レポート問題：２質点系からなるシーソー　〔略解・計算法・計算結果〕

２質点系シーソーの、回転に関する運動方程式は、授業でも導出した様に、

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\ddot{\theta} = -(m_1 r_1 - m_2 r_2) g \cos\theta$$

$m_1 r_1 = m_2 r_2$ の場合は、授業でも行なった通り、角速度一定の回転運動になる。

以下では、$m_1 r_1 < m_2 r_2$ の場合を考える。

（$m_1 r_1 > m_2 r_2$ の場合は１と２のラベルを変えれば良いだけ。）

$\omega \equiv \sqrt{\dfrac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}$ とすると、上式は、$\ddot{\theta} = \omega^2 \cos\theta$

$\varphi \equiv \theta - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと、$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$　　・・・（１）

（これはシーソーというよりは、実は、振子の問題。）

１）小振幅の場合（φ が常に小さい場合)、（１）は　$\ddot{\varphi} \approx -\omega^2 \varphi$

これは単振動で、時間の原点を適当に選べば、

解は、$\varphi(t) \approx A\sin(\omega t)$　　周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ の周期運動

２）大振幅の場合（φ が大きくなる場合)、数値計算で運動を追ってみよう。

式を簡単化する為に、t の代わりに無次元量 $\tau \equiv \omega t$ を用いて時間変化を

記述することにする。（これは、ω を単位にすることと等価。）

すると、（１）は <u>単純化</u>され、$\dfrac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\sin\varphi$　　・・・（２）

$u \equiv \dfrac{d\varphi}{d\tau}$ とおくと　（２）は、以下の<u>１階常微分の連立方程式</u>に帰着する。

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\tau} = u \\ \dfrac{du}{d\tau} = -\sin\varphi \end{cases}$$　　・・・（３）

数値計算を行なう為に、時間変数τを**離散化**し、$\tau_n = na$とする。

aは微小量（微小時間間隔）であり、nは整数である。

この離散化に対応して、（３）を、以下の様に **差分化**する。

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(\tau_{n+1})-\varphi(\tau_n)}{a} = u(\tau_n) \\ \dfrac{u(\tau_{n+1})-u(\tau_n)}{a} = -\sin\varphi(\tau_n) \end{cases} \qquad \cdot\cdot\cdot（４）$$

（４）式は $a \to 0$ という極限で（３）になることがわかる。

尚、これは$f'(x) \approx \dfrac{f(x+a)-f(x)}{a}$ という前方差分を用いた定式化であり、

後方差分$f'(x) \approx \dfrac{f(x)-f(x-a)}{a}$や中心差分$f'(x) \approx \dfrac{f(x+a)-f(x-a)}{2a}$を用いて

も同様に定式化できる。（aが充分に小さければ、これらは皆同じ結果を与える。）

（４）を変形し、以下の様な **漸化式**の形にする。

$$\begin{cases} \varphi(\tau_{n+1}) = \varphi(\tau_n) + au(\tau_n) \\ u(\tau_{n+1}) = u(\tau_n) - a\sin\varphi(\tau_n) \end{cases} \qquad \cdot\cdot\cdot（５）$$

この（５）を用いることによって、

時刻　$\tau_n = na$　での φ と u についての情報（$\varphi(\tau_n)$，$u(\tau_n)$）が得られれば、

時刻$\tau_{n+1} = (n+1)a$での φ と u についての情報（$\varphi(\tau_{n+1})$，$u(\tau_{n+1})$）が得られる。

従って、初期条件として、例えば、$\tau = 0$で $\varphi(0) = \varphi_0$，$u(0) = u_0$ が与えられれば、

この漸化式を用いて、（$\varphi(\tau_n)$，$u(\tau_n)$）（$n = 1,2,3,\ldots$）が順次求まっていく。

（この漸化式を用いて、過去の値（$\varphi(\tau_n)$，$u(\tau_n)$）（$n = -1,-2,-3,\ldots$)を求める事も可能。）

レポート問題：２質点系からなるシーソー　〔計算結果〕

略解・計算法で示した、以下の様な **漸化式**を数値計算で解いてみる。

$$\begin{cases}\varphi(\tau_{n+1}) = \varphi(\tau_n) + au(\tau_n) \\ u(\tau_{n+1}) = u(\tau_n) - a\sin\varphi(\tau_n)\end{cases}$$

初期条件として、例えば、$\tau = 0$ で $\varphi(0) = \varphi_0$，$u(0) = u_0$ が与えられれば、

この漸化式を用いて、（$\varphi(\tau_n)$，$u(\tau_n)$）（$n = 1,2,3,\ldots$）が順次求まっていく。

ここでは、例として、$a = 0.01$，$\varphi(a) = 0$，$u(a) = u_0$ として、原点付近の傾きである u_0 の値（初速に対応）を、様々に変えた計算結果を示すことにする。

Fortran のプログラムの例：$\tau_n = na$，$\varphi(\tau_n) = p(n)$，$u(\tau_n) = u(n)$，$u_0 = 0.5$ の場合

