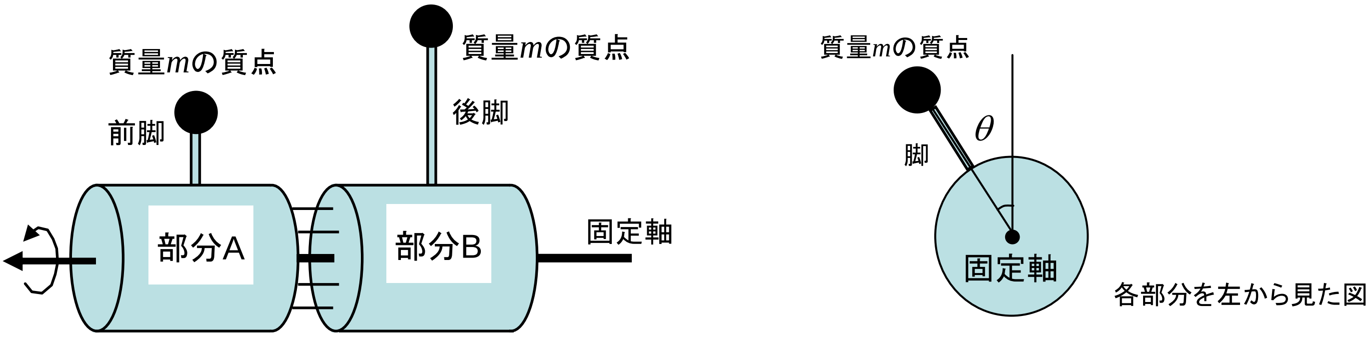
力学続論・試験問題（科目コード 4333006）（150 点満点）

問題１（猫の宙返りの力学）［40 点］
宇宙空間などの外力が無い状態で、体の向きを変えることは意外に難しい。
これは角運動量が保存するためである。その点、猫は巧妙な力学的運動により
宙返り（＝逆さまの状態から 180 度回転し着地すること）を行っている。〔京大工の岩井・谷村研を参照〕
猫は宙返りする際に、まずは前脚を縮め、　後脚を伸ばした状態で、体をひねる。
　　　　　　　　　　　　　次いで前脚を伸ばし、後脚を縮めた状態で、　逆向きに体をひねる。
大まかには、この２段階のプロセスにより、角運動量を保存しつつ体の向きを変えている。
以下に、猫の宙返りのダイナミクスを単純化したモデルを考える。



物体は、図の様に２つの部分ＡとＢからなり、**無重力下**で**固定軸まわりに滑らかに回転**する。
部分Ａは、質量 m の質点が角度 $\theta_A(t)$ の方向に固定軸からの距離 $r_A(t)$ だけ突き出た構造をしている。
部分Ｂは、質量 m の質点が角度 $\theta_B(t)$ の方向に固定軸からの距離 $r_B(t)$ だけ突き出た構造をしている。
（これらの質点以外の質量、及び、回転の際の固定軸との摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。）
なお、質点までの脚は固定軸からみて動径方向に長さが変えられ、$\theta_A(t)$, $\theta_B(t)$ は向きも含めた
上方とのなす角とする。（固定軸の左方向を正として、右ねじを正の向きとする。）
２つの部分ＡとＢは、力学的に連結しており、互いにトルクを及ぼしあう。（これは体のひねりに相当。）
部分Ｂから部分Ａに及ぼす（固定軸まわりの）トルクを $N(t)$ で表す。（固定軸の左方向を正とする。）

1）部分Ａから部分Ｂへの固定軸まわりのトルクはどう表されるか？
2）部分Ａ（質点と脚も含む）の固定軸まわりの慣性モーメント $I_A(t)$ はどう表されるか？
3）部分Ｂ（質点と脚も含む）の固定軸まわりの慣性モーメント $I_B(t)$ はどう表されるか？
4）部分Ａに対する回転の運動方程式を書き下せ。5）部分Ｂに対する回転の運動方程式を書き下せ。

$t=0$ の初期状態を $\theta_A(0)=\theta_B(0)=0$，$\dot{\theta}_A(0)=\dot{\theta}_B(0)=0$（ＡとＢの脚は共に上向きで静止）とする。

I. まずは、$0\le t<T$ では、$r_A(t)=r$，$r_B(t)=R$（r と R は $r<R$ を満たす定数）の状態で、
　時間に依存するトルク $N(t)=N\cos(\pi t/T)$（N は正の定数）を与える。
6）部分Ａに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_A(t)$, $\theta_A(t)$, $\theta_A(T)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。
7）部分Ｂに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_B(t)$, $\theta_B(t)$, $\theta_B(T)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。

