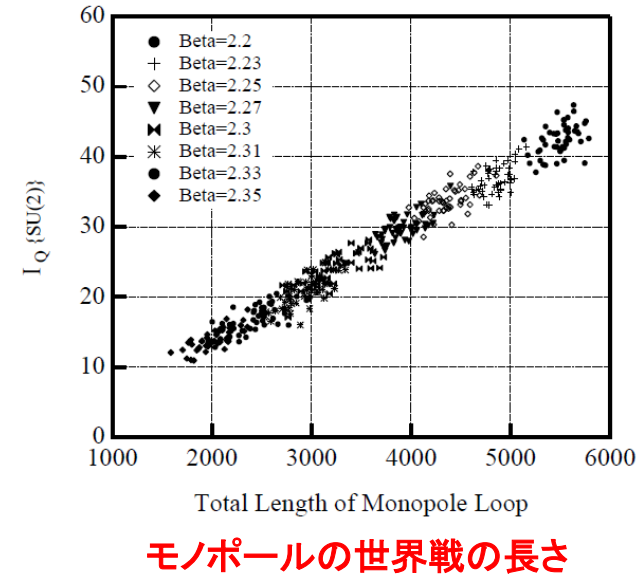
Monopole part での  
インスタントン数



Photon part での  
インスタントン数



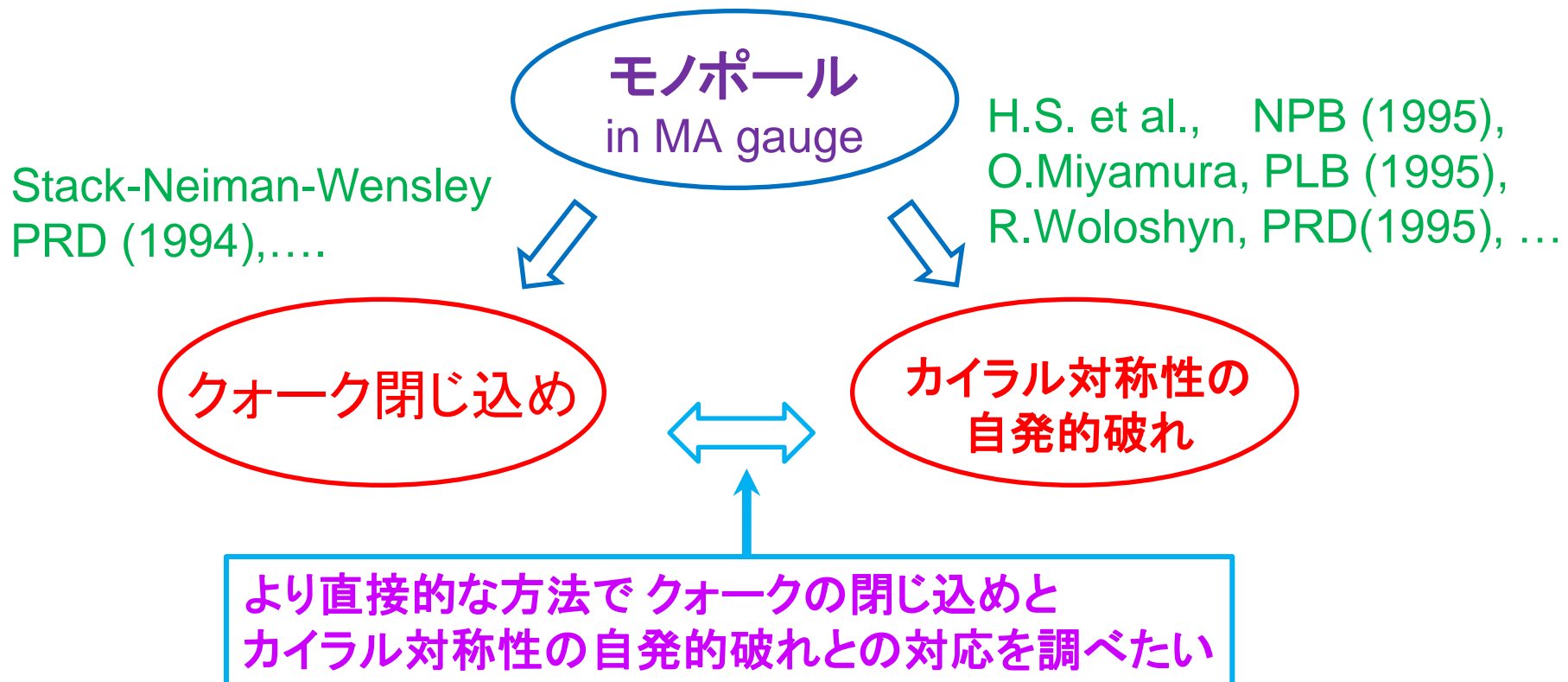
インスタントンと  
反インスタントンの総数



**Monopole part でのインスタントン数**  $\doteq$  **元のQCD真空のインスタントン数**  
**Photon part でのインスタントン数**  $\doteq$  **0**

# 閉じ込めとカイラル対称性の破れとの関連性

MAゲージで現れるモノポールは、クォークの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れの双方に重要な寄与をする。  
これら2つの非摂動論的性質はモノポールを通して関連しているようである。



ここでは、**ディラック・モード展開法**を用いて**閉じ込め**の研究を行う。

← **カイラル対称性の破れの essential mode** は、**Low-lying** の**ディラック・モード**



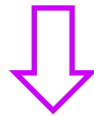
# QCDとカイラル凝縮との対応関係

## Banks-Casher 関係式

$$\Sigma \equiv \left| \langle \bar{q}q \rangle \right| = \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \pi \langle \rho(0) \rangle_V$$

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{V} \left\langle \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \right\rangle : \text{QCD ディラック演算子の固有値密度}$$

QCD ディラック演算子のゼロ固有値密度  $\Rightarrow$  カイラル凝縮



カイラル対称性自発的破れに関する essential mode は Low-lying の ディラック固有モード

※ The non-zero spectrum is symmetric due to  $\{\gamma_5, \mathcal{D}\} = 0$

$$\because \mathcal{D}\psi_n = i\lambda_n\psi_n \rightarrow \mathcal{D}(\gamma_5\psi_n) = -i\lambda_n(\gamma_5\psi_n)$$

# 格子QCDにおけるディラック演算子の固有モード

$$D_{xy}^{\text{lat}} = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma^{\mu} [U_{\mu}(x) \delta_{y, x+\hat{\mu}} - U_{-\mu}(x) \delta_{y, x-\hat{\mu}}] \quad \text{: 格子上でのディラック演算子}$$

$$D^{\text{lat}} [U] |n\rangle = i\lambda_n |n\rangle \quad \text{: ディラック固有値, ディラック固有状態}$$

$$\sum_y D_{xy}^{\text{lat}} [U] \psi_n(y) = i\lambda_n \psi_n(x) \quad \text{: ディラック固有関数 } \psi_n(x) = \langle x | n \rangle$$

## 格子QCDにおけるディラック固有方程式の explicit form

$$\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma^{\mu} [U_{\mu}(x) \psi_n(x + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(x) \psi_n(x - \hat{\mu})] = i\lambda_n \psi_n(x)$$

ゲージ変換性:  $\left\{ \begin{array}{l} U_{\mu}(x) \rightarrow V(x) U_{\mu}(x) V^+(x + \hat{\mu}) \\ \psi_n(x) \rightarrow V(x) \psi_n(x) \end{array} \right.$  クォーク場と同じ  
(irrelevant な位相因子以外)

$$\langle m | n \rangle = \int d^4x \psi_m^+(x) \psi_n(x) = \delta_{mn} \quad \text{: normalization}$$

理論形式のゲージ対称性を explicit に保つために  
“operator formalism”を用いる

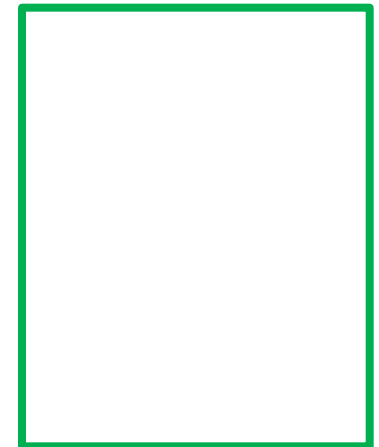
- Link-variable operator  $\hat{U}_\mu$  は以下の行列要素で定義する:

$$\langle x | \hat{U}_\mu | y \rangle = U_\mu(x) \delta_{x+\hat{\mu}, y}$$

- Wilson Loop operator  $\hat{W}$  は長方形のループ  
に沿った方向での  $\hat{U}_\mu$  の積で定義する:

$$\hat{W} \equiv \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k} = \hat{U}_{\mu_1} \hat{U}_{\mu_2} \cdots \hat{U}_{\mu_L}$$

