力学続論・試験問題・略解（科目コード 4333006）（180 点満点）

問題１（ジェット）（40点）

ロケットやジェットは、高速のガスを後方に噴出することにより推進力を得て進む。
以下では、ジェット機の**進行方向を正**にとり、１次元的なジェット機の運動について考察する。
ジェット機の質量を $m(t)$, 位置を $x(t)$, 速度を $\mathrm{v}(t)$ として、ジェット機から見て**相対速度** $-\mathrm{u}(t)$ ($\mathrm{u}>0$)のガスを噴射して進む場合を考える。（$x(t)$ 等の (t) は適宜省略する。）
このジェット機は､密度 ρ の**空気**を面積 S の吸引口から吸い込み､**燃料と共に**後方に相対速度 uで排出する。
ρ，S は時間に依らず一定とし、風は無いものとする。

1) 時刻 t から $t+dt$ までの微小時間に吸入された空気、噴射されたガス、及び ジェット機に対する運動を考える。時刻 t でのジェット機の質量を m, 速度を v とし、時刻 $t+dt$ でのジェット機の質量を $m+dm$, 速度を $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ とする。

a) 時刻 t から $t+dt$ までに噴射された**ガス（空気＋燃料）**の運動量 P_G を求めよ。

$P_G=(\rho S \mathrm{v}\, dt - dm)(\mathrm{v}-\mathrm{u})$

b) 時刻t でのジェット機の運動量 $P=m\mathrm{v}$ と, 時刻 $t+dt$ での**ジェット機とガスの全運動量** P' との差 $dP \equiv P'-P$ を**微小量の１次まで**の表式で表せ。簡単な導出過程（途中の式）も書くこと。

$dP=(m+dm)(\mathrm{v}+d\mathrm{v})+(\rho S \mathrm{v}\, dt - dm)(\mathrm{v}-\mathrm{u}) - m\mathrm{v} = m\, d\mathrm{v} + \mathrm{u}\, dm + \rho S \mathrm{v}(\mathrm{v}-\mathrm{u})\, dt$

2) 単位時間当たりの**燃料の消費量が一定**で $m(t)=\mu(T-t)$（μ とT は正の定数）と書き表せ、かつ、噴出する**ガスの相対的な速さ** $\mathrm{u}(t)$ が、$\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$（$\mathrm{w}$ は正の定数）と書き表せる場合を考える。
尚、この仮想的なジェット機は 燃料が大部分であり $t=T$ まで考えられるものとする。

a) 空気抵抗などの外力が無視できる理想系の場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, x(0)=0$ として、

速度 $\mathrm{v}(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。尚、$\gamma \equiv \rho S w/\mu$ を用いると計算は幾分簡単化する。

<u>γ を用いた簡単化した表式で表せ</u>。導出過程も書くこと。
また、$x(t)$ $(0<t<T)$のグラフの概形を書け。

全運動量の保存 $dP=0$ より、$m\, d\mathrm{v} + \mathrm{u}\, dm + \rho S \mathrm{v}(\mathrm{v}-\mathrm{u})\, dt = 0$
$m(t)=\mu(T-t)$より $dm=-\mu\, dt$, これらと $\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$ より、
$\mu(T-t)\, d\mathrm{v} - \mu(\mathrm{v}+\mathrm{w})\, dt - \rho S \mathrm{w}\, \mathrm{v}\, dt = 0 \quad \therefore\ \mu(T-t)\, d\mathrm{v} = \{(\rho S \mathrm{w}+\mu)\mathrm{v}+\mu \mathrm{w}\}dt$
$\gamma=\rho S \mathrm{w}/\mu$ を用いると $(T-t)\, d\mathrm{v} = \{(\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\}dt \quad \therefore\ d\mathrm{v}/\{(\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\} = dt/(T-t)$（変数分離形）

