力学続論・試験問題（科目コード 4333006）（150 点満点）

問題１（猫の宙返りの力学）［40 点］ 宇宙空間などの外力が無い状態で、体の向きを変えることは意外に難しい。これは角運動量が保存するためである。その点、猫は巧妙な力学的運動により
宙返り（＝逆さまの状態から 180 度回転し着地すること）を行っている。〔京大工の岩井・谷村研を参照〕
猫は宙返りする際に、まずは前脚を縮め、 後脚を伸ばした状態で、体をひねる。次いで前脚を伸ばし、後脚を縮めた状態で、 逆向きに体をひねる。大まかには、この２段階のプロセスにより、角運動量を保存しつつ体の向きを変えている。以下に、猫の宙返りのダイナミクスを単純化したモデルを考える。
物体は、図の様に２つの部分ＡとＢからなり、**無重力下**で**固定軸まわりに滑らかに回転**する。
部分Ａは、質量 m の質点が角度 $\theta_A(t)$ の方向に固定軸からの距離 $r_A(t)$ だけ突き出た構造をしている。
部分Ｂは、質量 m の質点が角度 $\theta_B(t)$ の方向に固定軸からの距離 $r_B(t)$ だけ突き出た構造をしている。
（これらの質点以外の質量、及び、回転の際の固定軸との摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。）
なお、質点までの脚は固定軸からみて動径方向に長さが変えられ、$\theta_A(t)$，$\theta_B(t)$ は向きも含めた
上方とのなす角とする。（固定軸の左方向を正として、右ねじを正の向きとする。）
２つの部分ＡとＢは、力学的に連結しており、互いにトルクを及ぼしあう。（これは体のひねりに相当。）
部分Ｂから部分Ａに及ぼす（固定軸まわりの）トルクを $N(t)$ で表す。（固定軸の左方向を正とする。）

1）部分Ａから部分Ｂへの固定軸まわりのトルクはどう表されるか？**[2 点]**

$$-N(t)$$

2）部分Ａ（質点と脚も含む）の固定軸まわりの慣性モーメント $I_A(t)$ はどう表されるか？**[2 点]**

$$I_A(t) = mr_A^2(t)$$

3）部分Ｂ（質点と脚も含む）の固定軸まわりの慣性モーメント $I_B(t)$ はどう表されるか？**[2 点]**

$$I_B(t) = mr_B^2(t)$$

4）部分Ａに対する回転の運動方程式を書き下せ。**[3 点]**

$$\frac{d}{dt}\left(I_A(t)\dot{\theta}_A(t)\right) = N(t)$$

5）部分Ｂに対する回転の運動方程式を書き下せ。**[3 点]**

$$\frac{d}{dt}\left(I_B(t)\dot{\theta}_B(t)\right) = -N(t)$$

$t=0$ の初期状態を $\theta_A(0)=\theta_B(0)=0$，$\dot{\theta}_A(0)=\dot{\theta}_B(0)=0$（ＡとＢの脚は共に上向きで静止）とする。

I. まずは、$0 \le t < T$ では、$r_A(t)=r$，$r_B(t)=R$（r と R は $r<R$ を満たす定数）の状態で、
時間に依存するトルク $N(t)=N\cos(\pi t/T)$（N は正の定数）を与える。

6）部分Ａに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_A(t)$，$\theta_A(t)$，$\theta_A(T)$ を求めよ。導出過程も書け。**[4 点]**

$$mr^2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_A(t)\right) = N\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{ より } \quad \dot{\theta}_A(t) = \frac{NT}{\pi mr^2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \theta_A(t) = \frac{NT^2}{\pi^2 mr^2}\left(1\text{-}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) \quad \theta_A(T) = \frac{2NT^2}{\pi^2 mr^2}$$

7）部分Ｂに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_B(t)$，$\theta_B(t)$，$\theta_B(T)$ を求めよ。導出過程も書け。**[4 点]**

$$mR^2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_B(t)\right) = -N\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{ より } \quad \dot{\theta}_B(t) = -\frac{NT}{\pi mR^2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \theta_B(t) = -\frac{NT^2}{\pi^2 mR^2}\left(1\text{-}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right) \quad \theta_B(T) = -\frac{2NT^2}{\pi^2 mR^2}$$