II. $t=T$ で部分Ａの脚の長さ r から R に、部分Ｂの脚の長さ R から r に、瞬間的に変える。
8）このとき、部分Ａと部分Ｂの慣性モーメントは、それぞれどう変化するか？
9）このとき、部分Ａと部分Ｂの角速度は、それぞれどうなるか？

III. 次いで、$T<t\le 2T$ では、$r_A(t)=R$，$r_B(t)=r$ の状態で、
　時間に依存するトルク $N(t)=N\cos(\pi t/T)$ を与える。（これは、実は **I** の場合とは逆向きのトルク。）
10）部分Ａに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_A(t)$，$\theta_A(t)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。
11）部分Ｂに対する回転の運動方程式を解いて $\dot{\theta}_B(t)$，$\theta_B(t)$ を求めよ。簡単な導出過程も書け。
12）２つの関数 $\theta_A(t)$ と $\theta_B(t)$ の $0\le t\le 2T$ での概形を１つにグラフで表せ。重要な座標なども書き込め。
13）終状態 $t=2T$ での $\theta_A(2T), \theta_B(2T), \dot{\theta}_A(2T), \dot{\theta}_B(2T)$ を求め、脚の長さを元に戻せば 終状態が、
始状態と比べて**物体全体の形状も回転状態（角運動量）も変化せず（脚の）向きのみが変化**した事を示せ。

問題２ 質点の運動に関して 以下の問いに答えよ。[25 点]

A．角運動量の問題：

原点 O のまわりの 質点の角運動量$\vec{L}$は、位置$\vec{r}$と運動量$\vec{p}$ の外積 $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$で定義される。

1) 内積 $\vec{L} \cdot \vec{r}$ と$\vec{L} \cdot \vec{p}$ は、それぞれどのような値になるか？
2) 質点に対する運動方程式から出発して、角運動量$\vec{L}$の**時間微分**が、
   質点の位置$\vec{r}$と質点に作用する力$\vec{F}$との**外積**で表せることを示せ。
3) 中心力場の場合、質点に作用する中心力$\vec{F}$は$\vec{r}$に比例し、$\vec{F} = k(r)\vec{r}$と表すことができる。
   中心力場の場合、角運動量$\vec{L}$が**保存量**になることを示せ。
4) 原点 O を力の中心とする**中心力場の場合**には、質点の運動が**平面内の運動になる**ことを示せ。

B．Flyby の問題：

質量 m の探査機が、始状態の速度$\vec{v}_I$で惑星に近づき、終状態の速度$\vec{v}_F$で惑星から遠ざかる場合を考える。
惑星は大質量であり、探査機が近づく領域では 惑星の速度$\vec{w}$は一定であるとして、以下の問いに答えよ。

5) **<u>惑星から見た場合</u>**、探査機は一般に双曲線の軌道を描く。惑星から見た場合の、
   探査機の近づくとき（始状態）の相対速度 $\vec{u}_I$と、遠ざかるとき（終状態）の相対速度$\vec{u}_F$を、
   それぞれ $\vec{v}_I$, $\vec{v}_F$, $\vec{w}$を用いて表せ。
6) $\vec{u}_I$ と $\vec{u}_F$が満たすべき関係式を簡単な理由と共に示せ。
7) 始状態と終状態の探査機の**運動エネルギーの変化** $\Delta E \equiv \frac{1}{2}m\vec{v}_F^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_I^2$を適当な形に変形し、
   m, $\vec{v}_F - \vec{v}_I$, $\vec{w}$を用いて表せ。

8) 7)で得た答えより、**どの様な軌道を選べば、終状態の探査機の速さ$|\vec{v}_F|$を増加させることができるか**
   簡潔に論じよ。

問題３（慣性モーメント・角運動量・角速度・回転エネルギー）[15 点]

以下の様な、理想化（単純化）された回転系の記述について、それぞれ解答せよ。

1) スケート選手が、**両方の手にそれぞれ質量 m のおもり**を持ち、左右対称な姿勢で、氷の上を角速度ω
   で回転している場合を考える。但し、スケート選手の体重と 氷上での摩擦は無視できるものとする。

   a) 腕を伸ばし、回転軸とそれぞれのおもりとの距離をRとしたとき、
      回転軸まわりの慣性モーメントI, 角運動量L, 回転エネルギーEを、m, R, ωを用いて表せ。

   b) 次に$R(t) = f(t)R$ のように両腕を縮めていく。（ $f(t)$ はある関数で縮める前は$f(t) = 1$ とする。）
      この場合、回転の運動方程式を書き、変形することで、角速度$\omega(t)$ を導け。
      [簡単な導出過程も書くこと。]

   c) 両腕を縮めて、回転軸とそれぞれのおもりとの距離を 1/10 にしたとき、
      回転軸まわりの慣性モーメント、角運動量、角速度、回転エネルギーは
      それぞれ何倍になるか？