なお、ループに対しては  $\sum_{k=1}^L \mu_k = 0$



長方形のループ

Wilson Loop operator の Functional Trace は  
通常のウィルソン・ループの真空期待値  $\langle W \rangle$  に比例する

• Wilson Loop operator:  $\hat{W} \equiv \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k} = \hat{U}_{\mu_1} \hat{U}_{\mu_2} \cdots \hat{U}_{\mu_L}$

• Wilson Loop operator の Functional Trace :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{W} &= \text{tr} \sum_x \langle x | \hat{W} | x \rangle = \text{tr} \sum_x \langle x | \hat{U}_{\mu_1} \hat{U}_{\mu_2} \cdots \hat{U}_{\mu_L} | x \rangle \\ &= \text{tr} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_L} \langle x_1 | \hat{U}_{\mu_1} | x_2 \rangle \langle x_2 | \hat{U}_{\mu_2} | x_3 \rangle \langle x_3 | \hat{U}_{\mu_3} | x_4 \rangle \cdots \langle x_L | \hat{U}_{\mu_L} | x_1 \rangle \\ &= \text{tr} \sum_x \langle x | \hat{U}_{\mu_1} | x + \mu_1 \rangle \langle x + \mu_1 | \hat{U}_{\mu_2} | x + \sum_{k=1}^2 \mu_k \rangle \cdots \langle x + \sum_{k=1}^{L-1} \mu_k | \hat{U}_{\mu_L} | x \rangle \\ &= \text{tr} \sum_x U_{\mu_1}(x) U_{\mu_2}(x + \mu_1) U_{\mu_3}(x + \sum_{k=1}^2 \mu_k) \cdots U_{\mu_L}(x + \sum_{k=1}^{L-1} \mu_k) \\ &= \langle W \rangle \cdot \text{Tr} 1 \end{aligned}$$

Tr : functional trace

tr SU(3) color index に対する trace

Link-variable operator のディラック・モードでの行列要素:

$$\langle m | \hat{U}_\mu | n \rangle = \sum_x \langle m | x \rangle \langle x | \hat{U}_\mu | x + \hat{\mu} \rangle \langle x + \hat{\mu} | n \rangle = \sum_x \psi_m^+(x) U_\mu(x) \psi_n(x + \hat{\mu})$$

巨大行列要素であるが、計算可能でありかつゲージ不変

ゲージ変換性:

$$\begin{cases} U_\mu(x) \rightarrow V(x) U_\mu(x) V^+(x + \hat{\mu}) \\ \psi_n(x) \rightarrow V(x) \psi_n(x) \quad (\text{クォーク場と同じ}) \end{cases} \quad \because \quad \sum_y \mathcal{D}_{xy}^{\text{lat}}[U] \psi_n(y) = i \lambda_n \psi_n(x)$$

ディラック・モード行列要素  $\langle m | \hat{U}_\mu | n \rangle$  のゲージ不変性

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{U}_\mu | n \rangle &= \sum_x \psi_m^+(x) U_\mu(x) \psi_n(x + \hat{\mu}) \\ &\rightarrow \sum_x \psi_m^+(x) V(x) \cdot V^+(x) U_\mu(x) V^+(x + \hat{\mu}) \cdot V^+(x + \hat{\mu}) \psi_n(x + \hat{\mu}) \\ &= \sum_x \psi_m^+(x) U_\mu(x) \psi_n(x + \hat{\mu}) = \langle m | \hat{U}_\mu | n \rangle \end{aligned}$$

(irrelevant な位相因子以外)

# ディラック・モード展開とディラック・モード射影

ディラック・モードの完全性:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

ディラック・モード展開

$$\hat{U}_\mu \equiv \sum_m \sum_n |m\rangle\langle m| \hat{U}_\mu |n\rangle\langle n|$$

ディラック・モードの空間を制限する射影演算子を定義する:

ディラック・モード射影演算子:  $\hat{P} \equiv \sum_{n \in A} |n\rangle\langle n|$

この射影において、ディラック・モードの和は部分空間  $A$  内に制限する

e.g. IR-cut  $\sum_{n \in A} = \sum_{|n| > N_{\text{IR}}}$   $\hat{P}^2 = \hat{P}$   $\hat{P}^+ = \hat{P}$

⇒ ディラック・モード射影した Link-variable operator

$$\hat{U}_\mu^P \equiv \hat{P} \hat{U}_\mu \hat{P} = \sum_{m \in A} \sum_{n \in A} |m\rangle\langle m| \hat{U}_\mu |n\rangle\langle n|$$

・ウィルソン・ループ:  $\text{Tr} \hat{W} \equiv \text{Tr} \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k} = \text{Tr} \hat{U}_{\mu_1} \hat{U}_{\mu_2} \cdots \hat{U}_{\mu_L}$



ディラック・モード射影:

$$\hat{U}_{\mu} \rightarrow \hat{U}_{\mu}^P \equiv \hat{P} \hat{U}_{\mu} \hat{P}$$

・ディラック・モード射影したウィルソン・ループ:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{W}^P &\equiv \text{Tr} \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k}^P = \text{Tr} \hat{U}_{\mu_1}^P \hat{U}_{\mu_2}^P \cdots \hat{U}_{\mu_L}^P = \text{Tr} \hat{P} \hat{U}_{\mu_1} \hat{P} \hat{U}_{\mu_2} \hat{P} \cdots \hat{P} \hat{U}_{\mu_L} \hat{P} \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_L \in A} \text{tr} \langle n_1 | \hat{U}_{\mu_1} | n_2 \rangle \langle n_2 | \hat{U}_{\mu_2} | n_3 \rangle \cdots \langle n_L | \hat{U}_{\mu_L} | n_1 \rangle \end{aligned}$$

これは manifest にゲージ不変!

tr: color index

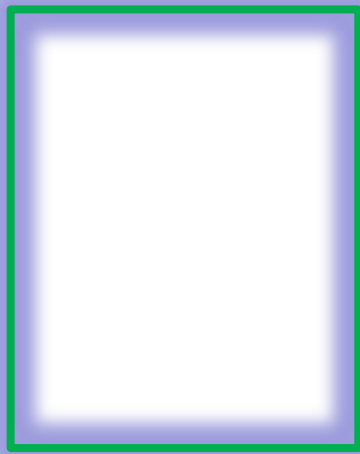
このゲージ不変性は格子QCD計算でも確認済み



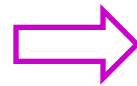
# ディラック・モード射影したウィルソン・ループ

$$\text{Tr} \hat{W}^P \equiv \text{Tr} \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k}^P = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_L \in A} \text{tr} \langle n_1 | \hat{U}_{\mu_1} | n_2 \rangle \langle n_2 | \hat{U}_{\mu_2} | n_3 \rangle \cdots \langle n_L | \hat{U}_{\mu_L} | n_1 \rangle$$

この表式に基づいて、ウィルソン・ループの面積則に対する各ディラック・モードの寄与を調べる。つまり、もし、ある特定のディラック・モードがウィルソン・ループの面積則(=閉じ込め)に essential ならば、そのモードとの coupling をカットしてしまえばウィルソン・ループの面積則は大きく変化するはず。



元々のウィルソン・ループは  
全てのディラック・モードと  
coupleする



ディラック・モード射影した  
ウィルソン・ループは  
制限されたディラック・モードとのみ  
coupleする

# ディラック・モード射影したクォーク間ポテンシャル

## ディラック・モード射影したウィルソン・ループ

$$\text{Tr} \hat{W}^P \equiv \text{Tr} \prod_{k=1}^L \hat{U}_{\mu_k}^P = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_L \in A} \text{tr} \langle n_1 | \hat{U}_{\mu_1} | n_2 \rangle \langle n_2 | \hat{U}_{\mu_2} | n_3 \rangle \cdots \langle n_L | \hat{U}_{\mu_L} | n_1 \rangle$$

⇒ ディラック・モード射影したポテンシャル

$$V^P(R) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left\{ \text{Tr} \hat{W}^P(R, T) \right\}$$

