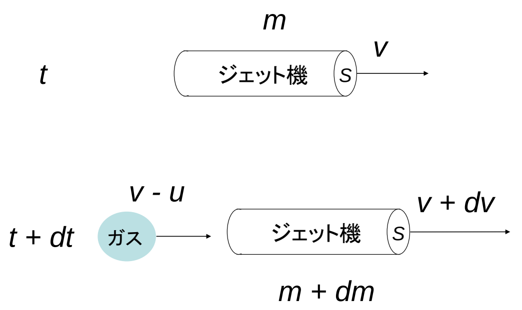
力学続論・試験問題（科目コード 4333006）（180 点満点）

問題１（ジェット）（40点）

ロケットやジェットは、高速のガスを後方に噴出することにより推進力を得て進む。
以下では、ジェット機の**進行方向を正**にとり、１次元的なジェット機の運動について考察する。
ジェット機の質量を $m(t)$, 位置を $x(t)$, 速度を $\mathrm{v}(t)$ として、ジェット機から見て**相対速度** $-\mathrm{u}(t)$ (u>0)のガスを噴射して進む場合を考える。($x(t)$ 等の (t) は適宜省略する。)
このジェット機は、密度 ρ の**空気**を面積 S の吸引口から吸い込み、**燃料と共に**後方に相対速度 u で排出する。 ρ , S は時間に依らず一定とし、風は無いものとする。

1) 時刻 t から $t+dt$ までの微小時間に吸入された空気、噴射されたガス、及び ジェット機に対する運動を考える。時刻 t でのジェット機の質量を m, 速度を v とし、時刻 $t+dt$ でのジェット機の質量を $m+dm$, 速度を $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ とする。



a) 時刻 t から $t+dt$ までに噴射された**ガス（空気＋燃料）**の運動量 P_G を求めよ。

b) 時刻 t でのジェット機の運動量 $P=m\mathrm{v}$ と，時刻 $t+dt$ での**ジェット機とガスの全運動量** P' との差 $dP\equiv P'-P$ を**微小量の１次まで**の表式で表せ。簡単な導出過程（途中の式）も書くこと。

2) 単位時間当たりの**燃料の消費量が一定**で $m(t)=\mu(T-t)$（μ と T は正の定数）と書き表せ、かつ、噴出する**ガスの相対的な速さ** $\mathrm{u}(t)$ が、$\mathrm{u}(t)=\mathrm{v}(t)+\mathrm{w}$（w は正の定数）と書き表せる場合を考える。
尚、この仮想的なジェット機は 燃料が大部分であり $t=T$ まで考えられるものとする。

a) 空気抵抗などの外力が無視できる理想系の場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, x(0)=0$ として、
速度 $\mathrm{v}(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。尚、$\gamma\equiv\rho S\mathrm{w}/\mu$ を用いると計算は幾分簡単化する。
<u>γ を用いた簡単化した表式で表せ</u>。導出過程も書くこと。
また、$x(t)$ $(0<t<T)$のグラフの概形を書け。

b) 空気抵抗がジェット機の速度に比例し $F(t)=-k\,\mathrm{v}(t)$ という場合を考える。
ここで、k は正の定数で、$k>\mu+\rho S\mathrm{w}$ とする。
この場合、初期条件を $\mathrm{v}(0)=0$ として、速度 $\mathrm{v}(t)$ を求めよ。導出過程も書くこと。
$\mathrm{v}(T)$ を $\rho, S, \mathrm{w}, \mu, k$ を用いて表せ。また、$\mathrm{v}(t)$ $(0<t<T)$ のグラフの概形を書け。

問題２（ヨーヨーの力学）（30点）

半径R, 質量Mで、**一様な円板**でできている**ヨーヨーの１次元的な上下運動**を考える。
糸は、ヨーヨーの外縁に巻かれ、糸の太さや質量、空気抵抗などは無視できるものとする。
糸の張力をT, 重力加速度をg として 以下の問いに答えよ。
尚、**x 座標**は鉛直**上方を正の向き**、ω は**反時計まわりを正の向き**とする。符号についても注意せよ。