2) 半径 10 万 km の一様な球体の星が、ある角速度で回転している。この星が、**質量は変化せずに**、
   半径が 10 km の一様な球体の星に、**外力無しで重力崩壊**したとすると、
   崩壊後の星の 回転軸まわりの慣性モーメント、角運動量、角速度、回転エネルギーは、
   それぞれ何倍になると予想されるか？

問題４（回転系・遠心力・コリオリカ・ローレンツ力）［30 点］
原点 O を中心に一定の角速度 $\vec{\omega}$ で回転する系を考える。以下の問いに答えよ。

1) この回転系においては、**慣性力**として、（回転系での）質点の位置のみに依存する**遠心力** と、（回転系での）質点の速度に依存する**コリオリカ** が現れる。
質量 m の質点に、静止系での力 $\vec{\mathrm{F}}$ が作用している場合、回転系での質点の位置 $\vec{\mathrm{r}}$ に対して、
$m\dfrac{d'^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = \ldots$ （$\dfrac{d'}{dt}$：回転系での時間微分）という形での**回転系における運動方程式**を書け。

2) **<u>静止物体を回転する人が見た場合</u>**、その物体は円運動を行っているように見える。
回転する人の位置を原点 O とし、回転している人の角速度を $\vec{\omega} = (0, 0, \ \omega)$とする。
回転系から見た質量 m の静止物体の軌道は、初期条件を $\vec{\mathrm{r}}\,(t = 0) = (r, 0, 0)$とすると、
$\vec{\mathrm{r}} \ = (\, r \cos \omega t \, , \ -r \sin \omega t \, , 0 \,)$ と表される。
a) $\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{r}}$ を計算せよ。
b) この場合、回転系での**遠心力**を計算し、ベクトルで表せ。
c) この場合、回転系での**コリオリカ**を計算し、ベクトルで表せ。
d) この場合、**回転系での見かけ上の円運動**を引き起こす「求心力」について簡単に説明せよ。

3) **<u>コリオリカとローレンツ力の類似性</u>**：
角速度 $\vec{\omega}$ で自転する地球上に固定された座標系で、質量mの質点をおもりとするフーコー振子を考える。
フーコー振子のおもりに電荷 q を与え、一定の静磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ 中に置く。
この場合、ローレンツ力は $\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}$ と表される。

a) 適当な一定磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ をかけると、**ローレンツ力とコリオリカが相殺**し得ることを示せ。
b) ローレンツ力とコリオリ力が相殺するときの磁場 $\vec{\mathrm{B}}$ を m , q , $\vec{\omega}$ で表せ。

問題５（地球の歳差運動）［20 点］　　以下の $\boxed{}$ に適切な式、記号 または 語句 を書き込め。

地球をわずかに**扁平な回転楕円体の剛体**とみなし、その回転運動を **剛体系**を用いて考える。
自転の角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ で表す。対称軸（北極星の方）を 3 軸にとると、この場合の各直交軸は**慣性主軸**になる。**剛体慣性主軸系**においては、慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ の**非対角成分は 0**, **対角成分は 時間に依らない定数**である。（本設問では、剛体系での時間微分をドットで表す。）

この場合、$I_{11} = I_{22}$ $\boxed{\text{ア}}$ I_{33}（大小関係）を満たす。地軸は 近似的に 3 軸に平行なので
角速度ベクトル $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は、$|\omega_1|, |\omega_2|$ $\boxed{\text{イ}}$ ω_3 （程度までわかる大小関係）を満たす。