射影しなければ 元のクォーク間ポテンシャルと一致

cf Wilson Loop operator の Functional Trace は  
通常のウィルソン・ループの真空期待値に比例

$$\text{Tr} \hat{W} = \langle W \rangle \cdot \text{Tr} 1$$

$$V(R) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left\{ \text{Tr} \hat{W}(R, T) \right\} = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(R, T) \rangle + \text{irrelevant const.}$$

この方法のテクニカルな問題点:

巨大な行列とその積を計算しなければならない

実際,  $\langle m | \hat{U}_{\mu_1} | n \rangle$  という行列は (ディラック・モード数)<sup>2</sup>.  
ここで ディラック・モード数は (lattice-volume)  $\times N_c \times 4$ .  
Kogut-Susskind の方法により (lattice-volume)  $\times N_c$   
に reduce されるがやはり巨大な行列

現時点では small-size の格子QCD計算で検証

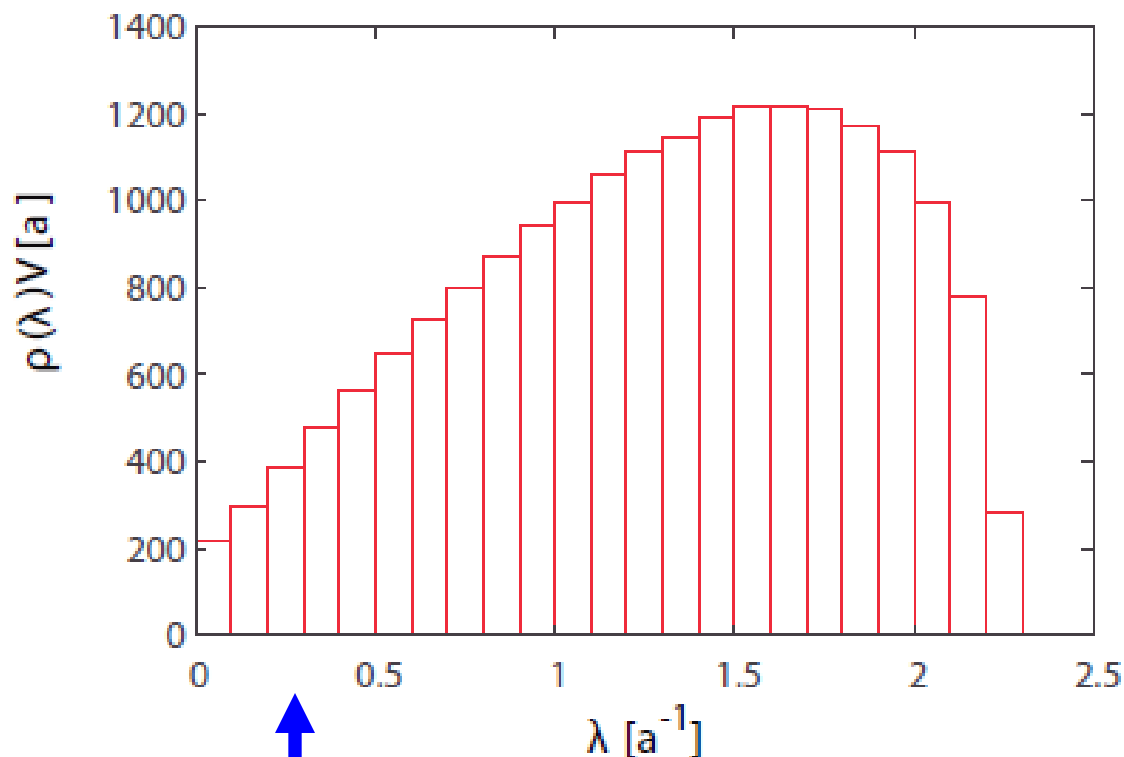
格子QCD計算:

SU(3) プラケット作用 (クエンチ, 周期的境界条件)

$\beta=5.6$  ( $a=0.25\text{fm}$ ),  $6^4$

# QCDディラック演算子の固有値分布

$\beta=5.6$  (格子間隔  $a=0.25\text{fm}$ ),  $6^4$

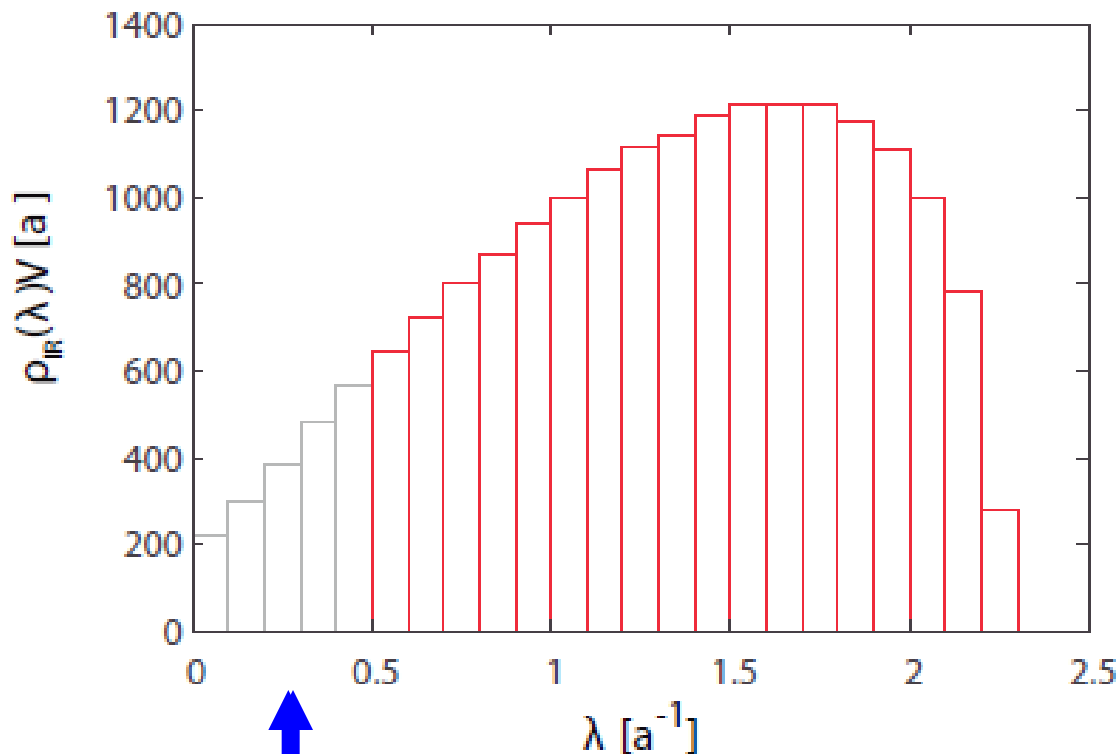


Low-lying のディラック・モードが  
カイラル対称性の自発的破れに寄与する

(cf. Banks-Casher 関係式)

# QCDディラック演算子の固有値分布

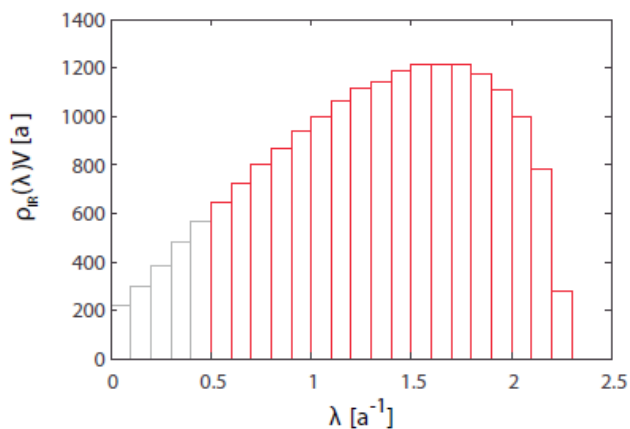
$\beta=5.6$  (格子間隔  $a=0.25\text{fm}$ ),  $6^4$



Low-lying のディラック・モードを除去すると  
カイラル凝縮は劇的に減少する

(cf. Banks-Casher 関係式)

# Low-lying のディラック・モードを除去した後でのカイラル凝縮



$$\langle \bar{q}q \rangle_{IR} \propto \sum_{\lambda_n \geq \Lambda_{IR}} \frac{2m}{\lambda_n^2 + m^2}$$

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_{IR}}{\langle \bar{q}q \rangle} \approx 0.02 \quad \text{for } m_q \sim 5 \text{ MeV}$$