1) ヨーヨーの（通常の回転の際の）**重心まわりの慣性モーメント** I を計算せよ。簡単な導出過程も書け。
2) ヨーヨーの重心の座標を $x(t)$として、ヨーヨーの質量 M や糸の張力 T などを用いて、
落下中（または上昇中）の**ヨーヨーの並進運動に対する運動方程式**を書け。（x 座標は上方が正の向き。）
3) ヨーヨーの重心まわりの角速度（反時計まわりを正とする）を $\omega(t)$として、ヨーヨーの重心まわりの慣性モーメント I や糸の張力 T などを用いて、落下中（または上昇中）の**ヨーヨーに対する回転の運動方程式**を書け。また、この一様な円板の場合について $\dot{\omega}(t)$ を M, R, T で表せ。

Ⅰ **糸の上端を固定**してヨーヨーを静かに落下させた場合について以下の問いに答えよ。

4) ヨーヨーの**重心速度** $v(t) \equiv \dfrac{dx(t)}{dt}$ とヨーヨーの**重心まわりの角速度** $\omega(t)$との関係を書け。

5) ヨーヨーに対する張力 T 消去し、落下中（または上昇中）のヨーヨーの**重心の加速度** $a(t) \equiv \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ に対する簡単な表式を求めよ。簡単な導出過程も書け。また、張力 T に対する簡単な表式を求めよ。

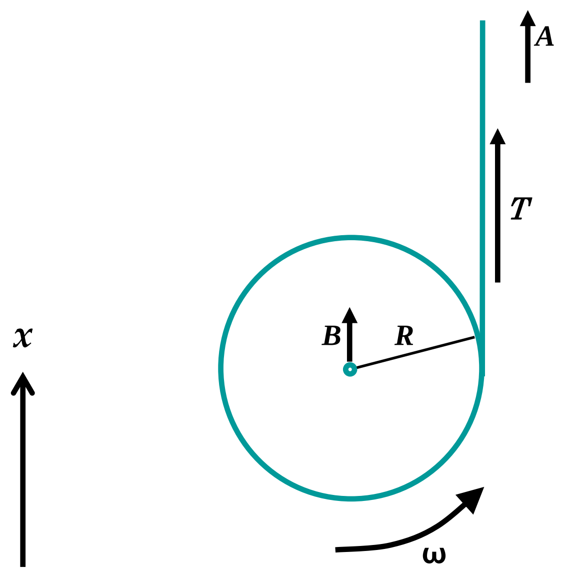
6) 初期条件を $x(0)=0$, $v(0)=0$ として、**落下中のヨーヨーの重心座標** $x(t)$ に対する簡単な表式を求めよ。

7) 初期条件を $x(0)=0$, $v(0)=0$ として、**落下中のヨーヨーに対する、**時刻 t での
並進の運動エネルギー $T(t)$, **回転エネルギー** $K(t)$, **位置エネルギー** $V(t)$ ($x=0$ で $V=0$ とする)
を計算し、それらを簡単な表式で表せ。また、$T(t)+K(t)+V(t)$ を計算せよ。

Ⅱ 図の様に **糸の上端を引き上げる場合** について以下の問いに答えよ。

8) 落下中のヨーヨーに対して、**糸を上方に引き上げ**て、**ヨーヨーの中心を一定の位置に止まらせたい**。
そのために、糸の上端に加えるべき加速度A を求めよ。

9) 落下中のヨーヨーに対して、**糸を上方に引き上げ**て、**ヨーヨーの中心を加速度B (>0) で上昇させたい**。
そのために、糸の上端に加えるべき加速度A を求めよ。



問題３（Neil の放物線）［30 点］

1）原点 O’ を中心に一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する回転系においては、**慣性力**として、（回転系での）質点の位置のみに依存する**遠心力** と、（回転系での）質点の速度に依存する**コリオリ力** が現れる。質量 m の質点に 静止系での力 $\mathbf{F}$ が作用している場合、この回転系（原点 O’）での質点の位置 $\mathbf{r}'$ について

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2}=\cdots$$ （$\frac{d'}{dt}$： 回転系での時間微分）という形での **回転系における運動方程式**を書け。

図の様に半径 R=100 km の円柱面状のスペース・コロニーが**一定の角速度** ω（ω は正の定数）で回転している場合を考える。図の様に 円柱面上に 回転系の座標の原点 O をとり、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向を x 軸、円柱面の回転方向を y 軸、円柱の中心への方向を z 軸とする。空気抵抗は無視して 以下の問いに答えよ。

2）図の座標系では $\mathbf{R}=(0, 0, R)$ が回転の中心である。この回転座標系（原点 O）での質点の位置 $\mathbf{r}=\mathbf{R}+\mathbf{r}'$ に対する**運動方程式**（質量 m, 静止系での力 $\mathbf{F}$ が作用している場合）を 1)の様に書け。