両辺を積分し $\dfrac{1}{\gamma+1}\ln\{(\gamma+1)v+w\} = -\ln(T-t)+C$, $\mathrm{v}(0)=0$ より $\dfrac{1}{\gamma+1}\ln\{\dfrac{(\gamma+1)v+w}{w}\} = -\ln(\dfrac{T-t}{T})$

$$\therefore\ \frac{(\gamma+1)v+w}{w} = \left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma+1} \quad 従って\quad v(t)=\frac{w}{\gamma+1}\left[\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma+1}-1\right] \quad \therefore\ x(t)=\frac{w}{\gamma+1}\left[\frac{T}{\gamma}\left\{\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\gamma}-1\right\}-t\right]$$

b) 空気抵抗がジェット機の速度に比例し $F(t)=-k\,\mathrm{v}(t)$ という場合を考える。
ここで、k は正の定数で、$k>\mu+\rho S\mathrm{w}$ とする。
この場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0$ として、速度 $\mathrm{v}(t)$ を求めよ。導出過程も書くこと。
$\mathrm{v}(T)$ を $\rho, S, \mathrm{w}, \mu, k$ を用いて表せ。また、$\mathrm{v}(t)$ $(0<t<T)$ のグラフの概形を書け。

全運動量の保存 $dP=F\,dt$ より、$m\, d\mathrm{v} + \mathrm{u}\, dm + \rho S \mathrm{v}(\mathrm{v}-\mathrm{u})\, dt = -k\,\mathrm{v}\, dt$
$\mu(T-t)\, d\mathrm{v} - \mu(\mathrm{v}+\mathrm{w})\, dt - \rho S \mathrm{w}\, \mathrm{v}\, dt = -k\,\mathrm{v}\, dt \quad \therefore\ \mu(T-t)\, d\mathrm{v} = \{(-k+\rho S \mathrm{w}+\mu)\mathrm{v}+\mu \mathrm{w}\}dt$
$(T-t)\, d\mathrm{v} = \{(-k/\mu+\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\}dt \quad \therefore\ d\mathrm{v}/\{(-k/\mu+\gamma+1)\mathrm{v}+\mathrm{w}\} = dt/(T-t)$（変数分離形）
これは a)において γ を $-k/\mu+\gamma$ に変えた場合に一致する。

両辺を積分し $\mathrm{v}(0)=0$ を考慮すると、 $\dfrac{1}{-k/\mu+\gamma+1}\ln\{\dfrac{(-k/\mu+\gamma+1)v+w}{w}\} = -\ln(\dfrac{T-t}{T})$

$$\frac{(-k/\mu+\gamma+1)v+w}{w} = \left(\frac{T-t}{T}\right)^{k/\mu-\gamma-1} \quad 従って\quad v(t)=\frac{w}{k/\mu-\gamma-1}\left[1-\left(\frac{T-t}{T}\right)^{k/\mu-\gamma-1}\right]$$

$$\therefore\ v(T)=\frac{w}{k/\mu-\gamma-1}=\frac{\mu w}{k-\rho S w-\mu}$$

問題２（ヨーヨーの力学）（30点）
半径R, 質量Mで、**一様な円板**でできている**ヨーヨーの１次元的な上下運動**を考える。
糸は、ヨーヨーの外縁に巻かれ、糸の太さや質量、空気抵抗などは無視できるものとする。
糸の張力をT, 重力加速度をg として 以下の問いに答えよ。
尚、**x 座標**は鉛直**上方を正の向き**、ω は**反時計まわりを正の向き**とする。符号についても注意せよ。

1）ヨーヨーの（通常の回転の際の）**重心まわりの慣性モーメント** I を計算せよ。簡単な導出も書け。

面密度は $\rho=\dfrac{M}{\pi R^2}$ であり、$I=\int_0^R 2\pi r\,dr\rho\cdot r^2=\dfrac{1}{4}\pi\rho R^4=\dfrac{1}{2}MR^2$

2）ヨーヨーの重心の座標を $x(t)$として、ヨーヨーの質量 M や糸の張力 T などを用いて、落下中（または上昇中）の**ヨーヨーの並進運動に対する運動方程式**を書け。（x 座標は上方が正の向き。）