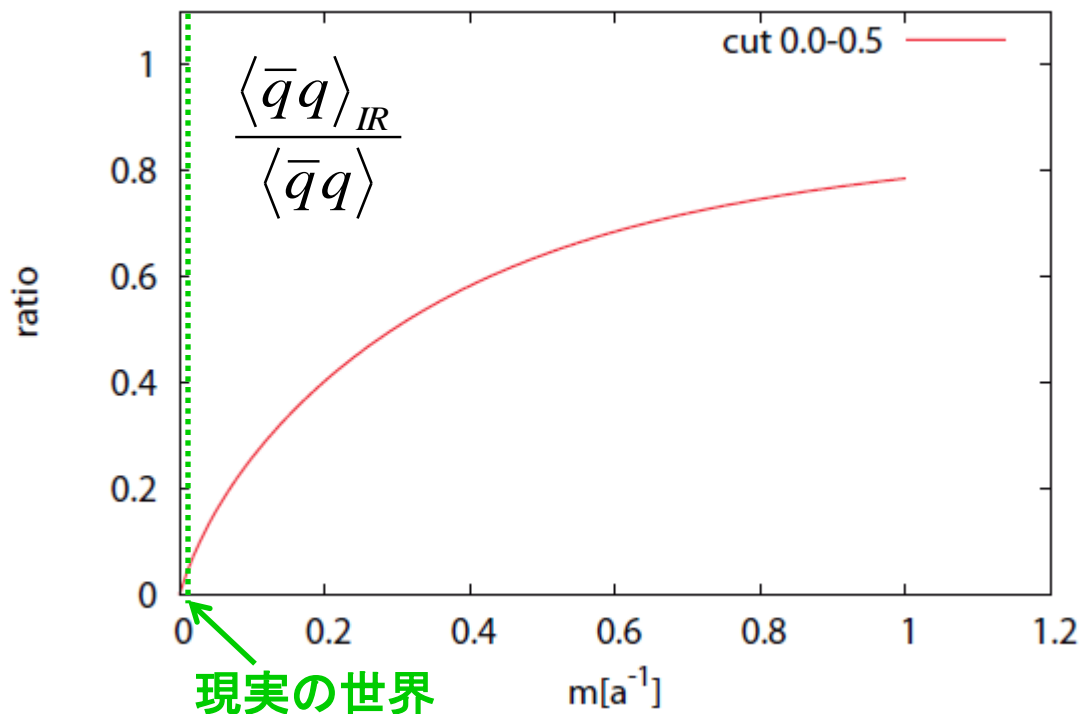
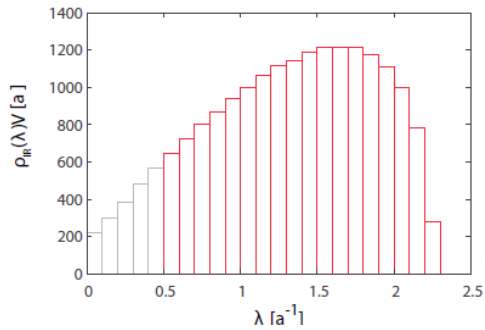


FIG. 2: The lattice QCD result of the quark condensate  $\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{IR}}$  as the function of the current quark mass  $m$  in the presence of IR cut  $\Lambda_{IR} = 0.5, 1.0, 1.5 [a^{-1}]$ . The vertical axis is normalized by the original value of  $\langle \bar{q}q \rangle$  without cut. A large reduction is found as  $\langle \bar{q}q \rangle_{\Lambda_{IR}} / \langle \bar{q}q \rangle \simeq 0.02$  for  $\Lambda_{IR} = 0.5 a^{-1} \simeq 0.4 \text{ GeV}$  around the physical region of  $m \simeq 0.006 a^{-1} \simeq 5 \text{ MeV}$ .

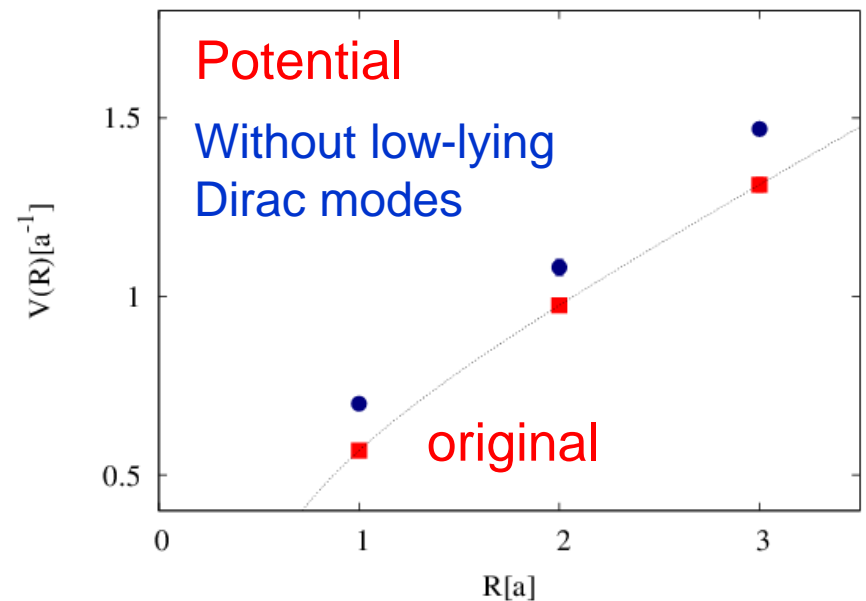
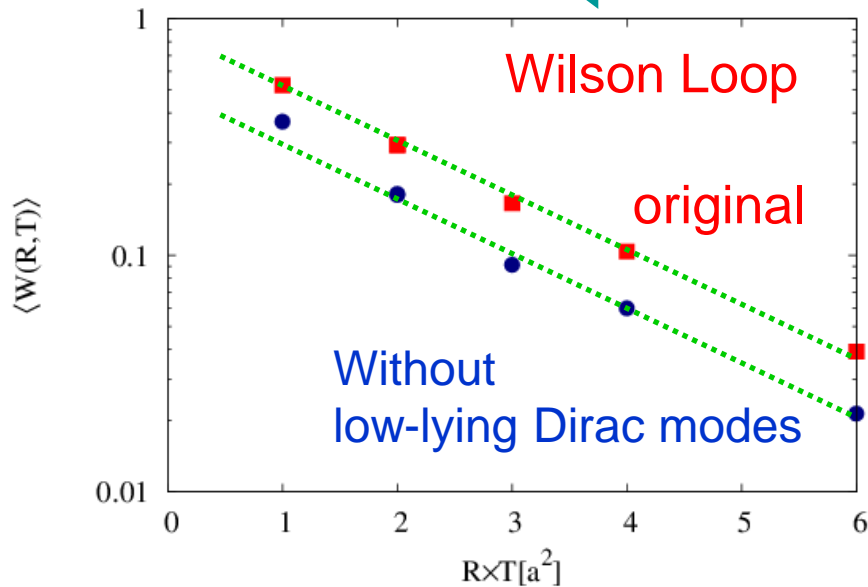
Low-lying のディラック・モードを除去した後での  
カイラル凝縮は劇的に減少する (約2%に減少!)

# Low-lying のディラック・モードを除去した後の閉じ込め力

S. Gongyo, T. Iritani, H.S., Phys. Rev. D86 (2012).



Low-lying のディラック・モードを除去した後の  
ウィルソン・ループとクォーク間ポテンシャル  
に対する格子QCD計算の結果



カイラル対称性の自発的破れのessential mode である low-lying の  
ディラック・モードを除去しても、ウィルソン・ループの面積則、  
その傾き（閉じ込め力）、クォーク間ポテンシャルは変化せず同じである