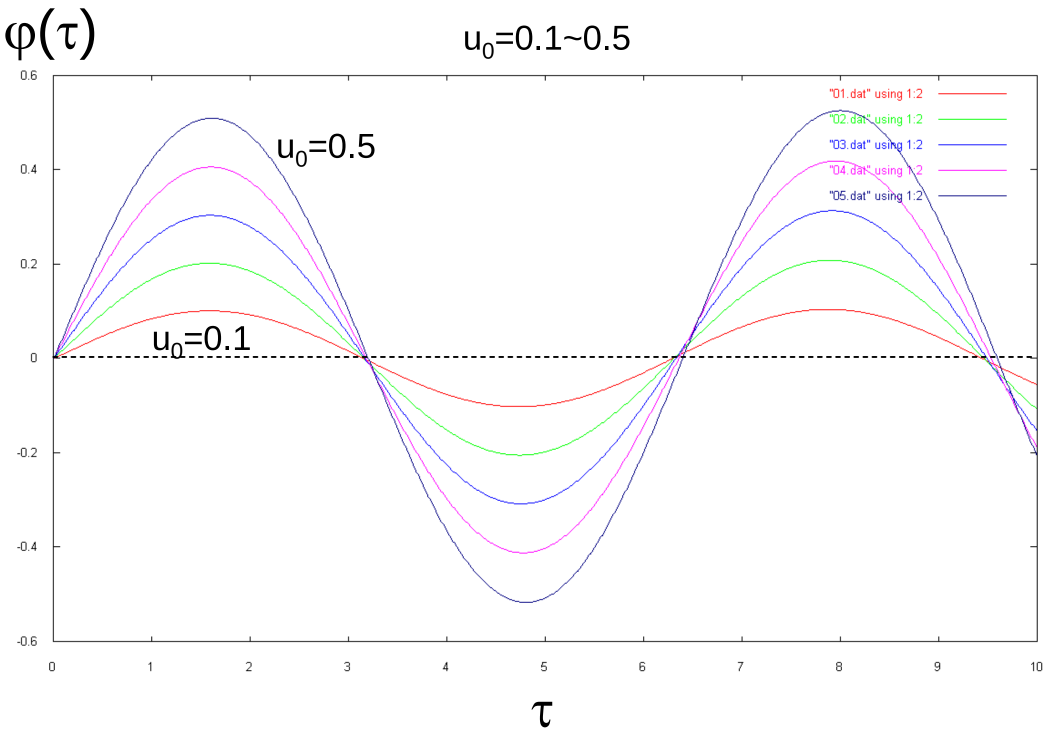
```
      REAL a, p(1000), u(1000)
        a=0.01
        p(1)=0.0
        u(1)=0.5
      DO 10 n=1,999
        p(n+1)=p(n)+a*u(n)
        u(n+1)=u(n)-a*sin(p(n))
   10 CONTINUE
      DO 20 n=1,1000
        WRITE(6,*) real(n)*a, p(n)
   20 CONTINUE
```

（n を１だけずらすと、$\tau = 0$ で $\varphi(0) = 0$，$u(0) = u_0$ という初期条件の計算結果になる。
物理の解答としてはその方が良いのだが、プログラムが簡単な上述の例を示した。）

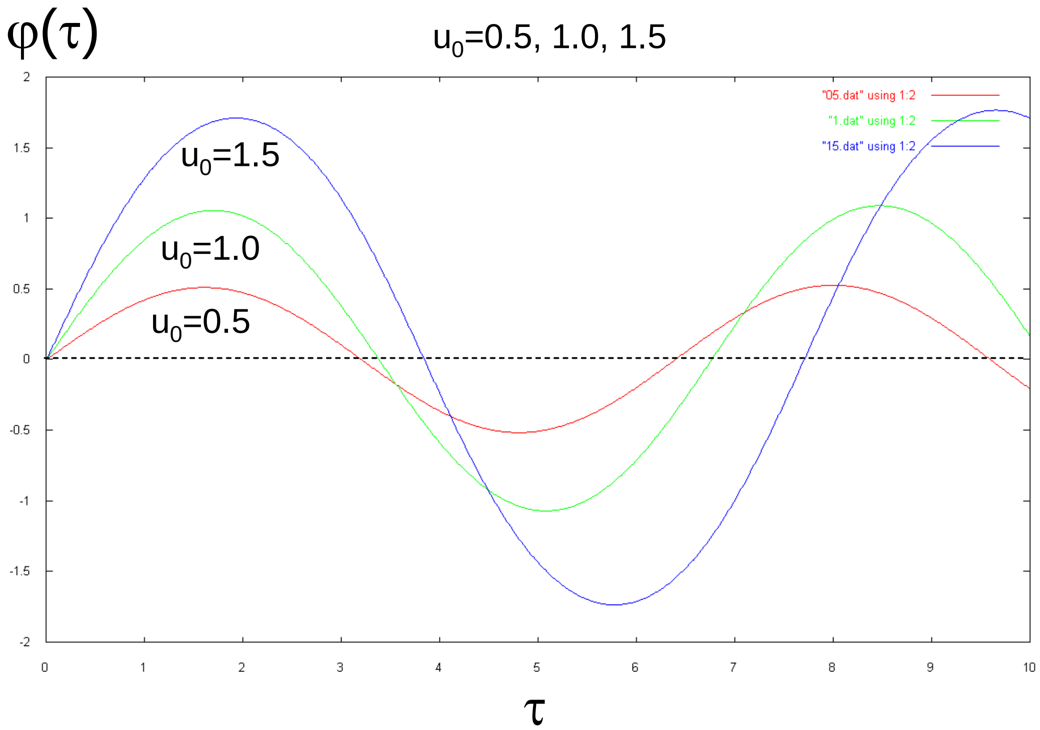
尚、$\varphi(\tau)$ が数値的に求まれば、$\tau \equiv \omega t$，$\theta(t) \equiv \varphi(\tau) + \pi/2$ より、$\theta(t)$ も得られるが、その変換は自明なので、$\theta(t)$ の図示は省略する。