II. $t=T$ で部分Ａの脚の長さ r から R に、部分Ｂの脚の長さ R から r に、瞬間的に変える。

8）このとき、部分Ａと部分Ｂの慣性モーメントは、それぞれどう変化するか？**[2 点]**

部分Ａの慣性モーメントは $(R/r)^2$ 倍になる。部分Ｂの慣性モーメントは $(r/R)^2$ 倍になる。

9）このとき、部分Ａと部分Ｂの角速度は、それぞれどうなるか？**[2 点]**

$\dot{\theta}_A(T)=\dot{\theta}_B(T)=0$ であり、0 のまま変化しない。（角運動量はともに 0 のまま。）

III. 次いで、$T < t \le 2T$ では、$r_A(t)=R$，$r_B(t)=r$ の状態で、
時間に依存するトルク $N(t)=N\cos(\pi t/T)$ を与える。(これは、実は **I** の場合とは逆向きのトルク。)

10）部分Ａに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_A(t)$，$\theta_A(t)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。**[4 点]**

$$mR^2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_A(t)\right) = N\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{ より } \quad \dot{\theta}_A(t) = \frac{NT}{\pi mR^2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \theta_A(t) = \frac{2NT^2}{\pi^2 mr^2} - \frac{NT^2}{\pi^2 mR^2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)$$

11）部分Ｂに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_B(t)$，$\theta_B(t)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。[4 点]

$mr^2\dfrac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_B(t)\right)=-N\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$ より　$\dot{\theta}_B(t)=-\dfrac{NT}{\pi mr^2}\sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$　$\theta_B(t)=-\dfrac{2NT^2}{\pi^2 mR^2}+\dfrac{NT^2}{\pi^2 mr^2}\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)\right)$

12）２つの関数 $\theta_A(t)$ と $\theta_B(t)$ の $0\le t\le 2T$ での概形を１つにグラフで表せ。座標等も書き込め。[4 点]

省略

13）終状態 $t=2T$ での $\theta_A(2T),\theta_B(2T),\dot{\theta}_A(2T),\dot{\theta}_B(2T)$ を求め、脚の長さを元に戻せば終状態が、始状態と比べて**物体全体の形状も回転状態（角運動量）も変化せず（脚の）向きのみが変化**した事を示せ[4 点]

$\theta_A(2T)=\theta_B(2T)=\dfrac{2NT^2}{\pi^2 m}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{R^2}\right)>0$　$\dot{\theta}_A(2T)=\dot{\theta}_B(2T)=0$ より、

終状態の部分Ａの脚と部分Ｂの脚は同じ方向を向いており、
従って、（脚の長さを元に戻せば）物体全体の形状は始状態と同じ。
また、終状態の部分Ａと部分Ｂの角速度（角運動量）はどちらもゼロであり、回転状態も始状態と同じ。
但し、脚の向きは始状態から変化しているので、始状態と比べて向きのみが変化している。

問題２ 質量 m の質点の運動に関して 以下の問いに答えよ。[25 点]

Ａ．角運動量の問題：

原点Ｏのまわりの 質点の角運動量 $\vec{\mathrm{L}}$ は、位置 $\vec{\mathrm{r}}$ と運動量 $\vec{\mathrm{p}}$ の外積 $\vec{\mathrm{L}}\equiv\vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{p}}$ で定義される。

1）内積 $\vec{\mathrm{L}}\cdot\vec{\mathrm{r}}$ と $\vec{\mathrm{L}}\cdot\vec{\mathrm{p}}$ は、それぞれどのような値になるか？[2 点]

$\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}=0$　$\mathbf{L}\cdot\mathbf{p}=0$

2）質点に対する運動方程式から出発して、角運動量 $\vec{\mathrm{L}}$ の**時間微分**が、
質点の位置 $\vec{\mathrm{r}}$ と質点に作用する力 $\vec{\mathrm{F}}$ との**外積**で表せることを示せ。[3 点]

$\mathbf{L}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, $\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$ より $\dot{\mathbf{L}}=\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}=m\,\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$

3）中心力場の場合、質点に作用する中心力 $\vec{\mathrm{F}}$ は $\vec{\mathrm{r}}$ に比例し、$\vec{\mathrm{F}}=k(r)\vec{\mathrm{r}}$ と表すことができる。
中心力場の場合、角運動量 $\vec{\mathrm{L}}$ が**保存量**になることを示せ。[3 点]