カイラル対称性の自発的破れがなくてもクォークは閉じ込められている！



# ディラック・モード射影したポリヤコフ・ループと $Z_3$ センター対称性

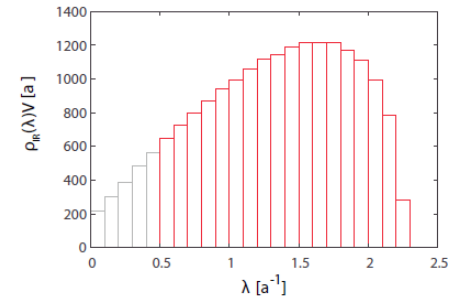
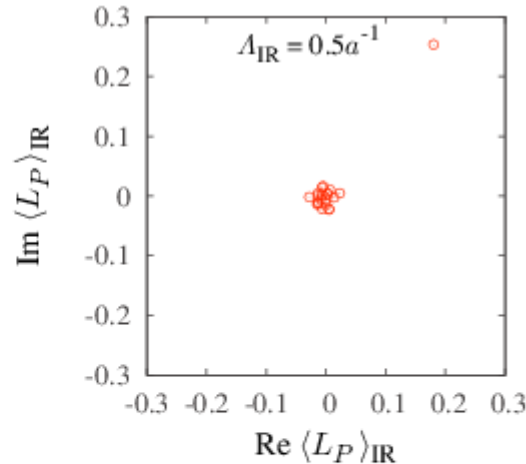
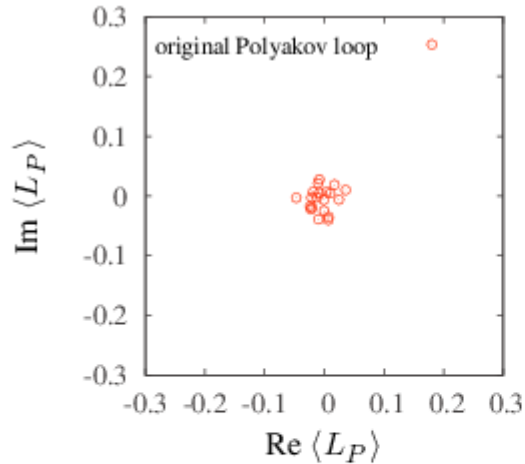
## ディラック・モード射影したポリヤコフ・ループ

$$\text{Tr} \hat{P}^P \equiv \text{Tr} (\hat{U}_4^P)^T = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_T \in A} \text{tr} \langle n_1 | \hat{U}_4 | n_2 \rangle \langle n_2 | \hat{U}_4 | n_3 \rangle \cdots \langle n_T | \hat{U}_4 | n_1 \rangle$$

### ポリヤコフ・ループ

### 低ディラック・モードを除去した結果

on periodic lattice



### ディラック固有値分布

FIG. 6: The scatter plot of the Polyakov loop. The left figure shows the original Polyakov loop  $\langle L_P \rangle$ . The right figure shows the Polyakov loop  $\langle L_P \rangle_{\text{IR}}$  after cutting off the low-lying Dirac modes below the IR-cutoff  $\Lambda_{\text{IR}} = 0.5a^{-1}$ .

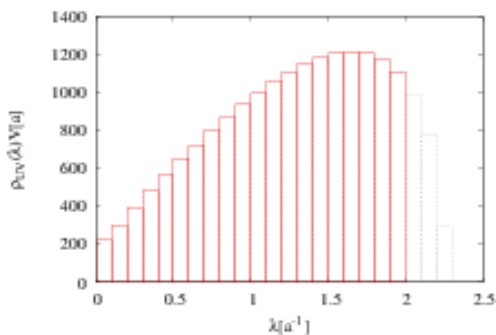
Gongyo, Iritani, H.S. PRD (2012)  
Iritani, Gongyo, H.S. PoS (2012)

Low-lying のディラック・モードを除去しても、ポリヤコフ・ループはゼロのまま  
⇒ 系は閉じ込め相 &  $Z_3$  センター対称性は破れない

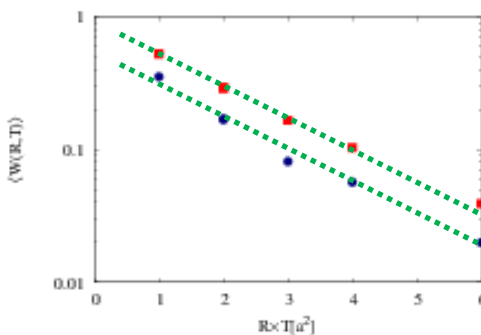
# 紫外領域のディラック・モードを除去した場合

S. Gongyo, T. Iritani, H.S., Phys. Rev. D86 (2012).

ディラック固有値分布



ウィルソン・ループ



クォーク間ポテンシャル

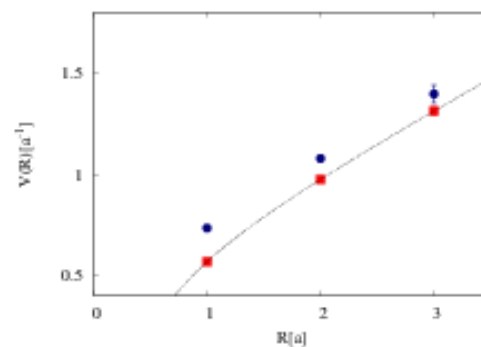


FIG. 7: (a) The UV-cut Dirac spectral density  $\rho_{UV}(\lambda) \equiv \rho(\lambda)\theta(\Lambda_{UV} - |\lambda|)$  with the UV-cutoff  $\Lambda_{UV} = 2a^{-1} \simeq 1.6\text{GeV}$ . (b) The UV-cut Wilson loop  $\text{Tr}W^P(R, T)$  (circle) after removing the UV Dirac modes, plotted against  $R \times T$ . The slope parameter  $\sigma^P$  is almost the same as that of the original Wilson loop (square). (c) The corresponding UV-cut inter-quark potential (circle), which is almost unchanged from the original one (square), apart from an irrelevant constant.

