力学続論・レポート問題・略解

問題１（角運動量）質量 M の質点の運動に関して 以下の問いに答えよ。

1) 原点 O に関する 質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$と運動量ベクトル $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$の外積 $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ で定義される。$\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ の各成分を $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の成分を用いて表せ。

$$L_x = yp_z - zp_y\ ,\quad L_y = zp_x - xp_z\ ,\quad L_z = xp_y - yp_x$$

2) 内積 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}$ と $\mathbf{L} \cdot \mathbf{p}$ を計算し、角運動量 $\mathbf{L}$ が $\mathbf{r}$ とも $\mathbf{p}$ とも**直交**することを示せ。

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = L_x\, x + L_y\, y + L_z\, z = (yp_z - zp_y)\, x + (zp_x - xp_z)\, y + (xp_y - yp_x)\, z = 0$$
$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = L_x\, p_x + L_y\, p_y + L_z\, p_z = (yp_z - zp_y)\, p_x + (zp_x - xp_z)\, p_y + (xp_y - yp_x)\, p_z = 0$$

3) 運動方程式を用いて、角運動量 $\mathbf{L}$ の**時間微分**が、質点の位置 $\mathbf{r}$ と質点に作用する力 $\mathbf{F}$ との**外積**で表すことができることを示せ。

$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ より $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = M\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

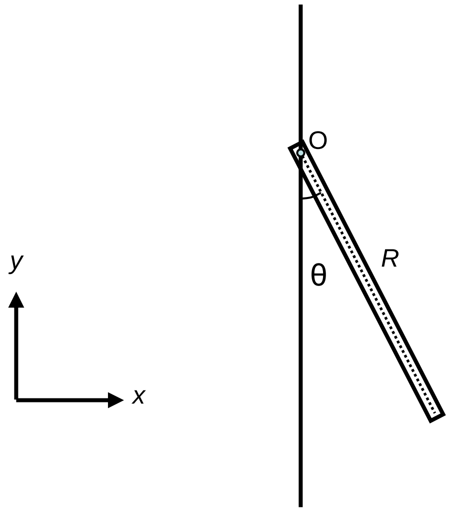
4) 中心力場の場合、質点に作用する中心力 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{r}$ に比例し、$\mathbf{F} = k(r)\, \mathbf{r}$ と表すことができる。
中心力場の場合、角運動量 $\mathbf{L}$ が**保存量**になることを示せ。

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times k\, \mathbf{r} = k\, \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ より、$\mathbf{L}$ は **保存量**である。

5) 原点 O を力の中心とする**中心力場の場合**には、質点の運動が**平面内の運動になる**ことを示せ。

中心力場の場合、$\mathbf{L}$ は **保存**し、$\mathbf{L}$ の**方向も保存**される。この事と、$\mathbf{L}$ が $\mathbf{r}$ と**直交**することから、$\mathbf{r}(t)$ で表される質点の運動は、角運動量 $\mathbf{L}$ に **垂直** な（原点 O を含む）**平面内の運動**になる

問題２（棒の慣性モーメントと剛体振子）
長さ R で質量 m の一様な棒の端点に、固定した回転軸を付け、**棒状の剛体振子**を作った。
振動平面に垂直に z 軸をとり、図の様に、振動平面の座標を $(x,\ y)$ で表し、回転軸をその原点 O(0, 0) とする。棒の太さと摩擦は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。



1) この剛体振子の **<u>固定回転軸まわりの棒の慣性モーメント</u>** I を求めよ。導出過程も書くこと。

棒の線密度 $\rho\equiv m/R$ を用いると、棒の（原点 O から測って）l から $l + dl$ までの微小部分の質量は、$\rho\, dl$ であり、この微小部分の慣性モーメントへの寄与は、$\rho\, dl l^2$ である。

従って、この棒状の剛体振子の慣性モーメント I は、$I = \rho\int_0^R dl l^2 = \dfrac{1}{3}\rho R^3 = \dfrac{1}{3}mR^2$ となる。