$\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\mathrm{k}\,\mathbf{r}=\mathrm{k}\,\mathbf{r}\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$　より、$\mathbf{L}$ は **保存量**である。

4）原点Ｏを力の中心とする**中心力場の場合**には、質点の運動が**平面内の運動になる**ことを示せ。[4 点]

中心力場の場合、$\mathbf{L}$ は **保存**し、$\mathbf{L}$ の**方向も保存**される。この事と、$\mathbf{L}$ が $\mathbf{r}$ と**直交**することから、
$\mathbf{r}(t)$ で表される質点の運動は、角運動量 $\mathbf{L}$ に **垂直** な（原点Ｏを含む）**平面内の運動**になる

Ｂ．Flyby の問題：

質量 m の探査機が、始状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_I$ で惑星に近づき、終状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_F$ で惑星から遠ざかる場合を考える。
惑星は大質量であり、探査機が近づく領域では 惑星の速度 $\vec{\mathrm{w}}$ は一定であるとして、以下の問いに答えよ。

5）**<u>惑星から見た場合</u>**、探査機は一般に双曲線の軌道を描く。惑星から見た場合の、
探査機の近づくとき（始状態）の相対速度 $\vec{\mathrm{u}}_I$ と、遠ざかるとき（終状態）の相対速度 $\vec{\mathrm{u}}_F$ を、
それぞれ $\vec{\mathrm{v}}_I$，$\vec{\mathrm{v}}_F$，$\vec{\mathrm{w}}$ を用いて表せ。[3 点]

$\vec{\mathrm{u}}_I=\vec{\mathrm{v}}_I-\vec{\mathrm{w}}$，$\vec{\mathrm{u}}_F=\vec{\mathrm{v}}_F-\vec{\mathrm{w}}$

6）$\vec{\mathrm{u}}_I$ と $\vec{\mathrm{u}}_F$ が満たすべき関係式を簡単な理由と共に示せ。[3 点]

$|\vec{\mathrm{u}}_I|=|\vec{\mathrm{u}}_F|$　（理由）惑星から見た場合、始状態と終状態の探査機は、
ポテンシャル・エネルギーが等しく、従って、運動エネルギーが等しくなるから。

7）始状態と終状態の探査機の**運動エネルギーの変化** $\Delta E\equiv\dfrac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}}_F^2-\dfrac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}}_I^2$ を適当な形に変形し、
m, $\vec{\mathrm{v}}_F-\vec{\mathrm{v}}_I$，$\vec{\mathrm{w}}$ を用いて表せ。[4 点]

$\Delta E=\dfrac{1}{2}m\left(\vec{\mathrm{u}}_F+\vec{\mathrm{w}}\right)^2-\dfrac{1}{2}m\left(\vec{\mathrm{u}}_I+\vec{\mathrm{w}}\right)^2=m\left(\vec{\mathrm{u}}_F-\vec{\mathrm{u}}_I\right)\cdot\vec{\mathrm{w}}=m\left(\vec{\mathrm{v}}_F-\vec{\mathrm{v}}_I\right)\cdot\vec{\mathrm{w}}$

8）7)で得た答えより、**どの様な軌道を選べば、終状態の探査機の速さ $|\vec{\mathrm{v}}_F|$ を増加させることができるか**
簡潔に論じよ。[3 点]

始状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_I$ を $\vec{\mathrm{w}}$ と逆（反対）方向に選び、終状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_F$ が $\vec{\mathrm{w}}$ と同じ方向になるような
軌道を選べば、ΔE、従って、$|\vec{\mathrm{v}}_F|$ を増加させることができる。

問題３（慣性モーメント・角運動量・角速度・回転エネルギー）［15 点］

以下の様な、理想化（単純化）された回転系の記述について、それぞれ解答せよ。

1）スケート選手が、**両方の手にそれぞれ質量 m のおもり**を持ち、左右対称な姿勢で、氷の上を角速度 ω で回転している場合を考える。但し、スケート選手の体重と 氷上での摩擦は無視できるものとする。

a）腕を伸ばし、回転軸とそれぞれのおもりとの距離を R としたとき、
回転軸まわりの慣性モーメント I，角運動量 L，回転エネルギーE を、m，R，ω を用いて表せ。**[3 点]**

$I=2mR^2$，$L=2mR^2\omega$，$E=mR^2\omega^2$

b）次に $R(t)=f(t)R$ のように両腕を縮めていく。（ $f(t)$ はある関数で縮める前は $f(t)=1$ とする。）
この場合、回転の運動方程式を書き変形することで、角速度 $\omega(t)$ を導け。［導出過程も書く］**[4 点]**