紫外領域のディラック・モードを除去しても  
閉じ込め力は変わらない

# 中間領域のディラック・モードを除去した場合

ディラック固有値分布

ウィルソン・ループ

クォーク間ポテンシャル

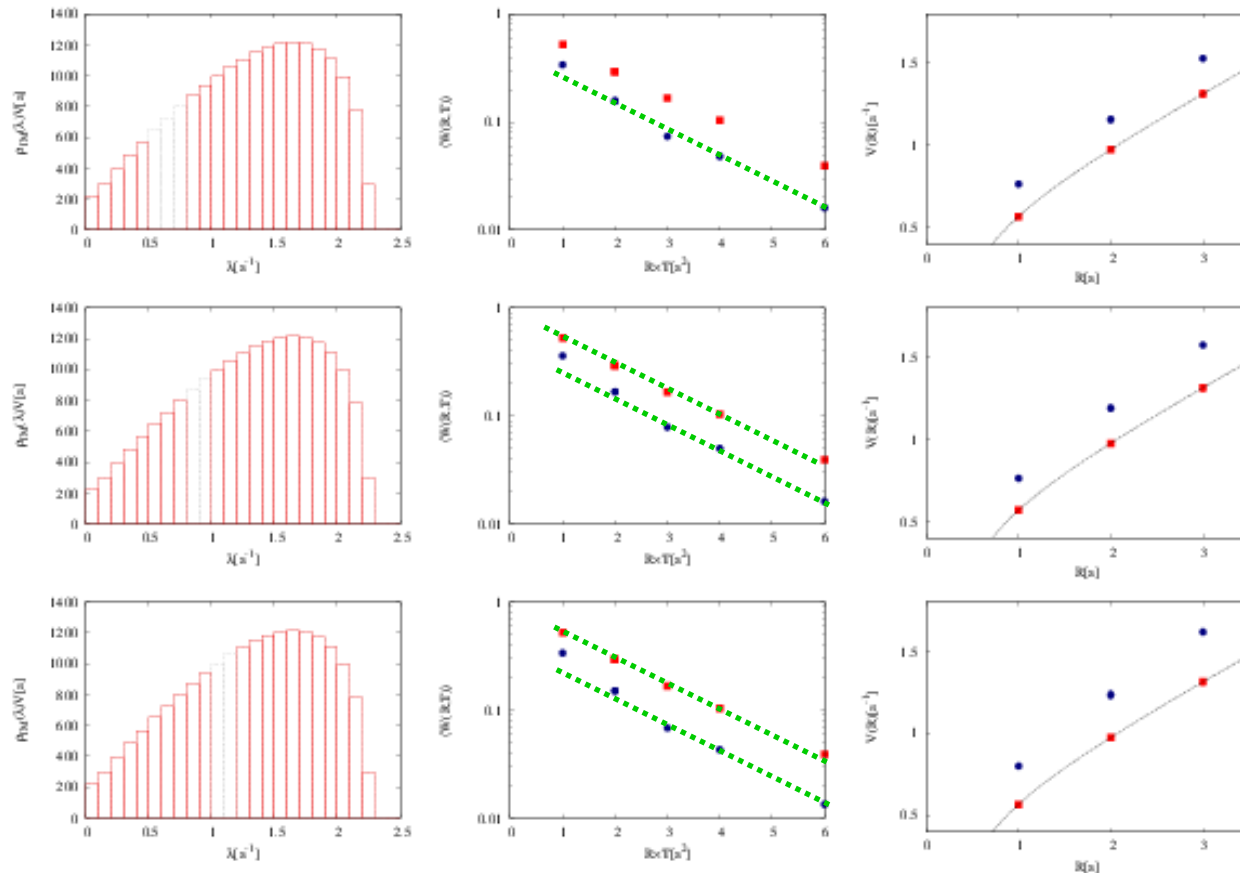


FIG. 8: The left figures show the intermediate(IM)-cut Dirac spectral density  $\rho_{IM}(\lambda)$ : the IM Dirac modes of  $0.5 - 0.8[a^{-1}]$  (top),  $0.8 - 1.0[a^{-1}]$  (middle), and  $1.0 - 1.2[a^{-1}]$  (bottom) are cut. The central figures show the IM-cut Wilson loop  $\text{Tr}W^P(R, T)$  (circle) after removing the IM Dirac modes, plotted against  $R \times T$ . For each case, the slope parameter  $\sigma^P$  is almost the same as that of the original Wilson loop (square). The right figure shows the corresponding IM-cut inter-quark potential (circle), which is almost unchanged from the original one (square), apart from an irrelevant constant.

中間領域の様々なディラック・モードを除去しても  
閉じ込め力は変わらない

# 関連する格子QCD研究1

C. Gattringer, Phys. Rev. Lett. 97, 032003 (2006),

“Linking confinement to spectral properties of the Dirac operator”.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{8V} \left( 2 \sum_{\lambda} \lambda^{N_t} - (1+i) \sum_{\lambda_+} \lambda_+^{N_t} - (1-i) \sum_{\lambda_-} \lambda_-^{N_t} \right)$$

$\lambda$ : ディラック固有値 (周期的境界条件)

$\lambda_{\pm}$ : Twisted 周期的境界条件でのディラック固有値

Twisted 周期的境界条件:

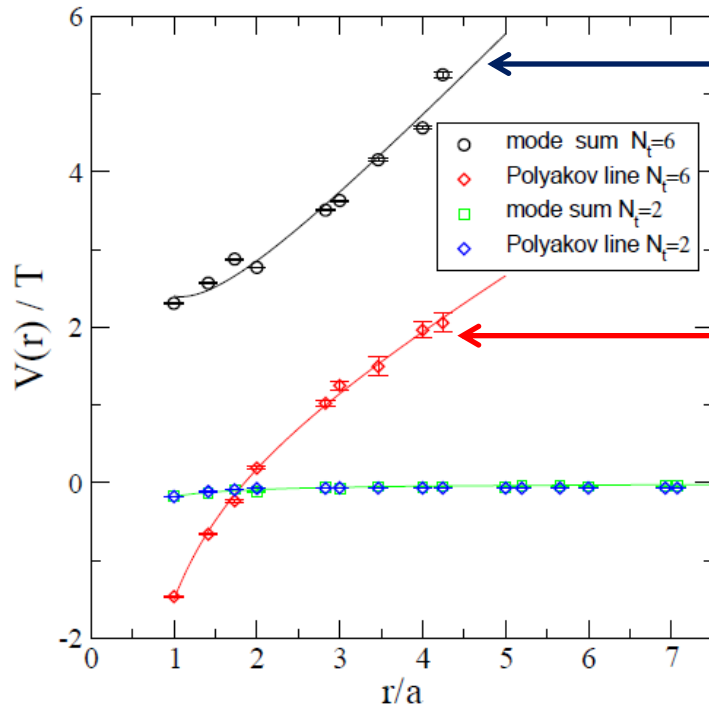
虚時間方向の周期性に対して  $Z_3$  センター群要素  $z$  を乗じる

$$U_4(\vec{x}, N_t) \rightarrow z U_4(\vec{x}, N_t) \quad \forall \vec{x} \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Our comment:  $\lambda$  と  $\lambda_{\pm}$  の対応関係が不明なので明言できないが、  
Low-lying のディラック・モード のポリヤコフ・ループへの寄与は小さそう。  
～我々のIRディラック・モード除去の結果と consistent にみえる

## 関連する格子QCD研究2

F.Synatschke, A.Wipf, and K.Langfeld, Phys. Rev. D77, 114018 (2008),  
“Relation between chiral symmetry breaking and confinement  
in YM-theories”.



low-lying のディラック・モードのみで  
計算したポテンシャル

閉じ込め力はほぼ同じ

original のクォーク間ポテンシャル

非閉じ込め相のデータ

閉じ込め力は low-lying のディラック・モードのみで再現される。

Our comment:

我々のUVディラック・モード除去の結果と consistent にみえる

## 関連する格子QCD研究3

C.B.Lang and M.Schrock, Phys. Rev. D84, 087704 (2011),  
“Unbreaking chiral symmetry”.

L.Ya Glozman, C.B.Lang and M.Schrock, Phys. Rev. D86, 014507 (2012),  
“Symmetries of hadrons after unbreaking the chiral symmetry”.

Low-lying のディラック・モードを除去して  
ハドロンのスペクトルを計算.

※ この計算はクォークの伝播関数を変更すれば  
良いだけなので比較的容易

⇒

ハドロンはパリティ・ダブリング (正負のパリティが縮退)  
～カイラル対称性が回復

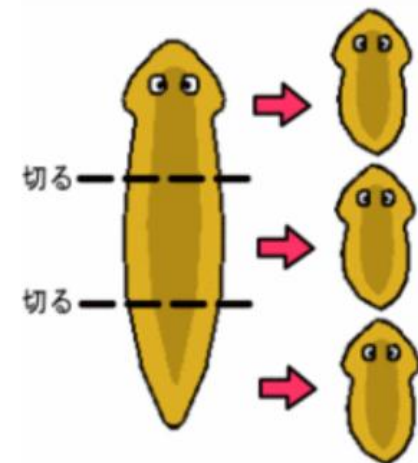
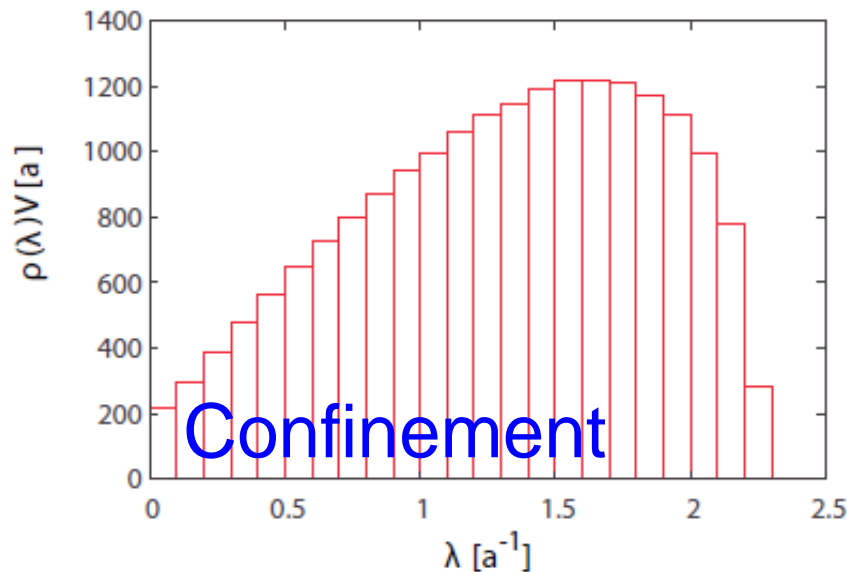
Our comment:

カイラル対称性の破れ無しでの“ハドロンの形成”は  
閉じ込め力の存在を示唆している

## 本研究の結論

- ・閉じ込めに対して支配的に寄与する特定のディラック・モードは存在しないようである.
- ・特に、カイラル対称性の自発的破れに essential な low-lying のディラック・モードは閉じ込めに対しては essential ではない.
- ・“閉じ込めの種” は low-lying のディラック・モードのみならずディラック・モード空間にある程度広く分布していると思われる.