2) 固定点 O から棒の重心までの距離が $R/2$ であることに注意して、図のような場合に、
棒状の剛体振子が重力から受けるトルク N_z を、重力加速度 g と m, R, θ を用いて表せ。

$$N_z = -\frac{1}{2} mgR\sin\theta$$

3) 回転軸のまわりの慣性モーメント I 及び θ, m, R, g を用いて、**回転の運動方程式**を書き表せ。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2} mgR\sin\theta$$

4) この場合の **<u>剛体振子の相当単振子の長さ</u>** l^* を、I, m, R で表せ。
また、1) の結果を用いて I を消去し l^* に対する簡単な表式を求めよ。

$$l^* = \frac{2I}{mR} = \frac{2}{3}R$$

5) この場合、**微小振動の周期** T を、R, g を用いて表せ。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}$$

問題３（Flyby）

質量 M の探査機が、始状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_I$ で惑星に近づき、終状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_F$ で惑星から遠ざかる場合を考える。惑星は大質量であり、探査機が近づく領域では 惑星の速度 $\vec{\mathrm{w}}$ は一定であるとして、以下の問いに答えよ。

a）**<u>惑星から見た場合</u>**、探査機は一般に双曲線の軌道を描く。

惑星から見た、探査機の近づく時（始状態）の相対速度 $\vec{\mathrm{u}}_I$ と、

遠ざかる時（終状態）の相対速度 $\vec{\mathrm{u}}_F$ を、 それぞれ $\vec{\mathrm{v}}_I$, $\vec{\mathrm{v}}_F$, $\vec{\mathrm{w}}$ を用いて表せ。

また、$\vec{\mathrm{u}}_I$ と $\vec{\mathrm{u}}_F$ が満たすべき関係式を簡単な理由と共に示せ。

$\vec{\mathrm{u}}_I = \vec{\mathrm{v}}_I - \vec{\mathrm{w}}$, $\vec{\mathrm{u}}_F = \vec{\mathrm{v}}_F - \vec{\mathrm{w}}$ $\lvert\vec{\mathrm{u}}_I\rvert = \lvert\vec{\mathrm{u}}_F\rvert$ （理由）惑星から見た場合、始状態と終状態の探査機は、 ポテンシャル・エネルギーが等しく、従って、運動エネルギーが等しくなるから。

b）始状態と終状態の探査機の**運動エネルギーの変化** $\Delta E \equiv \frac{1}{2}M\vec{\mathrm{v}}_F^2 - \frac{1}{2}M\vec{\mathrm{v}}_I^2$ を適当な形に変形し、

M, $\vec{\mathrm{v}}_F - \vec{\mathrm{v}}_I$, $\vec{\mathrm{w}}$ を用いて表せ。また、それにより、**どの様な軌道を選べば、終状態の探査機の速さ** $\lvert\vec{\mathrm{v}}_F\rvert$ **を増加させることができるか**簡潔に論じよ。

$\Delta E = \frac{1}{2}M(\vec{\mathrm{u}}_F + \vec{\mathrm{w}})^2 - \frac{1}{2}M(\vec{\mathrm{u}}_I + \vec{\mathrm{w}})^2 = M(\vec{\mathrm{u}}_F - \vec{\mathrm{u}}_I)\cdot\vec{\mathrm{w}} = M(\vec{\mathrm{v}}_F - \vec{\mathrm{v}}_I)\cdot\vec{\mathrm{w}}$ 始状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_I$ を $\vec{\mathrm{w}}$ と逆（反対）方向に選び、終状態の速度 $\vec{\mathrm{v}}_F$ が $\vec{\mathrm{w}}$ と同じ方向になるような 軌道を選べば、ΔE 、従って、$\lvert\vec{\mathrm{v}}_F\rvert$ を増加させることができる。