1) **まず、外力を無視した場合**の、**自由回転による地軸の歳差運動**について考察する。
この場合、地球に対する**オイラーの運動方程式**は、
$\vec{\omega}$ の成分 ω_α ($\alpha = 1,2,3$) と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$, および、$I_{11}\,(= I_{22})\,, I_{33}$ を用いて表すと、
$\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$, $\boxed{\quad\text{エ}\quad}$, $\boxed{\quad\text{オ}\quad}$
従って $\vec{\omega}$ の成分のうち、$\boxed{\text{カ}}$ は時間に依らない定数であることがわかる。
$\omega_{\mathrm{P}} = \boxed{\quad\text{キ}\quad}$ (>0)とおくと、$\dot{\omega}_1 + \omega_{\mathrm{P}}\, \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \omega_{\mathrm{P}}\, \omega_1 = 0$
∴ $\ddot{\omega}_1 = \boxed{\text{ク}}\,\omega_1$ であり、初期条件として、$\omega_1(t = 0) = a$ （a は小さな量), $\dot{\omega}_1(t = 0) = 0$ とすると、
$\omega_1 = \boxed{\text{ケ}}$ 　　また、$\dot{\omega}_1 + \omega_{\mathrm{P}}\, \omega_2 = 0$ より、$\omega_2 = -\dot{\omega}_1 / \omega_{\mathrm{P}} = \boxed{\text{コ}}$
即ち、**剛体系では、回転軸（地軸）の方向**である $\vec{\omega}$ が、**3 軸（対称軸）のまわりを、小さな角度だけ傾きつつ、角速度 ω_{P} で回転**して見える。この場合の、**自由回転による地軸の歳差運動の角速度**は、ω_{P} であり、**周期** T は、ω_3, I_{11}, I_{33} を用いて $T = \boxed{\quad\text{サ}\quad}$ と表せる。
例えば、$I_{33} = 1.002\, I_{11}$ の場合、この自由回転による歳差運動の周期は $\boxed{\quad\text{シ}\quad}$ 日となる。

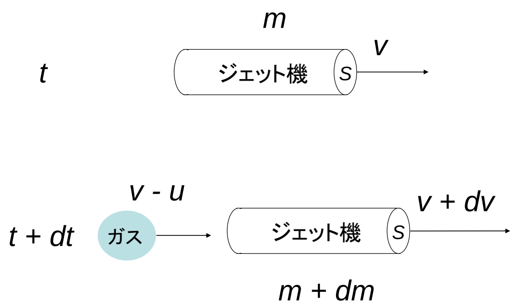
2) これとは別に、**外力に起因**して、約 26000 年の周期で、**地軸の向きが大きく変化**し、
これも**歳差運動**と呼ばれる。これは、主として $\boxed{\text{ス}}$ からの引力が、(扁平な回転楕円体である)
地球上の各地点で わずかに異なり、地球に**小さなトルク**が与えられることに起因している。
このトルクは、地軸を立たせようとするが、地球の $\boxed{\text{セ}}$ のために、外力とは $\boxed{\text{ソ}}$ な方向に、
回転軸である地軸が移動し、その結果、地軸の向きはゆっくりと回転する。
これは、$\boxed{\text{タ}}$ 現象の一種であり、1)とは異なり、地軸の向きは大きく変化する。

問題６（ジェット）［20点］

ロケットやジェットは、高速のガスを後方に噴出することにより推進力を得て進む。
以下では、ジェット機の**進行方向を正**にとり、１次元的なジェット機の運動について考察する。

ジェット機の質量を $m(t)$, 位置を $x(t)$, 速度を $\mathrm{v}(t)$ として、ジェット機から見て
相対速度 $-\mathrm{u}(t)$ ($\mathrm{u}>0$)のガスを噴射して進む場合を考える。($x(t)$ 等の (t) は適宜省略する。)
このジェット機は、密度 ρ の**空気**を面積 S の吸引口から吸い込み、**燃料と共に**後方に相対速度 u で排出する。ρ，S は時間に依らず一定とし、風は無いものとする。

1) 時刻 t から $t+dt$ までの微小時間に吸入された空気、噴射されたガス、および ジェット機に対する運動を考える。時刻 t でのジェット機の質量を m, 速度を v とし、時刻 $t+dt$ でのジェット機の質量を $m+dm$, 速度を $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ とする。



a) 時刻 t から $t+dt$ までに噴射された**ガス（空気＋燃料）**の運動量 P_G を求めよ。
b) 時刻t でのジェット機の運動量 $P=m\mathrm{v}$ と, 時刻 $t+dt$ での**ジェット機とガスの全運動量** P' との差 $dP \equiv P'-P$ を**微小量の１次まで**の表式で表せ。簡単な導出過程（途中の式）も書くこと。

2) 単位時間当たりの**燃料の消費量が一定**で $m(t)=\alpha(T-t)$（α と T は正の定数）と書き表せ、かつ、噴出する**ガスの相対的な速さ** $\mathrm{u}(t)$ が、$\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$（w は正の定数）と書き表せる場合を考える。なお、この仮想的なジェット機は 燃料が大部分であり $t=T$ まで考えられるものとする。

空気抵抗などの外力が無視できる理想系の場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, x(0)=0$ として、
速度 $\mathrm{v}(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。なお、$\gamma \equiv \rho S w/\alpha$ を用いると計算は幾分簡単化する。
<u>γ を用いた簡単化した表式で表せ</u>。導出過程も書くこと。
また、$x(t)$ $(0<t<T)$のグラフの概形を書け。