$M\ddot{x}(t)=-Mg+T$

3) ヨーヨーの重心まわりの角速度（反時計まわりを正とする）を $\omega(t)$として、ヨーヨーの重心まわりの慣性モーメント I や糸の張力 T などを用いて、落下中（または上昇中）の**ヨーヨーに対する回転の運動方程式**を書け。また、この一様な円板の場合について $\dot{\omega}(t)$ を M, R, T **で表せ。**

$I\dot{\omega}(t)=RT$　　1）より $I=\dfrac{1}{2}MR^2$ なので　$\dot{\omega}(t)=\dfrac{2T}{MR}$

Ⅰ **糸の上端を固定**してヨーヨーを静かに落下させた場合について以下の問いに答えよ。

4）ヨーヨーの**重心速度** $v(t)\equiv\dfrac{dx(t)}{dt}$ とヨーヨーの**重心まわりの角速度** $\omega(t)$との関係を書け。

$v(t)=-R\omega(t)$

5）ヨーヨーに対する張力 T 消去し、落下中（または上昇中）のヨーヨーの**重心の加速度** $a(t)\equiv\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ に対する簡単な表式を求めよ。簡単な導出過程も書け。また、張力 T に対する簡単な表式を求めよ。

2）より $\dfrac{T}{M}=a+g$　3), 4）より $\dfrac{T}{M}=\dfrac{1}{2}R\dot{\omega}=-\dfrac{1}{2}a$ より　$a(t)=-\dfrac{2}{3}g$,　従って $T=\dfrac{1}{3}Mg$

6）初期条件を $x(0)=0$, $v(0)=0$ として、**落下中のヨーヨーの重心座標** $x(t)$ に対する簡単な表式を求めよ。

$x(t)=-\dfrac{1}{3}g\,t^2$

7）初期条件を $x(0)=0$, $v(0)=0$ として、**落下中のヨーヨーに対する、**時刻 t での**並進の運動エネルギー** $T(t)$, **回転エネルギー** $K(t)$, **位置エネルギー** $V(t)$ ($x=0$ で $V=0$ とする) を計算し、それらを簡単な表式で表せ。また、$T(t)+K(t)+V(t)$ を計算せよ。

$T(t)=\dfrac{1}{2}Mv^2=\dfrac{2}{9}Mg^2t^2$,　$K(t)=\dfrac{1}{2}I\omega^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{I}{MR^2}Mv^2=\dfrac{1}{9}Mg^2t^2$,　$V(t)=Mg\,x(t)=-\dfrac{1}{3}Mg^2t^2$,
よって、$T(t)+K(t)+V(t)=0$

Ⅱ 図の様に **糸の上端を引き上げる場合** について以下の問いに答えよ。

8）落下中のヨーヨーに対して、**糸を上方に引き上げ**て、**ヨーヨーの中心を一定の位置に止まらせたい**。そのために、糸の上端に加えるべき加速度Aを求めよ。

2）より $T=Mg$　ここで $A=R\dot{\omega}(t)$ であり　3)より $A=R\dot{\omega}(t)=\dfrac{2T}{M}=2g$

9）落下中のヨーヨーに対して、**糸を上方に引き上げ**て、**ヨーヨーの中心を加速度**B **(>0) で上昇させたい**。そのために、糸の上端に加えるべき加速度Aを求めよ。

2）より $T=M(g+B)$　ここで $A-B=R\dot{\omega}(t)$ であり　3)より $R\dot{\omega}(t)=\dfrac{2T}{M}=2g+2B$
従って、$A=2g+3B$

問題３（Neil の放物線）［30 点］

1) 原点 O’ を中心に一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する回転系においては、**慣性力**として、（回転系での）質点の位置のみに依存する**遠心力** と、（回転系での）質点の速度に依存する**コリオリ力** が現れる。
質量 m の質点に 静止系での力 $\mathbf{F}$ が作用している場合、この回転系（原点 O’）での質点の位置 $\mathbf{r}'$ について