3）円柱面付近の人にとっては, 遠心力の効果が 重力加速度と等価になる。この等価な加速度 g を、ω, R を用いて表せ。

4）円柱面付近での遠心力の効果が g = 10m/sec^2 の重力加速度と等価になる様な角速度 ω と周期 T を計算せよ。

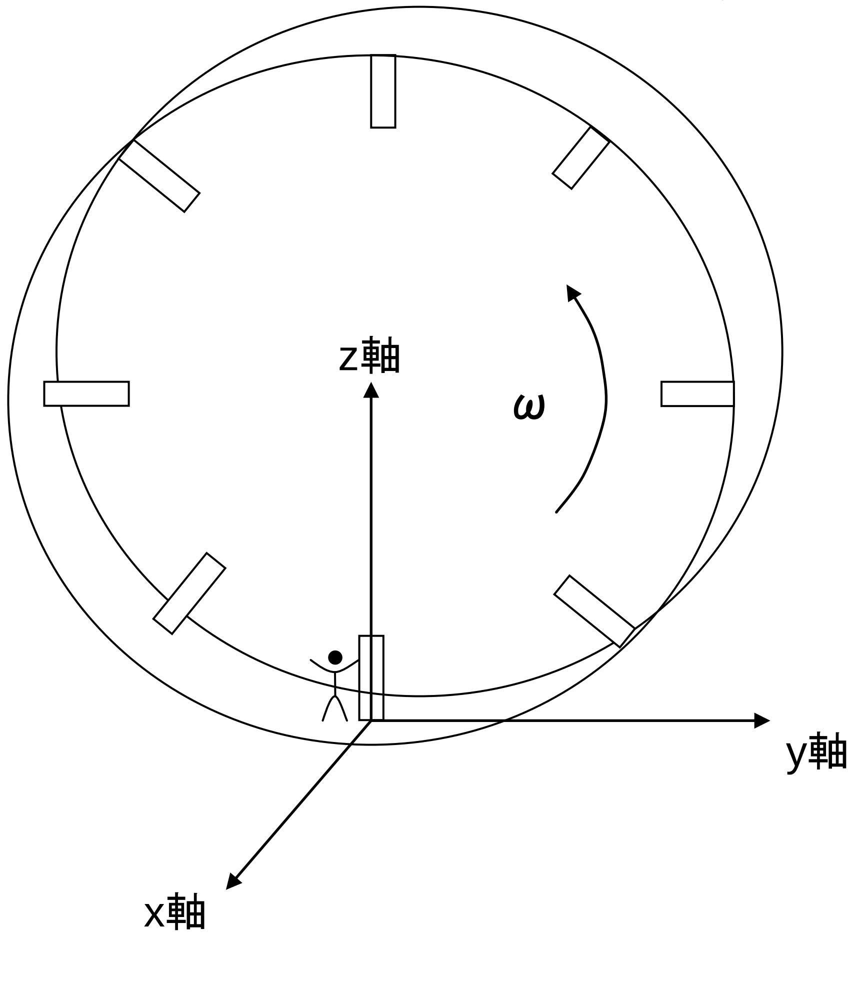
この回転座標系において、原点 O の上方、高さ h のビルの上 $(0, 0, h)$ から回転系での初速度 0 でおもりを落下させる。$h \ll R$ とし、おもりが感じる**円柱面付近の遠心力による加速度は一定**と見なし g で表す。尚、おもりにかかる静止系での力は $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ とする。

5）おもりの座標 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ の各成分に対する回転系での運動方程式を書け。

6）落下速度が小さいときは、コリオリ力は近似的に無視できる。コリオリ力を無視した場合のおもりの軌道を $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ で表す。$x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ を求めよ。

7）$x(t) \fallingdotseq x_0(t)$, $z(t) \fallingdotseq z_0(t)$ と近似して、6)の結果を 5)の運動方程式に代入することにより $y(t)$を求めよ。また、$(y(t), z(t))$ で表される放物軌道を $y=f(z)$ の形で表せ。

8）4)の場合について、h = 500m として、落下地点での y 座標、即ち、7）での $f(z=0)$ を計算せよ。



問題４（固定軸まわりの回転）［40 点］

1) 剛体の**角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$** と、剛体にかかる外力からの **トルク $\boldsymbol{N}$** との間の一般的な関係式である **剛体の回転に関する運動方程式** を書け。

