レポート問題：円柱の慣性モーメント・テンソルの導出･略解

半径 a，長さ l，質量 M の一様な円柱を考える。この場合、密度は $\rho = \dfrac{M}{\pi a^2 l}$

円柱の重心を原点、中心軸を３軸とする。

a）対称性から $I_{11} = I_{22}$， $I_{\alpha\beta} = 0$（$\alpha \neq \beta$）

b） I_{33} の計算：

$$I_{33} = \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2) = \rho \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^a 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi\rho l \int_0^a dr\, r^3 = \frac{\pi}{2}\rho l a^4 = \frac{1}{2} M a^2$$

※ 尚、$I_{33} = \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i2}^2)$ は３軸からの距離にしか依らないので、

円柱を３軸方向に潰しても I_{33} は変わらない。それ故、円板の I_{33} と同じになる。

c）$I_{11} = I_{22}$ の計算：

$I_{11} = \sum_i m_i (r_{i2}^2 + r_{i3}^2)$， $I_{22} = \sum_i m_i (r_{i1}^2 + r_{i3}^2)$ より、

$$\frac{1}{2}(I_{11} + I_{22} - I_{33}) = \sum_i m_i r_{i3}^2 = \rho \int_0^a 2\pi r dr \int_{-l/2}^{l/2} dz\, z^2 = \rho\pi a^2 \left[\frac{1}{3} z^3\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\rho\pi a^2 l^3 = \frac{1}{12} M l^2$$

従って、$I_{11} = I_{22} = \sum_i m_i r_{i3}^2 + \dfrac{1}{2} I_{33} = \dfrac{1}{12} M l^2 + \dfrac{1}{4} M a^2$

※ 尚、$\dfrac{1}{2}(I_{11} + I_{22} - I_{33}) = \sum_i m_i r_{i3}^2$ は動径方向の距離に依らないので、

円柱を動径方向に潰しても変わらない。それ故、棒の場合と同じになる。

以上より、円柱の慣性モーメント・テンソル I は

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} M a^2 \end{pmatrix}$$