$m\dfrac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \cdots$ （$\dfrac{d'}{dt}$： 回転系での時間微分）という形での **回転系における運動方程式**を書け。

$$\boxed{m\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}}$$

図の様に半径 R=100 km の円柱面状のスペース・コロニーが**一定の角速度** ω（ω は正の定数）で回転している場合を考える。図の様に 円柱面上に 回転系の座標の原点 O をとり、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向を x 軸、円柱面の回転方向を y 軸、円柱の中心への方向を z 軸とする。空気抵抗は無視して 以下の問いに答えよ。

2) 図の座標系では $\mathbf{R} = (0, 0, R)$ が回転の中心である。この回転座標系（原点 O）での質点の位置 $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ に対する**運動方程式**（質量 m, 静止系での力 $\mathbf{F}$ が作用している場合）を 1)の様に書け。

$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$ より

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} - m\omega^2\mathbf{R} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}$$

3) 円柱面付近の人にとっては, 遠心力の効果が 重力加速度と等価になる。
この等価な加速度 g を、ω, R を用いて表せ。

$$\boxed{g = R\omega^2}$$

4) 円柱面付近での遠心力の効果が g = 10m/sec^2 の重力加速度と等価になる様な角速度 ω と周期 T を計算せよ。

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}} = \sqrt{\dfrac{10\mathrm{m/sec^2}}{100000\mathrm{m}}} = 0.01\mathrm{sec}^{-1}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 200\pi\ \mathrm{sec}$ ≒ 630 sec（約 10 分 30 秒）

この回転座標系において、原点 O の上方、高さ h のビルの上 $(0, 0, h)$ から回転系での初速度 0 でおもりを落下させる。$h \ll R$ とし、おもりが感じる**円柱面付近の遠心力による加速度は一定**と見なし g で表す。尚、おもりにかかる静止系での力は $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ とする。

5) おもりの座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の各成分に対する回転系での運動方程式を書け。

$$-m\omega^2\mathbf{R} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \approx -mg\hat{\mathbf{z}} \quad \text{より} \quad m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{\mathbf{z}} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \quad \therefore \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 2\omega\dot{z},\ \ddot{z} = -g - 2\omega\dot{y}$$

6) 落下速度が小さいときは、コリオリ力は近似的に無視できる。
コリオリ力を無視した場合のおもりの軌道を $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ で表す。$x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ を求めよ。

$$x_0(t) = y_0(t) = 0,\quad z_0(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

7) $x(t) \fallingdotseq x_0(t)$, $z(t) \fallingdotseq z_0(t)$ と近似して、6)の結果を 5)の運動方程式に代入することにより $y(t)$を求めよ。
また、$(y(t), z(t))$ で表される放物軌道を $y = f(z)$ の形で表せ。

$$\ddot{y} = 2\omega\dot{z} = -2\omega g t \ \text{より}\ \dot{y} = -\omega g t^2 \ \text{従って、}\ y = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \quad \therefore \quad y = -\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{8(h-z)^3}{g}}$$

8) 4)の場合について、h = 500m として、落下地点での y 座標、即ち、7) での $f(z=0)$ を計算せよ。

$$y(z=0) = -\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}} = -\frac{2h\omega}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\frac{2\times500\mathrm{m}\times0.01\mathrm{sec}^{-1}}{3}\sqrt{\frac{2\times500\mathrm{m}}{10\mathrm{m/sec^2}}} = -30\mathrm{m}$$

問題４（固定軸まわりの回転）［40 点］

1）剛体の**角運動量ベクトル** $\boldsymbol{L}$ と、剛体にかかる外力からの **トルク** $\boldsymbol{N}$ との間の一般的な関係式である **剛体の回転に関する運動方程式** を書け。 $\boxed{\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}}$