以下は具体的な計算例

$\boxed{u_0 = 0.1 \sim 0.5 \text{の場合}}$（初速が小さい場合）：全体的に$|\varphi(\tau)| << \pi/2$であり、微小振動（単振動）と近似でき、$\varphi(\tau)$は周期が$2\pi$の正弦波のように振舞う。



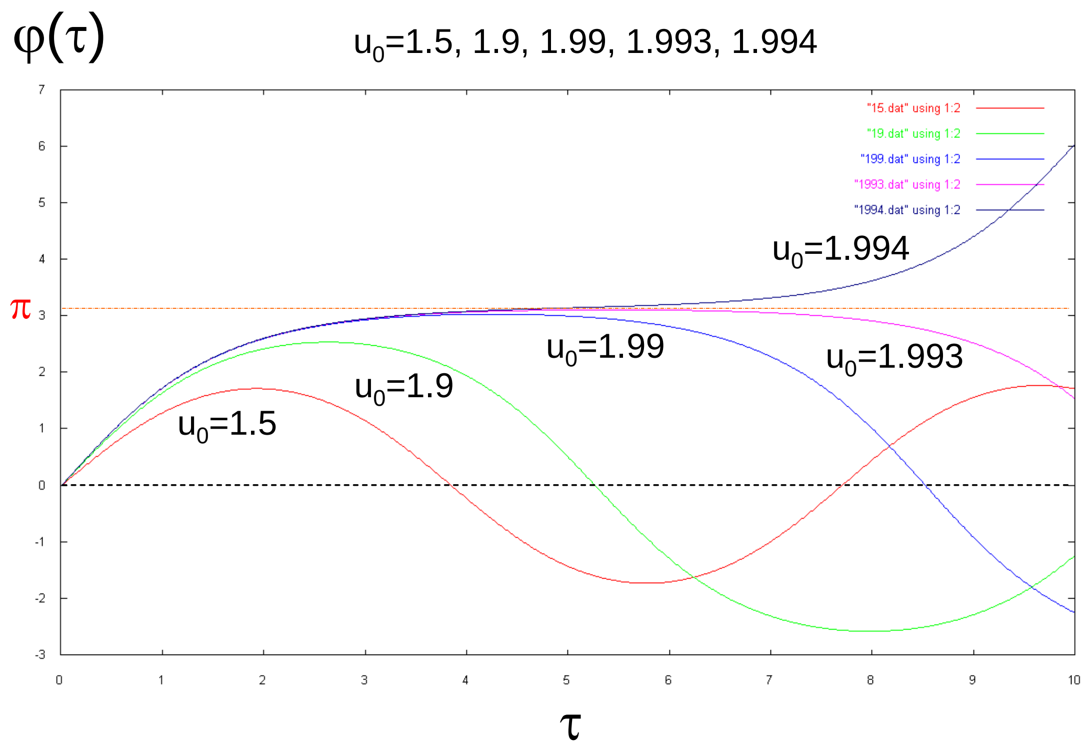
$\boxed{u_0 = 0.5 \sim 1.5 \text{の場合}}$：正弦波のように振舞うが、$|\varphi(\tau)| \sim \pi/2$という領域が現れ始めると、そこでは微小振動（単振動）とは近似できず、$\varphi(\tau)$の周期は2πからずれてくる。



$\boxed{u_0 = 1.5 \sim 1.994 \text{ の場合}}$: $u_0 > 1.9$ で正弦波が大きく崩れ始め、

$u_0 = 1.993 \sim 1.994$ において、$\varphi(\tau)$ は 周期関数から単調増加関数に変化する。

これは、物理的には、振動運動から回転運動に変化したことを示す。



$\boxed{u_0 = 1.994 \sim 2.2 \text{ の場合}}$ （初速が大きい場合）: $\varphi(\tau)$ は 単調増加関数であり、

$u_0 > 2.1$ では、$\varphi(\tau)$ は 1 次関数が波打ったような関数になり、その傾きは u_0 とともに大きくなる。これは、速い回転運動に対応する。