問題４（慣性モーメント・角運動量・角速度・回転エネルギー）
以下の様な、理想化（単純化）された回転系の記述について、それぞれ解答せよ。

1）スケート選手が、**両方の手にそれぞれ質量** M **のおもり**を持ち、左右対称な姿勢で、氷の上を角速度 ω で回転している場合を考える。但し、スケート選手の体重と 氷上での摩擦は無視できるものとする。

a）腕を伸ばし、回転軸とそれぞれのおもりとの距離を R としたとき、
回転軸まわりの慣性モーメント I，角運動量 L，回転エネルギー E を、M，R，ω を用いて表せ。

$I=2MR^2$ ，$L=2MR^2\omega$ ，$E=MR^2\omega^2$

b）次に両腕を縮めて、回転軸とそれぞれのおもりとの距離を 1/10 にしたとき、
回転軸まわりの慣性モーメント、角運動量、角速度、回転エネルギーは
それぞれ何倍になると予想されるか？

慣性モーメントは 1/100 倍、角運動量は 1 倍、角速度は 100 倍、回転エネルギーは 100 倍

2）**連星系の融合**を考える。それぞれの連星の質量は等しく M とし、初期状態では、それらが、
重心のまわりを 距離 R，角速度 Ω で回転していて、それぞれの星の自転は無視できるものとする。
これら２つの星が、外力無しで中心力である**重力によって融合**し、終状態では、
半径 r **の 一様な角速度** ω **で回転する 一様な球体の星になった**とする。
融合に伴う物質や光等の放出は無視でき、全質量の変化は無いものとして以下の問いに答えよ。

a）融合後の、質量が $m\equiv 2M$ で 半径 r の一様な球体の星の重心まわりの
慣性モーメント I を求めよ。導出過程も書くこと。

球の重心のまわりの慣性モーメント・テンソル $I_{\alpha\beta}\equiv\sum_i m_i(\mathbf{r}_i^2\delta_{\alpha\beta}-r_{i\alpha}r_{i\beta})$ は、対称性より、

非対角成分は 0 で、対角成分は等しく $I\equiv I_{11}=I_{22}=I_{33}$ とおける。

$$I=\frac{1}{3}\sum_\alpha I_{\alpha\alpha}=\frac{1}{3}\cdot 2\sum_i m_i\mathbf{r}_i^2=\frac{2}{3}\int_0^r 4\pi R^2 dR\cdot\frac{m}{\frac{4\pi}{3}r^3}R^2=\frac{2m}{r^3}\int_0^r dR\,R^4=\frac{2m}{r^3}\frac{r^5}{5}=\frac{2}{5}mr^2$$

b）融合後の星の角運動量 L と回転エネルギー E を、それぞれ I, ω を用いて表せ。

$$L=I\omega,\quad E=\frac{1}{2}I\omega^2$$

c）融合後の星の角運動量 L を、初期連星系の変数である M, R, Ω を用いて表せ。

$L=2MR^2\Omega$

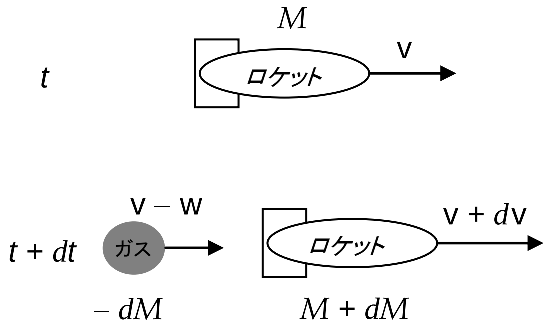
d）融合後の星の角速度 ω と回転エネルギー E を、それぞれ M, R, Ω, r を用いて表せ。

$$\omega=\frac{L}{I}=\frac{2MR^2\Omega}{I}=\frac{2MR^2\Omega}{\frac{2}{5}mr^2}=\frac{5R^2}{2r^2}\Omega,\quad E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}L\omega=\frac{5MR^4}{2r^2}\Omega^2$$