最初は $L=2mR^2\omega$ であり、回転の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}L=\frac{d}{dt}\left(2mR^2(t)\cdot\omega(t)\right)=2mR^2\frac{d}{dt}\left(f^2(t)\cdot\omega(t)\right)=0$$ なので、$$\omega(t)=\frac{\omega}{f^2(t)}$$

c） 両腕を縮めて、回転軸とそれぞれのおもりとの距離を 1/10 にしたとき、回転軸まわりの
慣性モーメント、角運動量、角速度、回転エネルギーはそれぞれ何倍になるか？**[4 点]**

慣性モーメントは 1/100 倍、角運動量は 1 倍、角速度は 100 倍、回転エネルギーは 100 倍

2）半径 10 万 km の一様な球体の星が、ある角速度で回転している。この星が、**質量は変化せずに**、
半径が 10 km の一様な球体の星に、**外力無しで重力崩壊**したとすると、崩壊後の星の 回転軸まわりの
慣性モーメント、角運動量、角速度、回転エネルギーは、それぞれ何倍になると予想されるか？**[4 点]**

慣性モーメントは 10^{-8} 倍、角運動量は 1 倍、角速度は 10^{8} 倍、回転エネルギーは 10^{8} 倍

問題４（回転系・遠心力・コリオリカ・ローレンツカ）［30 点］

原点 O を中心に一定の角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ で回転する系を考える。以下の問いに答えよ。

1）この回転系においては、**慣性力**として、（回転系での）質点の位置のみに依存する**遠心力** と、
（回転系での）質点の速度に依存する**コリオリカ** が現れる。質量 m の質点に、静止系での力 $\vec{\mathrm{F}}$ が
作用している場合、回転系での質点の位置 $\vec{\mathrm{r}}$ に対して、**回転系における運動方程式**を書け。**[5 点]**

$$m\frac{d'^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2}=\vec{\mathrm{F}}-m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathrm{r}}\right)-2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\frac{d'\vec{\mathrm{r}}}{dt}$$

2）**<u>静止物体を回転する人が見た場合</u>**、その物体は円運動を行っているように見える。回転する人の位置を
原点 O とし、回転している人の角速度を $\vec{\boldsymbol{\omega}}=(0,0,\ \omega)$ とする。回転系から見た質量 m の静止物体の
軌道は、初期条件を $\vec{\mathrm{r}}\,(t=0)=(r,0,0)$ とすると、$\vec{\mathrm{r}}\ =(\,r\cos\omega t\,,\ -r\sin\omega t\,,0\,)$ と表される。

a）$\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathrm{r}}$ を計算せよ。**[4 点]**

$\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathrm{r}}=(\omega r\sin\omega t\,,\ \omega r\cos\omega t\,,0\,)$

b）この場合、回転系での**遠心力**を計算し、ベクトルで表せ。**[4 点]**

$-m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathrm{r}}\right)=(m\omega^2 r\cos\omega t\,,\ -m\omega^2 r\sin\omega t\,,0\,)\ =\ m\omega^2\ \vec{\mathrm{r}}$

c）この場合、回転系での**コリオリカ**を計算し、ベクトルで表せ。**[4 点]**

$$-2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\frac{d'\vec{\mathrm{r}}}{dt}=(\ -2m\omega^2 r\cos\omega t\,,\ 2m\omega^2 r\sin\omega t\,,0\,)\ =-2m\omega^2\ \vec{\mathrm{r}}$$

d）この場合、**回転系での見かけ上の円運動**を引き起こす「求心力」について簡単に説明せよ。**[4 点]**

コリオリ力が、遠心力の２倍の大きさの内向きの求心力を与え、円運動をもたらすように見える。

3）**<u>コリオリカとローレンツカの類似性</u>**：角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ で自転する地球上に固定された座標系で、質量mの質点
をおもりとするフーコー振子を考える。フーコー振子のおもりに電荷 q を与え、一定の静磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ 中に置
く。この場合、ローレンツ力は $\vec{\mathrm{F}}=q\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}}$ と表される。

a）適当な一定磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ をかけると、**ローレンツカとコリオリカが相殺**し得ることを示せ。**[5点]**