その範囲内ならディラック・モードのどこを取ってきても閉じ込めを示す



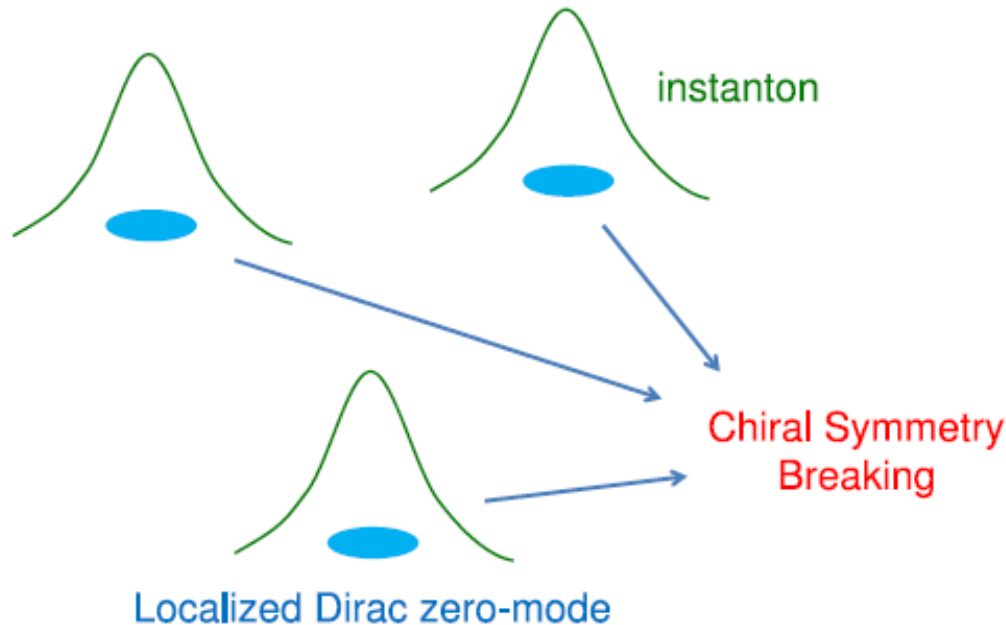
©川崎悟司氏



# 1つの物理的解釈: インスタントンとディラック・ゼロモード

インスタントンはカイラル対称性の破れに大きく寄与するが、閉じ込めには直接的には寄与しない。

Diakonov-Petrov (1984,1986)



Dmitri Diakonov 教授

それぞれのインスタントン周辺にはディラック・ゼロモードが局在し、それらはカイラル対称性の自発的破れに寄与する。しかし、局在したオブジェクトでは閉じ込めを説明するのは難しい。

思考実験として、もしQCD真空から“インスタントンのみ”を注意深く除去できたとすると、カイラル凝縮は著しく減少し、ディラック・ゼロモードの多くは消失するが、閉じ込めの性質には影響を与えないであろう。即ち、この場合は、カイラル対称性はかなり回復するが閉じ込めは変化しないと思われる。

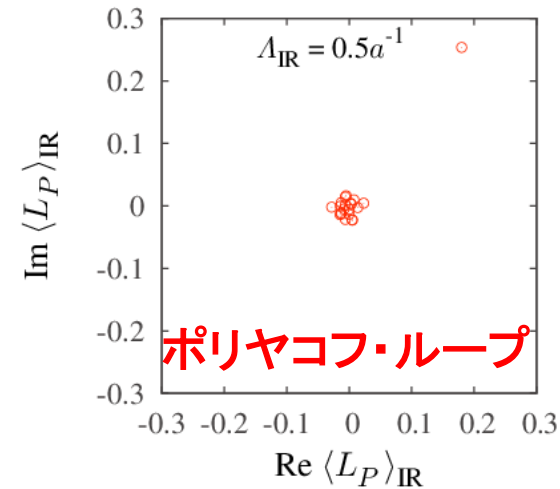
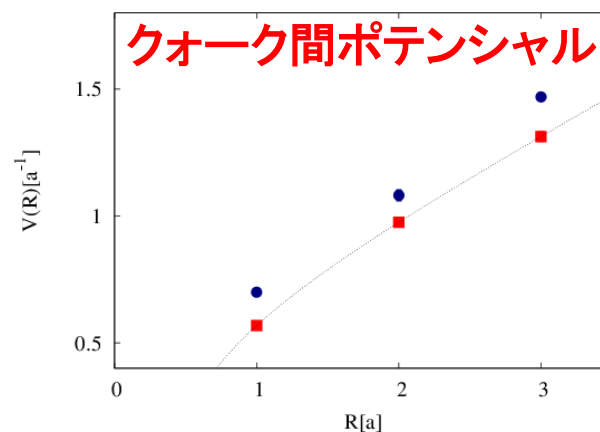
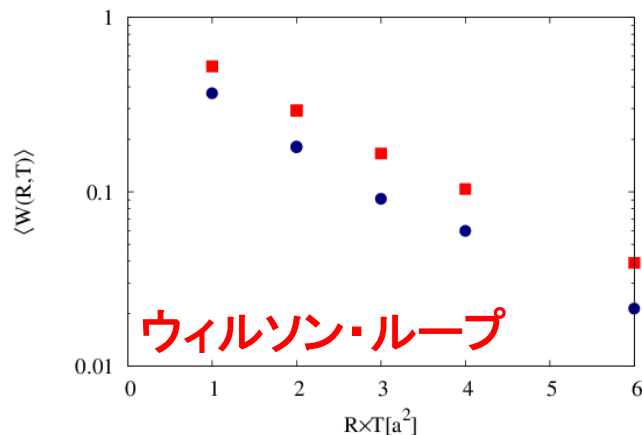
# Summary and Concluding Remarks

SU(3)格子QCDにおいて **ディラック・モード展開法**を用いて、**閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れ(CSB)との関連を解析した。**

CSBに **essential** な **low-lying** の **ディラック・モード**を除去しても、

- ・ **ウィルソン・ループ**は **面積則**に従い、**閉じ込め力**は **変化しない**
- ・ **クォーク間ポテンシャル**も **変化しない**
- ・ **ポリヤコフ・ループ**は **ゼロ**  
⇒ **系は閉じ込め相 &  $Z_3$ -センター対称性は破れない**

これらの結果は、QCDにおいてクォーク閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れが、直接的に対応していないことを示している。





*Thank You!*



# BACK UP



## 関連する格子QCD研究

C. Gattringer, Phys. Rev. Lett. 97, 032003 (2006).

$$\langle P \rangle = \frac{1}{8V} \left( 2 \sum_{\lambda} \lambda^{N_t} - (1+i) \sum_{\lambda_+} \lambda_+^{N_t} - (1-i) \sum_{\lambda_-} \lambda_-^{N_t} \right)$$

Low-lying のディラック・モード のポリヤコフ・ループへの寄与は小さそう。  
～我々のIRディラック・モード除去の結果と consistent にみえる

F.Synatschke, A.Wipf, and K.Langfeld, Phys. Rev. D77, 114018 (2008).

閉じ込め力は low-lying のディラック・モードのみで再現される。  
～我々のUVディラック・モード除去の結果と consistent にみえる

C.B.Lang and M.Schroek, Phys. Rev. D84, 087704 (2011).

L.Ya Glzman, C.B.Lang and M.Schroek, Phys. Rev. D86, 014507 (2012).

Low-lying のディラック・モードを除去してハドロンのスペクトルを計算。

～Our comment: カイラル対称性の破れ無しでの“ハドロンの形成”は  
閉じ込め力の存在を示唆している

# Important role of Monopole to Chiral Sym Breaking (Lattice QCD)

**O. Miyamura, PLB (1995) : First Lattice QCD Study to reveal Important role of Monopole to Chiral Sym Breaking**

Polyakov loop

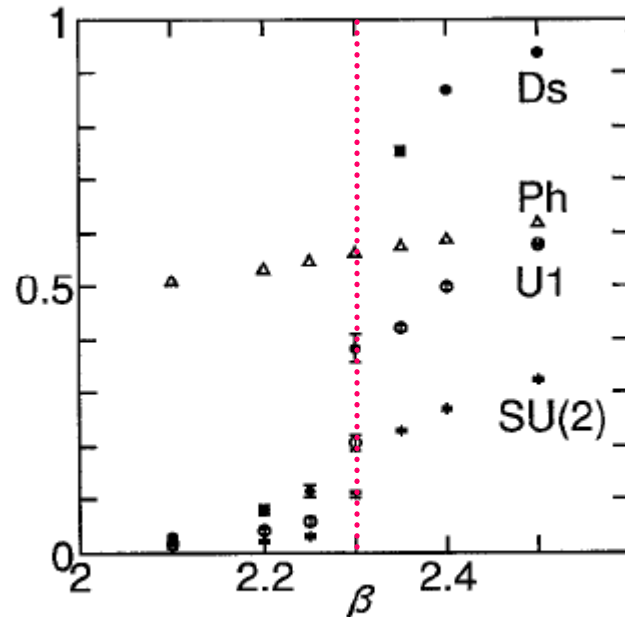


Fig. 3. Polyakov loop in the SU(2) field (cross), in the U(1) field (open circle), its singular (filled circle) and regular (triangle) components on a  $16^3 \times 4$  lattice.