2) 剛体等に対する、**角運動量** L_α (α=1,2,3) と**角速度ベクトル** ω_β (β=1,2,3) と **慣性モーメント・テンソル** $I_{\alpha\beta}$ との間の一般的な関係式を書け。

3) 位置 $\mathbf{r}_i$, 質量 m_i (i = 1,2,…, N) の質点系からなる **剛体の**
慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ (α, β=1,2,3) に対する **一般的な表式**を書け。

半径 R, 高さ $2a$, 質量 M の**一様な円柱**が、その中心軸を **固定軸**として回転している。
円柱の重心を原点Ｏとして、固定軸を z 軸とする静止座標系のもとで、以下の問いに答えよ。

4) この円柱の慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ (α, β=1,2,3) を求めよ。簡単な導出過程も書くこと。

この**円柱の上面**の 回転軸から距離 r の位置に、質量 m の**<u>質点を付着</u>**させ、**一定の角速度** ω で回転させる。
時刻の原点を適当に選び、質点の位置座標を $\mathbf{r}$ = ($r\cos(\omega t)$, $r\sin(\omega t)$, a) と表すことにする。

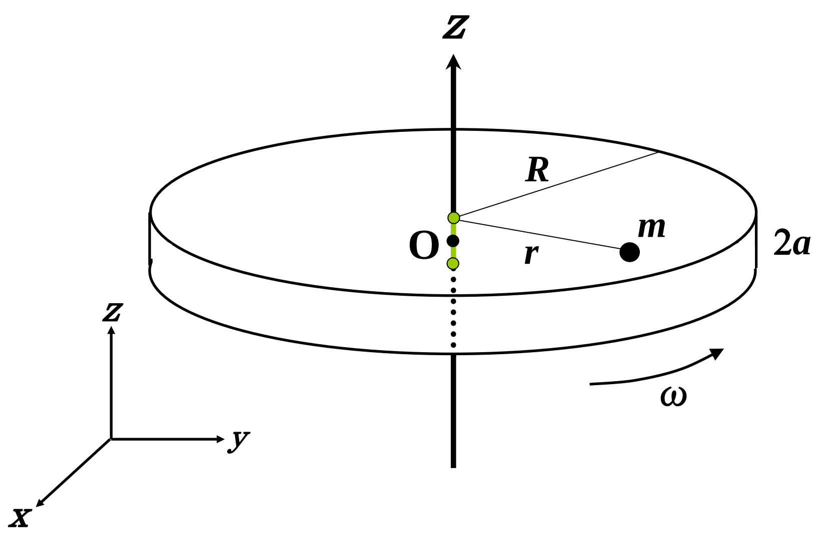
5) この座標系での、円柱面上の**質点の慣性モーメント・テンソル** $\Delta I_{\alpha\beta}(t)$ (α, β=1,2,3) を求めよ。

6) この場合、**角運動量ベクトル** $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ の方向は、**角速度ベクトル** $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ の方向と **一致しない**。角運動量ベクトル $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ を計算し、R, a, M, r, m, ω, t を用いて表せ。

7) **軸からの抗力モーメント $\boldsymbol{N}$**= (N_x, N_y, N_z) を計算し、R, a, M, r, m, ω, t を用いて表せ。

8) 軸の固定が甘い場合についての**運動の安定性（工学的には安全性）**について簡潔に論じよ。
特に、運動の安定性に影響を与えるのは**どのパラメータ**で、**どのような場合に危険か** も論じよ。

9) $\boldsymbol{L}^2$ および 内積 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ を計算せよ。
また、この場合の $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$ の**時間依存性**を簡潔に述べよ。



問題５（地球の歳差運動）［40 点］　　以下の $\boxed{}$ に適切な式、記号 または 語句 を書き込め。

地球をわずかに**扁平な回転楕円体の剛体**とみなし、その回転運動を **剛体系**を用いて考える。
対称軸（北極星の方）を 3 軸にとると、この場合の各直交軸は **慣性主軸**になる。
剛体慣性主軸系においては、慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}$ の**非対角成分は 0, 対角成分は 時間に依らない定数**であり、この場合、$I_{11} = I_{22}$ $\boxed{\text{ア}}$ I_{33}（大小関係）を満たす。地軸は 近似的に 3 軸に平行なので 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は、$|\omega_1|, |\omega_2|$ $\boxed{\text{イ}}$ ω_3（程度までわかる大小関係）を満たす。
本設問では、剛体系での時間微分を、$\dot{\omega}_\alpha$ などとドットで表すことにする。