ローレンツ力とコリオリ力の合力は、$-2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{v}}+q\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{v}}\times\left(2m\vec{\boldsymbol{\omega}}+q\vec{\mathbf{B}}\right)$ なので
$2m\vec{\boldsymbol{\omega}}+q\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{0}}$ であれば、合力はゼロとなり、これらは相殺し得る。

b）ローレンツ力とコリオリ力が相殺するときの磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ を m，q，$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ で表せ。**[4点]**

$$\vec{\mathbf{B}}=-\frac{2m}{q}\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

問題５（地球の歳差運動）［20 点］　　　　　　　　　　　　　　　　　　　【赤字は１点，青字は２点で甘く採点】

地球をわずかに**扁平な回転楕円体の剛体**とみなし、その回転運動を **剛体系**を用いて考える。自転の角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ で表す。対称軸（北極星の方）を３軸にとると、この場合の各直交軸は**慣性主軸**になる。**剛体慣性主軸系**においては、慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ の**非対角成分は 0，対角成分は 時間に依らない定数**である。この場合、$I_{11}=I_{22}$ $\boxed{<}$ I_{33}（大小関係）を満たす。地軸は 近似的に３軸に平行なので角速度ベクトル $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ は、$|\omega_1|,|\omega_2|$ $\boxed{\ll}$ ω_3（程度までわかる大小関係）を満たす。

1）**まず、外力を無視した場合**の、**自由回転による地軸の歳差運動**について考察する。この場合、地球に対する**オイラーの運動方程式**は、$\vec{\omega}$ の成分 ω_α と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$，および、$I_{11}(=I_{22}), I_{33}$ を用いて表すと、$\boxed{I_{11}\dot{\omega}_1+(I_{33}-I_{11})\,\omega_2\,\omega_3=0}$，$\boxed{I_{11}\dot{\omega}_2+(I_{11}-I_{33})\,\omega_3\,\omega_1=0}$，$\boxed{I_{33}\dot{\omega}_3=0}$ 従って $\vec{\omega}$ の成分のうち、$\boxed{\omega_3}$ は時間に依らない定数である事がわかる。$\omega_P=\boxed{\dfrac{I_{33}-I_{11}}{I_{11}}\omega_3}$（>0）とおくと $\dot{\omega}_1+\omega_P\,\omega_2=0$，$\dot{\omega}_2-\omega_P\,\omega_1=0$

∴ $\ddot{\omega}_1=\boxed{-\omega_P^2}\,\omega_1$ であり、初期条件として、$\omega_1(t=0)=a$，$\dot{\omega}_1(t=0)=0$ とすると、$\omega_1=\boxed{a\cos(\omega_P t)}$ また、$\dot{\omega}_1+\omega_P\,\omega_2=0$ より、$\omega_2=-\dot{\omega}_1/\omega_P$ $=\boxed{a\sin(\omega_P t)}$ 即ち、**剛体系では、回転軸（地軸）の方向**である $\vec{\omega}$ が、**３軸（対称軸）のまわりを、小さな角度だけ傾きつつ、角速度 ω_P で回転**して見える。この場合の、**自由回転による地軸の歳差運動の角速度**は ω_P であり、**周期** T は、ω_3, I_{11}, I_{33} を用いて $T=\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_P}=\dfrac{I_{11}}{I_{33}-I_{11}}\dfrac{2\pi}{\omega_3}}$ と表せる。例えば、$I_{33}=1.002\,I_{11}$ の場合、この自由回転による歳差運動の周期は $\boxed{500}$ 日となる。

2）これとは別に、**外力に起因**して、約 26000 年の周期で、**地軸の向きが大きく変化**し、これも**歳差運動**と呼ばれる。これは、主として $\boxed{\text{太陽}}$ からの引力が、（扁平な回転楕円体である）地球上の各地点で わずかに異なり、地球に**小さなトルク**が与えられることに起因している。このトルクは、地軸を立たせようとするが、地球の $\boxed{\text{自転}}$ のために、外力とは $\boxed{\text{垂直}}$ な方向に回転軸である地軸が移動し、その結果地軸の向きはゆっくりと回転する。これは、$\boxed{\text{ジャイロスコープ}}$ 現象の一種であり、1)とは異なり、地軸の向きは大きく変化する。