問題５（ロケット）

ロケットやジェットは、高速のガスを後方に噴出することにより推進力を得て進む。
以下では、ロケットの**進行方向を正**にとり、１次元的なロケットの運動について考察する。
ロケットの質量を $M(t)$, 位置を $z(t)$, 速度を $\mathrm{v}(t)$として､ロケットから見て**相対速度** $-\mathrm{w}(t)$ $(\mathrm{w}>0)$のガスを噴射して進む場合を考える。（$z(t)$ 等の (t) は適宜省略する。）

1) 時刻 t から $t+dt$ までの微小時間に噴射されたガスとロケットに対する運動を考える。時刻 t でのロケットの質量を M, 速度を v とし､時刻 $t+dt$ でのロケットの質量を $M+dM$, 速度を $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ とする。



a) 時刻 t から $t+dt$ までに噴射されたガスの運動量 P_G を求めよ。

$P_G = -dM(\mathrm{v}-\mathrm{w})$

b) 時刻 t でのロケットの運動量 $P=M\mathrm{v}$ と, 時刻 $t+dt$ での**ロケットとガスの全運動量** P'との差 $dP \equiv P'-P$ を**微小量の１次まで**の表式で表せ。簡単な導出過程（途中の式）も書くこと。

$dP = (M+dM)(\mathrm{v}+d\mathrm{v}) - dM(\mathrm{v}-\mathrm{w}) - M\mathrm{v} \fallingdotseq M\,d\mathrm{v} + \mathrm{w}\,dM$

2) 噴出する**ガスの相対的な速さ** w **がロケットの質量** M **に比例し** $\mathrm{w}=cM$（c は正の定数）と書き表せ、かつ、単位時間当たりの**ガスの噴出量が一定**で $M(t) = m(1-t/t_0)$（m と t_0 は正の定数）と書き表せる場合について、以下の問いに答えよ。［授業とは条件が少し異なるので注意せよ。］

a) まず、最も簡単な、宇宙空間の様に**外力が無視できる場合**について考える。
初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, z(0)=0$ として、速度 $\mathrm{v}(t)$と位置 $z(t)$を求めよ。導出過程（途中の式）も書くこと。
また、この場合のロケットの運動を何と言うか？

(全)運動量が保存するので $dP=0$ であり、従って、$d\mathrm{v} = -\dfrac{w}{M}dM = -c\,dM \quad \therefore \ \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -c\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{cm}{t_0}$

$\mathrm{v}(0)=0, z(0)=0$ より、$\mathrm{v}(t) = \dfrac{cm}{t_0}t$,　$z(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{cm}{t_0}t^2$　　これは等加速度運動

b) 次に、**ロケットの打ち上げ**の際の様に、一様な重力加速度 g がロケットの進行方向と逆向きに働いている場合について考える。初期条件を $\mathrm{v}(0)=0, z(0)=0$ として $\mathrm{v}(t)$と $z(t)$を求めよ。
導出過程（途中の式）も書くこと。また、打ち上げできる為の条件を示せ。

この場合、運動方程式は、$\dfrac{dP}{dt} = -Mg$ であり、これと 1) より、$dP = M\,d\mathrm{v} + \mathrm{w}\,dM = -Mg\,dt$

従って、$d\mathrm{v} = -\dfrac{w}{M}dM - g\,dt = -c\,dM - g\,dt \quad \therefore \ \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -c\dfrac{dM}{dt} - g = \dfrac{cm}{t_0} - g$

$\mathrm{v}(0)=0, z(0)=0$ より、$\mathrm{v}(t) = (\dfrac{cm}{t_0} - g)t$, $z(t) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{cm}{t_0} - g)t^2$　　打ち上げできる条件は、$\dfrac{cm}{t_0} > g$