2）剛体等に対する、**角運動量** L_α（α=1,2,3）と**角速度ベクトル** ω_β（β=1,2,3）と **慣性モーメント・テンソル** $I_{\alpha\beta}$ との間の一般的な関係式を書け。

$$\boxed{L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta}$$

3）位置 $\mathbf{r}_i$，質量 m_i ($i = 1,2,\ldots, N$) の質点系からなる **剛体の慣性モーメント・テンソル** $I_{\alpha\beta}$（α, β=1,2,3）に対する **一般的な表式**を書け。

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - r_{i\alpha} r_{i\beta})}$$

半径 R，高さ $2a$，質量 M の**一様な円柱**が、その中心軸を **固定軸**として回転している。
円柱の重心を原点Ｏとして、固定軸を z 軸とする静止座標系のもとで、以下の問いに答えよ。

4）この円柱の慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$（α, β=1,2,3）を求めよ。簡単な導出過程も書くこと。

a）対称性から $I_{11} = I_{22}$， $I_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta)$ 　　密度は $\rho = \dfrac{M}{2a\pi R^2}$

b）I_{33} の計算： $I_{33} = \sum_i m_i(r_{i1}^2 + r_{i2}^2) = \rho\int_{-a}^{a} dz \int_0^R 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi\rho\, 2a \int_0^R dr\, r^3 = \pi\rho a R^4 = \dfrac{1}{2}MR^2$

c）$I_{11} = I_{22}$ の計算： $I_{11} = \sum_i m_i(r_{i2}^2 + r_{i3}^2)$， $I_{22} = \sum_i m_i(r_{i1}^2 + r_{i3}^2)$ より、

$$\frac{1}{2}(I_{11} + I_{22} - I_{33}) = \sum_i m_i r_{i3}^2 = \rho\int_0^R 2\pi r dr \int_{-a}^{a} dz\, z^2 = \rho\pi R^2\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-a}^{a} = \frac{2}{3}\rho\pi R^2 a^3 = \frac{1}{3}Ma^2$$

従って、 $I_{11} = I_{22} = \sum_i m_i r_{i3}^2 + \dfrac{1}{2}I_{33} = \dfrac{1}{3}Ma^2 + \dfrac{1}{4}MR^2$

この**円柱の上面**の 回転軸から距離 r の位置に、質量 m の<u>**質点を付着**</u>させ、**一定の角速度** ω で回転させる。時刻の原点を適当に選び、質点の位置座標を $\mathbf{r}$ =（$r\cos(\omega t)$, $r\sin(\omega t)$, a）と表すことにする。

5）この座標系での、円柱面上の**質点の慣性モーメント・テンソル** $\Delta I_{\alpha\beta}(t)$（α, β=1,2,3）を求めよ。

$\Delta I_{\alpha\beta}(t) = m(\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta)$ より　$\Delta I_{\alpha\beta} = \Delta I_{\beta\alpha}$ であり、　$\Delta I_{33} = m(r_1^2 + r_2^2) = mr^2$，

$\Delta I_{11} = m(r_2^2 + r_3^2) = m\{r^2 \sin^2(\omega t) + a^2\}$，　$\Delta I_{22} = m(r_1^2 + r_3^2) = m\{r^2 \cos^2(\omega t) + a^2\}$，

$\Delta I_{12} = -m r_1 r_2 = -mr^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)$，　$\Delta I_{13} = -m r_1 r_3 = -mar\cos(\omega t)$，　$\Delta I_{23} = -m r_2 r_3 = -mar\sin(\omega t)$

6）この場合、**角運動量ベクトル** $\boldsymbol{L}$ =（L_x, L_y, L_z）の方向は、**角速度ベクトル** $\boldsymbol{\omega}$ =（0, 0, ω）の方向と **一致しない**。角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ =（L_x, L_y, L_z）を計算し、R, a, M, r, m, ω, t を用いて表せ。

$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}(I_{\alpha\beta} + \Delta I_{\alpha\beta})\omega_\beta = I_{33}\delta_{\alpha\beta} + \Delta I_{\alpha 3}\omega$　より