Quark Condensate  
 $|\langle \text{Tr}G(0,0) \rangle|$

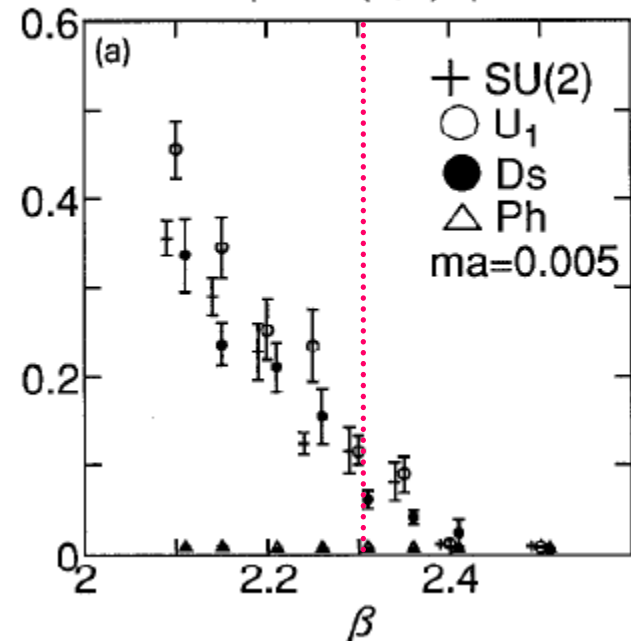
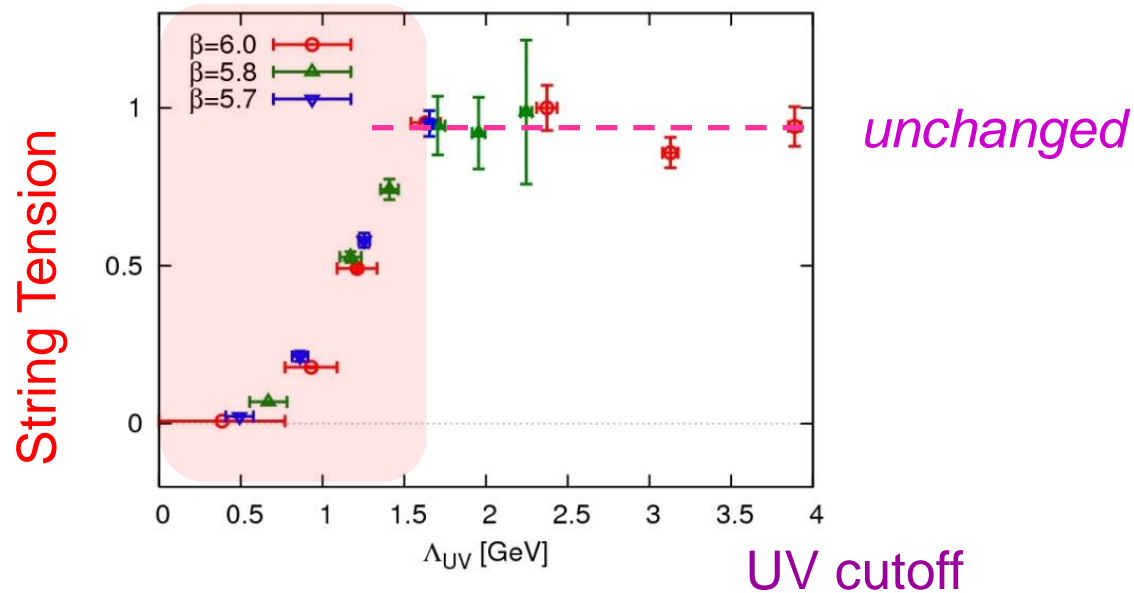


Fig. 4. (a)  $|\langle \text{Tr}G(0,0) \rangle|$  for  $ma = 0.005$  in the SU(2) field (cross), in the U(1) field (open circle), its singular (filled circle) and regular (triangle) components on a  $16^3 \times 4$  lattice. (b) Same for  $ma = 0.01$ .

**Monopole part (including only monopole) : Chiral sym breaking**  
**Photon part (after removing monopole) : Chiral Symmetric**

In the previous work, we studied **IR/UV-Gluon Contribution** to the Ground-State Potential or Confinement.

A. Yamamoto and H.S., PRL 101, 241601 (2008); PRD79, 054504 (2009).



*As a remarkable fact, the string tension is almost unchanged even after cutting off the high-momentum gluon component above 1.5GeV.*



# Fourier expansion and Gauge invariance

The previous method is based on the Fourier expansion.

The Fourier expansion is based on eigen-state of momentum operator.

Because of the commutable nature of  $[p^\mu, p^\nu] = 0$ ,

all the momentum  $p^\mu$  can be simultaneously diagonalized.

This is one of the strong merits of the Fourier expansion.

The Fourier expansion is very useful and keeps Lorentz covariance,

but it does not keep gauge invariance in gauge theories.

Therefore, for the use of the Fourier expansion in QCD, one has to select a suitable gauge such as the Landau gauge, where the gauge-field fluctuation is strongly suppressed in Euclidean QCD.

Next, we consider Gauge-Invariant Method, using a gauge-invariant expansion in QCD instead of the Fourier expansion.



## Gauge-invariant expansion in QCD

We consider a generalization of the Fourier expansion or an **alternative expansion** with keeping the gauge symmetry.

A straight generalization is to use **covariant derivative operator  $D^\mu$**  instead of derivative operator  $\partial^\mu$ .

However, due to **non-commutable nature** of  $[D^\mu, D^\nu] \neq 0$ , we cannot **diagonalize all the covariant derivative  $D^\mu$**  simultaneously, but only one of them can be diagonalized.

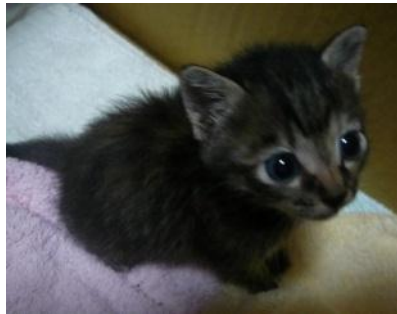
For example, the expansion by the eigen-state of  $D_4$  keeps gauge covariance and is rather interesting, but this type of the expansion inevitably **breaks Lorentz covariance**.

Then, we consider the Dirac operator  $\gamma^\mu D^\mu$  and  $D^2 = D^\mu D_\mu$ , since the expansion with the eigen-states **keeps both gauge symmetry and Lorentz covariance**.

In particular, the **Dirac-mode expansion** is rather interesting because it directly connects with **Chiral Sym Breaking and Topological Charge**.

# Gauge-Invariant Formalism with Dirac-mode Expansion

We mainly consider manifestly **Gauge-Invariant new method** using **Dirac-mode expansion** to examine relevant modes for each QCD phenomenon.



?

New Formalism !



Here, **Dirac operator**  $\mathcal{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$  is directly related to **Chiral Symmetry Breaking**, via **Banks-Casher relation**, and its zero modes are directly related to **Topological charge**, via **Atiyah-Singer Index theorem**.

# Atiyah-Singer Index Theorem

$$\text{Index}(\mathcal{D}) = Q$$

$$Q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \text{Tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} \in \mathbb{Z} \quad : \text{Topological charge in QCD}$$

$$\text{Index}(\mathcal{D}) \equiv \dim(\ker(\mathcal{D})) - \dim(\text{co ker}(\mathcal{D})) = V_R - V_L \quad : \text{index of } \mathcal{D}$$

$$V_{R,L} \quad : \text{Right- / Left- handed zero-mode number of } \mathcal{D}$$

Zero-mode number asymmetry of Dirac operator is equal to Topological charge (instanton number) in QCD

※ The non-zero spectrum is symmetric due to  $\{\gamma_5, \mathcal{D}\} = 0$

$$\because \mathcal{D}\psi_n = i\lambda_n\psi_n \rightarrow \mathcal{D}(\gamma_5\psi_n) = -i\lambda_n(\gamma_5\psi_n)$$