問題６（慣性モーメントの計算とヨーヨーの力学）

半径 R, 質量 M で、**質量分布**が $\rho(r)$ の**円板**でできているヨーヨーを考える。
ある高さから**静かにヨーヨーを落下**させる。ヨーヨーは、最初は落下し、糸が伸び切るまで落下すると、その後は上昇する。糸は、ヨーヨーの外縁に巻かれ、糸の太さや質量、空気抵抗などは無視できるものとする。糸の張力を T, 重力加速度を g として 以下の問いに答えよ。
尚、**z 座標**は鉛直**上方を正の向き**、ω は**反時計まわりを正の向き**とする。符号についても注意せよ。

1) **ヨーヨーの質量** M と、ヨーヨーの（通常の回転の際の）**重心まわりの慣性モーメント** I を、それぞれ、**質量分布** $\rho(r)$ **の簡単な積分形**で表せ。また、一様な円板の場合について、I を計算せよ。

$M = 2\pi\int_0^R dr\, r\rho(r)$, $I = 2\pi\int_0^R dr\, r^3\rho(r)$, 一様な円板の場合は $I = \frac{1}{2}MR^2$

2) ヨーヨーの重心の座標を $z(t)$として、ヨーヨーの質量 M や糸の張力 T などを用いて、落下中（または上昇中）の**ヨーヨーの並進運動に対する運動方程式**を書け。（z 座標は上方が正の向き。）

$M\ddot{z}(t) = -Mg + T$

3) ヨーヨーの重心まわりの角速度（反時計まわりを正とする）を $\omega(t)$として、ヨーヨーの重心まわりの慣性モーメント I や糸の張力 T などを用いて、落下中の**ヨーヨーに対する回転の運動方程式**を書け。

$I\dot{\omega}(t) = RT$

4) 落下中のヨーヨーの**重心速度** $v(t) \equiv \dfrac{dz(t)}{dt}$ とヨーヨーの**重心まわりの角速度** $\omega(t)$との関係を書け。

$v(t) = -R\omega(t)$

5) ヨーヨーに対する張力 T 消去し、落下中（または上昇中）のヨーヨーの**重心の加速度** $a(t) \equiv \dfrac{d^2z(t)}{dt^2}$ を、慣性モーメント I や 重力加速度 g などを用いて表せ。
また、一様な円板の場合について、加速度 $a(t)$ と張力 T を計算せよ。

$\dfrac{T}{M} = a + g = -\dfrac{I}{MR^2}a$ より $a(t) = -\dfrac{1}{1+\dfrac{I}{MR^2}}g$, 一様な円板の場合は $a(t) = -\dfrac{2}{3}g$, $T = \dfrac{1}{3}Mg$

6) 初期条件を $z(0)=0$, $v(0)=0$ として、**落下中のヨーヨーの重心座標** $z(t)$を、I, M, R, g, t で表せ。
また、一様な円板の場合について、$z(t)$ を計算せよ。

$z(t) = -\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{I}{MR^2}\right)}g\,t^2$, 一様な円板の場合は $z(t) = -\dfrac{1}{3}g\,t^2$

7) **落下中のヨーヨーに対する、**時刻 t での **並進の運動エネルギー** $T(t)$, **回転エネルギー** $K(t)$, **位置エネルギー** $V(t)$ を計算し、それらを I, M, R, g, t で表せ。また、$T(t) + K(t) + V(t)$ を計算せよ。

$T(t) = \dfrac{1}{2}Mv^2 = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{I}{MR^2}\right)^2}M g^2 t^2$, $K(t) = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{I}{MR^2}Mv^2 = \dfrac{\dfrac{I}{MR^2}}{2\left(1+\dfrac{I}{MR^2}\right)^2}M g^2 t^2$

$z(0)=0$ として、 $V(t) = M g\, z(t) = -\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{I}{MR^2}\right)}M g^2 t^2$, よって、$T(t) + K(t) + V(t) = 0$

8) ヨーヨーの全質量 M は変えずに、質量分布 $\rho(r)$ のみを変えることにする。
慣性モーメント I, 即ち、**質量分布** $\rho(r)$ **がどの様な場合**に、落下中（または上昇中）のヨーヨーの重心の加速度の大きさ $|a(t)|$ が最小になるか論ぜよ。