$L_1 = \Delta I_{13}\omega = -mra\omega\cos(\omega t)$，　$L_2 = \Delta I_{23}\omega = -mra\omega\sin(\omega t)$，　$L_3 = (I_{33} + \Delta I_{33})\omega = (\dfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega$

7）**軸からの抗力モーメント** $\boldsymbol{N}$ =（N_x, N_y, N_z）を計算し、R, a, M, r, m, ω, t を用いて表せ。

$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}}$ より　$N_1 = \dot{L}_1 = mra\omega^2 \sin(\omega t)$，　$N_2 = \dot{L}_2 = -mra\omega^2 \cos(\omega t)$，　$N_3 = 0$

8）軸の固定が甘い場合についての**運動の安定性（工学的には安全性）**について簡潔に論じよ。
特に、運動の安定性に影響を与えるのは**どのパラメータ**で、**どのような場合に危険か** も論じよ。

軸には 反作用として $-\boldsymbol{N}\ (\neq \boldsymbol{0})$ のトルクが加わる。即ち $mra\omega^2$ に比例したトルクが、軸に垂直な方向に周期的に加わるので、軸の固定が甘い場合には、軸はぶれてしまう。運動の安定性に影響を与えるパラメータは ω, m, r, a であり、特に、高速回転において安定性が損なわれる可能性が高まる。

9）$\boldsymbol{L}^2$ および 内積 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ を計算せよ。この場合の $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ の**時間依存性**を簡潔に述べよ。

$\boldsymbol{L}^2 = m^2 r^2 a^2 \omega^2 + (\dfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)^2 \omega^2$，　$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} = (\dfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega^2$

$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{N}$ は 時間に依存して変化するが、$\boldsymbol{L}^2$ と $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ は 時間に依らず 運動の恒量である。

問題５（地球の歳差運動）［40 点］
地球をわずかに**扁平な回転楕円体の剛体**とみなし、その回転運動を **剛体系**を用いて考える。
対称軸（北極星の方）を 3 軸にとると、この場合の各直交軸は**慣性主軸**になる。
剛体慣性主軸系においては、慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ の**非対角成分は 0, 対角成分は 時間に依らない定数**であり、この場合、$I_{11} = I_{22}$ $\boxed{<}$ I_{33} （大小関係）を満たす。地軸は 近似的に 3 軸に平行なので 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は、$|\omega_1|, |\omega_2|$ $\boxed{\ll}$ ω_3 （程度までわかる大小関係）を満たす。
本設問では、剛体系での時間微分を、$\dot{\omega}_\alpha$ などとドットで表すことにする。
1) **まず、外力を無視した場合**の、**自由回転による地軸の歳差運動**について考察する。
この場合、地球に対する**オイラーの運動方程式**は、
$\boldsymbol{\omega}$ の成分 ω_α $(\alpha = 1,2,3)$ と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$, および、$I_{11} (= I_{22}), I_{33}$ を用いて表すと、

$$\boxed{I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{11})\ \omega_2\ \omega_3 = 0},\quad \boxed{I_{11}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\ \omega_3\ \omega_1 = 0},\quad \boxed{I_{33}\dot{\omega}_3 = 0}$$