問題６（ジェット）［20点］

ロケットやジェットは、高速のガスを後方に噴出することにより推進力を得て進む。以下では、ジェット機の**進行方向を正**にとり、１次元的なジェット機の運動について考察する。ジェット機の質量を $m(t)$，位置を $x(t)$，速度を $\mathrm{v}(t)$ として、ジェット機から見て**相対速度** $-\mathrm{u}(t)$ ($\mathrm{u}>0$)のガスを噴射して進む場合を考える。（$x(t)$ 等の (t) は適宜省略する。）このジェット機は、密度 ρ の**空気**を面積 S の吸引口から吸い込み、**燃料と共に**後方に相対速度 u で排出する。ρ，S は時間に依らず一定とし、風は無いものとする。

1）時刻 t から $t+dt$ までの微小時間に吸入された空気、噴射されたガス、および ジェット機に対する運動を考える。時刻 t でのジェット機の質量を m，速度を v とし、時刻 $t+dt$ でのジェット機の質量を $m+dm$，速度を $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ とする。

a) 時刻 t から $t+dt$ までに噴射された**ガス（空気＋燃料）**の運動量 P_G を求めよ。[5 点]

$P_G=(\rho\,S\,\mathrm{v}\,dt-dm)(\mathrm{v}-\mathrm{u})$

b) 時刻t でのジェット機の運動量 $P=m\mathrm{v}$ と，時刻 $t+dt$ での**ジェット機とガスの全運動量** P' との差 $dP\equiv P'-P$ を**微小量の１次まで**の表式で表せ。簡単な導出過程（途中の式）も書くこと。[5点]

$dP=(m+dm)(\mathrm{v}+d\mathrm{v})+(\rho\,S\,\mathrm{v}\,dt-dm)(\mathrm{v}-\mathrm{u})-m\mathrm{v}=m\,d\mathrm{v}+\mathrm{u}\,dm+\rho\,S\,\mathrm{v}\,(\mathrm{v}-\mathrm{u})\,dt$

2）単位時間当たりの**燃料の消費量が一定**で $m(t)=\alpha(T-t)$（α とT は正の定数）と書き表せ、かつ、噴出する**ガスの相対的な速さ** $\mathrm{u}(t)$ が、$\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$（w は正の定数）と書き表せる場合を考える。なお、この仮想的なジェット機は 燃料が大部分であり $t=T$ まで考えられるものとする。空気抵抗などの外力が無視できる理想系の場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, x(0)=0$ として、速度 $\mathrm{v}(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。なお、$\gamma\equiv\rho S w/\alpha$ を用いると計算は幾分簡単化する。<u>γ を用いた簡単化した表式で表せ</u>。導出過程も書くこと。また、$x(t)$ $(0<t<T)$のグラフの概形を書け。[10点=2+4+1+1+2]

全運動量の保存 $dP=0$ より、$m\,d\mathrm{v}+\mathrm{u}\,dm+\rho\,S\,\mathrm{v}\,(\mathrm{v}-\mathrm{u})\,dt=0$

$m(t)=\alpha(T-t)$より $dm=-\mu\,dt$，これらと $\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$ より、

$\alpha(T-t)\,d\mathrm{v}-\alpha(\mathrm{v}+\mathrm{w})\,dt-\rho\,S\,\mathrm{w}\,\mathrm{v}\,dt=0$ ∴ $\alpha(T-t)\,d\mathrm{v}=\{(\rho\,S\,\mathrm{w}+\alpha)\mathrm{v}+\alpha\,\mathrm{w}\}dt$

$\gamma=\rho\,S\,\mathrm{w}/\alpha$ を用いると $(T-t)\,d\mathrm{v}=\{(\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\}dt$ ∴ $d\mathrm{v}/\{(\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\}=dt/(T-t)$（変数分離形）

両辺を積分し $\dfrac{1}{\gamma+1}\ln\{(\gamma+1)v+w\}=-\ln(T-t)+C$，$\mathrm{v}(0)=0$ より $\dfrac{1}{\gamma+1}\ln\{\dfrac{(\gamma+1)v+w}{w}\}=-\ln(\dfrac{T-t}{T})$

$$\therefore\ \frac{(\gamma+1)v+w}{w}=\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma+1}\quad 従って\quad v(t)=\frac{w}{\gamma+1}\left[\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma+1}-1\right]\quad\therefore\ x(t)=\frac{w}{\gamma+1}\left[\frac{T}{\gamma}\left\{\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma}-1\right\}-t\right]$$