$a(t) = -\dfrac{g}{1+\dfrac{I}{MR^2}}$ より、$|a(t)|$ が最小になるのは、慣性モーメント I が最大になるときであり、
それは、質量の分布がヨーヨーの外縁部に集中しているとき。即ち、円環とみなせる場合。

問題７（回転系の物理）

原点 O を中心に一定の角速度**Ω**で回転する系を考える。以下の問いに答えよ。

1）この回転系においては、**慣性力**として、（回転系での）質点の位置のみに依存する**遠心力**と、（回転系での）質点の速度に依存する**コリオリ力**が現れる。
質量 M の質点に、静止系での力 $\mathbf{F}$ が作用している場合、

回転系での質点の位置 $\mathbf{r}$ に対して、 $M\dfrac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=...$ という形での **回転系における運動方程式**を書け。

$$M\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}-M\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})-2M\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}$$

2）**赤道上空の静止衛星**について考察する。地球の半径を R，地球の自転の角速度を Ω，地表での重力加速度を g とする。

a）地球の中心から $r\ (>R)$ だけ離れた上空の地点での重力加速度 g^* を、r , R , g を用いて表せ。

$$g^*=\frac{R^2}{r^2}g$$

b）静止衛星は赤道からは、遥か上空に止まって見える。
この様な、地球とともに回転する系での、静止衛星の位置 $\mathbf{r}$ に対する運動方程式を書け。

静止衛星の質量を M とすると、 $M\dfrac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=-Mg^*\dfrac{\mathbf{r}}{r}-M\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})=0$

c）地球の中心から静止衛星までの距離 r を、$R, g,$ Ω を用いて表せ。

$\dfrac{R^2}{r^2}g=\Omega^2 r$ より $r=\left(\dfrac{R^2}{\Omega^2}g\right)^{1/3}$

d） R ≒6000km , g ≒10 m/sec ^{2}， $\omega=2\pi$/day ≒7×10^{-5}sec^{-1} という近似の下で、
静止衛星までの高度 $h=r-R$ を概算せよ。

$r=\left(\dfrac{R^2}{\Omega^2}g\right)^{1/3}$ ≒ $\left(\dfrac{(6\times10^6\,\mathrm{m})^2}{(7\times10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1})^2}10\mathrm{m/sec}^2\right)^{1/3}$ ≒ $(73\times10^{21})^{1/3}$ m ≒4.2×10^7m = 42000km

∴ h ≒ 42000km - 6000km = 36000km

3）**静止物体を回転する人が見た場合**、その物体は円運動を行っているように見える。
回転する人の位置を原点 O とし、回転している人の角速度を$\boldsymbol{\Omega}=(0, 0,\ \Omega)$とする。
回転系から見た静止物体の軌道は、初期条件を $\mathbf{r}(t=0)=(r, 0, 0)$とすると、
$\mathbf{r}=(r\cos\Omega t,\ -r\sin\Omega t, 0)$ と表される。

a） $\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$ を計算せよ。

$\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}=(\Omega r\sin\Omega t,\ \Omega r\cos\Omega t, 0)$

b）この場合、回転系での**遠心力**を計算し、ベクトルで表せ。

物体の質量を M とすると $-M\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})=(M\Omega^2 r\cos\Omega t,\ -M\Omega^2 r\sin\Omega t, 0)=M\Omega^2\mathbf{r}$

c）この場合、回転系での**コリオリ力**を計算し、ベクトルで表せ。

$-2M\boldsymbol{\Omega}\times\dfrac{d'\mathbf{r}}{dt}=(-2M\Omega^2 r\cos\Omega t,\ 2M\Omega^2 r\sin\Omega t, 0)=-2M\Omega^2\mathbf{r}$

d）この場合、**回転系での見かけ上の円運動**を引き起こす「求心力」について簡単に説明せよ。

コリオリ力が、遠心力の２倍の大きさの内向きの求心力を与え、円運動をもたらすように見える。