従って $\boldsymbol{\omega}$ の成分のうち、$\boxed{\omega_3}$ は時間に依らない定数であることがわかる。
$\Omega = \boxed{\dfrac{I_{33} - I_{11}}{I_{11}}\omega_3}$ (>0)とおくと、$\dot{\omega}_1 + \Omega\ \omega_2 = 0$,　$\dot{\omega}_2 - \Omega\ \omega_1 = 0$
$\therefore$ $\ddot{\omega}_1 = \boxed{-\Omega^2}\omega_1$ であり、初期条件として、$\omega_1(t=0) = A$（A は小さな量）, $\dot{\omega}_1(t=0) = 0$ とすると、
$\omega_1 = \boxed{A\cos(\Omega t)}$　　また、$\dot{\omega}_1 + \Omega\ \omega_2 = 0$ より、$\omega_2 = -\dot{\omega}_1/\Omega = \boxed{A\sin(\Omega t)}$
即ち、$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\boxed{A\cos(\Omega t)}, \boxed{A\sin(\Omega t)}, \omega_3)$ であり、**剛体系では、回転軸（地軸）の方向**である $\boldsymbol{\omega}$ が、**3 軸（対称軸）のまわりを、小さな角度だけ傾きつつ、角速度** Ω **で回転**して見える。
この場合の、**自由回転による地軸の歳差運動の角速度**は、$\Omega = \boxed{\dfrac{I_{33} - I_{11}}{I_{11}}\omega_3}$ であり、
周期 T は、ω_3, I_{11}, I_{33} を用いて $T = \boxed{\dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{I_{11}}{I_{33} - I_{11}}\dfrac{2\pi}{\omega_3}}$ と表せる。
例えば、$I_{33} = 1.0025\ I_{11}$ の場合、この自由回転による歳差運動の周期は $\boxed{400}$ 日となる。
2) これとは別に、**外力に起因**して、約 26000 年の周期で、**地軸の向きが大きく変化**し、
これも**歳差運動**と呼ばれる。これは、主として $\boxed{\text{太陽}}$ からの引力が、（扁平な回転楕円体である）地球上の各地点で わずかに異なり、地球に**小さなトルク**が与えられることに起因している。
このトルクは、地軸を立たせようとするが、地球の $\boxed{\text{自転}}$ のために、外力とは $\boxed{\text{垂直}}$ な方向に、
回転軸である地軸が移動し、その結果、地軸の向きはゆっくりと回転する。
これは、$\boxed{\text{ジャイロスコープ}}$ 現象の一種であり、1)とは異なり、地軸の向きは大きく変化する。
3) 次に 1) とも 2) とも異なる、$\boldsymbol{\omega}$ に比例する外力トルク $\boldsymbol{N} = -k\,\boldsymbol{\omega}$ の **減衰力が作用する場合**を考える。
この場合の**オイラーの運動方程式**を、$\boldsymbol{\omega}$ の成分 ω_α と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$, $I_{11} (= I_{22}), I_{33}$ を用いて表すと、

$$\boxed{I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{11})\ \omega_2\ \omega_3 = -k\,\omega_1},\quad \boxed{I_{11}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\ \omega_3\ \omega_1 = -k\,\omega_2},\quad \boxed{I_{33}\dot{\omega}_3 = -k\,\omega_3}$$

ω_3 については単独で解けて、初期条件を $\omega_3(t=0) = B$ すると $\omega_3(t) = \boxed{B\exp(-\dfrac{k}{I_{33}}t)}$

ω_1 と ω_2 ついては、オイラー方程式を巧く処理すると、$\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 = \boxed{-\dfrac{k}{I_{11}}(\omega_1^2 + \omega_2^2)}$ となり、

$\omega_1^2 + \omega_2^2$ に対する時間発展の方程式は $\boxed{\dfrac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -\dfrac{2k}{I_{11}}(\omega_1^2 + \omega_2^2)}$ となる。

初期条件として $t = 0$ で $\omega_1^2 + \omega_2^2 = C$ とすると $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \boxed{C\exp(-\dfrac{2k}{I_{11}}t)}$ と解ける。

それ故、$(\omega_1^2 + \omega_2^2)/\omega_3^2 = \boxed{\dfrac{C}{B^2}\exp\left[-2k\left(\dfrac{1}{I_{11}} - \dfrac{1}{I_{33}}\right)t\right]}$ となり、$t \to \infty$ のとき $(\omega_1^2 + \omega_2^2)/\omega_3^2 \to \boxed{0}$

従って、この外力トルクの減衰力の効果で、自転軸と対称軸とのなす角は 次第に $\boxed{\text{小さくなる}}$。