1) **まず、外力を無視した場合**の、**自由回転による地軸の歳差運動**について考察する。
この場合、地球に対する**オイラーの運動方程式**は、
$\boldsymbol{\omega}$ の成分 ω_α $(\alpha = 1,2,3)$ と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$, および、$I_{11} (= I_{22}), I_{33}$ を用いて表すと、

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$

従って $\boldsymbol{\omega}$ の成分のうち、$\boxed{\text{カ}}$ は時間に依らない定数であることがわかる。

$\Omega =$ $\boxed{\text{キ}}$ (>0)とおくと、$\dot{\omega}_1 + \Omega\,\omega_2 = 0,\quad \dot{\omega}_2 - \Omega\,\omega_1 = 0$
$\therefore\ \ddot{\omega}_1 =$ $\boxed{\text{ク}}$ ω_1 であり、初期条件として、$\omega_1(t=0) = A$（A は小さな量）, $\dot{\omega}_1(t=0) = 0$ とすると、
$\omega_1 =$ $\boxed{\text{ケ}}$　　また、$\dot{\omega}_1 + \Omega\,\omega_2 = 0$ より、$\omega_2 = -\dot{\omega}_1/\Omega =$ $\boxed{\text{コ}}$
即ち、$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\ \boxed{\text{ケ}}\ ,\ \boxed{\text{コ}}\ ,\ \omega_3)$ であり、**剛体系では、回転軸（地軸）の方向**である
$\boldsymbol{\omega}$ が、**3 軸（対称軸）のまわりを、小さな角度だけ傾きつつ、角速度 Ω で回転**して見える。
この場合の、**自由回転による地軸の歳差運動の角速度**は、$\Omega =$ $\boxed{\text{キ}}$であり、
周期 T は、ω_3, I_{11}, I_{33} を用いて $T =$ $\boxed{\text{サ}}$と表せる。
例えば、$I_{33} = 1.0025\, I_{11}$ の場合、この自由回転による歳差運動の周期は $\boxed{\text{シ}}$日となる。

2) これとは別に、**外力に起因**して、約 26000 年の周期で、**地軸の向きが大きく変化**し、
これも**歳差運動**と呼ばれる。これは、主として $\boxed{\text{ス}}$からの引力が、（扁平な回転楕円体である）
地球上の各地点で わずかに異なり、地球に**小さなトルク**が与えられることに起因している。
このトルクは、地軸を立たせようとするが、地球の$\boxed{\text{セ}}$のために、外力とは $\boxed{\text{ソ}}$な方向に、
回転軸である地軸が移動し、その結果、地軸の向きはゆっくりと回転する。
これは、$\boxed{\text{タ}}$現象の一種であり、1)とは異なり、地軸の向きは大きく変化する。

3) 次に 1) とも 2) とも異なる、$\boldsymbol{\omega}$ に比例する外力トルク $\boldsymbol{N} = -k\,\boldsymbol{\omega}$ の **減衰力が作用する場合**を考える。
この場合の**オイラーの運動方程式**を、$\boldsymbol{\omega}$ の成分 ω_α と その時間微分 $\dot{\omega}_\alpha$, $I_{11} (= I_{22}), I_{33}$ を用いて表すと、

$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$

ω_3 については単独で解けて、初期条件を $\omega_3(t=0) = B$ すると $\omega_3(t) =$ $\boxed{\text{ト}}$
ω_1 と ω_2 ついては、オイラー方程式を巧く処理すると、$\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 =$ $\boxed{\text{ナ}}$ となり、
$\omega_1^2 + \omega_2^2$ に対する時間発展の方程式は $\boxed{\text{ニ}}$となる。
初期条件として $t = 0$ で $\omega_1^2 + \omega_2^2 = C$ とすると $\omega_1^2 + \omega_2^2 =$ $\boxed{\text{ヌ}}$と解ける。
それ故、$(\omega_1^2 + \omega_2^2)/\omega_3^2 =$ $\boxed{\text{ネ}}$となり、$t \to \infty$ のとき $(\omega_1^2 + \omega_2^2)/\omega_3^2 \to$ $\boxed{\text{ノ}}$
従って、この外力トルクの減衰力の効果で、自転軸と対称軸とのなす角は 次第に $\boxed{\text{ハ}}$。