§ 1　剛体の回転と Euler の運動方程式

§ 1-1　剛体の回転と剛体系

剛体に対する回転の運動方程式は，角運動量 $\boldsymbol{L}$，トルク $\boldsymbol{N}$ を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{1}$$

一方，角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と慣性モーメントテンソル I により以下のように書ける。

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \text{即ち} \qquad L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta \tag{2}$$

従って，回転の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{N} \tag{3}$$

ここで，慣性モーメントテンソル $I_{\alpha\beta}$ は

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha}r_{i\beta}) \tag{4}$$

なので，剛体の向きが時刻 t と共に変わるとその成分も時々刻々と変化し，一般には $\frac{d}{dt}I_{\alpha\beta} \neq 0$. そのせいで計算は難しくなる。（剛体の向きが変わらなければ $\frac{d}{dt}I_{\alpha\beta} = 0$.）

・剛体系（body-fixed frame）：剛体に固定した座標系で $\frac{d'}{dt}I_{\alpha\beta} = 0$ となる

剛体に固定した座標系である剛体系では，剛体の向きは変わらないので，慣性モーメントテンソル I は時刻 t によらずに一定，即ち $\frac{d'}{dt}I_{\alpha\beta} = 0$ が成り立つ。ここで，$\frac{d'}{dt}$ は剛体系での時間微分を表す。

剛体系では，I が t によらないのでその分計算は簡単になる。その代わり，剛体系は一般に非慣性系（例えば，剛体の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の回転系）なので慣性力（みかけの力）を考慮しなければならない。

§ 1-2　剛体系での回転の運動方程式〜Euler の運動方程式

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ についての 静止系での時間微分 と 剛体系での時間微分 の対応関係

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{5}$$

を用いると，角運動量 $\boldsymbol{L}$ については

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \tag{6}$$

従って，剛体の回転に関する運動方程式は

$$\frac{d'\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \tag{7}$$

であり，成分で表すと

$$\begin{cases} \dot{L}_1 + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2) = N_1 \\ \dot{L}_2 + (\omega_3 L_1 - \omega_1 L_3) = N_2 \\ \dot{L}_3 + (\omega_1 L_2 - \omega_2 L_1) = N_3 \end{cases}$$

ここで，ドットは " 剛体系での時間微分 " とする。

尚，剛体系では，$\dot{I}_{\alpha\beta} = 0$ より $\dot{\boldsymbol{L}} = \frac{d'}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = I\dot{\boldsymbol{\omega}}$ である。

・慣性主軸：慣性モーメントテンソル $I_{\alpha\beta}$ が対角的になる座標軸

慣性モーメントテンソル $I_{\alpha\beta}$ は，$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ と対称テンソルなので，適当な座標軸を選べば対角化可能である。このような座標軸のことを慣性主軸といい，そこでは

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

即ち，

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta} \tag{8}$$

が成り立つ。（ここでは繰り返し添字の和はとらない。）従って，角運動量 L_α は

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}\omega_\beta = I_{\alpha\alpha}\omega_\alpha \tag{9}$$

これを，回転の運動方程式に代入すると，以下の " オイラーの運動方程式 " が得られる。

オイラー (Euler) の運動方程式：剛体系（$\dot{I} = 0$）での慣性主軸では

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1 = N_2 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases}$$

§ 1-3　対称コマの自由回転

・対称コマ：慣性主軸を選んだときに慣性モーメントのうち 2 つの対角成分が等しい剛体
　自由回転：外力のトルクを受けない回転，即ち $\boldsymbol{N}=0$ の回転
　[自由 (free) というのは力が働かないということ。]
・地球の自転：対称コマの自由回転の例
　地球：わずかに扁平な回転楕円体であり，対称軸方向を 3 軸とすると，$I_{11}=I_{22}<I_{33}$
・3 軸まわりに回転対称な 対称コマに対するオイラーの運動方程式 は一般に

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1+(I_{33}-I_{11})\omega_2\omega_3=0 \\ I_{11}\dot{\omega}_2+(I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1=0 \\ I_{33}\dot{\omega}_3=0 \end{cases}$$

　第 3 式より $\dot{\omega}_3=0$ より，ω_3 は時間に依らない定数である。
　従って，$\Omega\equiv\frac{I_{33}-I_{11}}{I_{11}}\omega_3$（定数）と置くと，第 1 式と第 2 式は

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1+\Omega\omega_2=0 \\ \dot{\omega}_2-\Omega\omega_1=0 \end{cases}$$

　$\therefore\ \ddot{\omega}_1=-\Omega\dot{\omega}_2=-\Omega^2\omega_1$　　この解は $\omega_1=A\cos(\Omega t+\phi)$（$A$ と ϕ は任意定数）
　これを第 1 式に代入すると　$\omega_2=A\sin(\Omega t+\phi)$
　つまり，オイラーの運動方程式の解は

$$\begin{cases} \omega_1=A\cos(\Omega t+\phi) \\ \omega_2=A\sin(\Omega t+\phi) \\ \omega_3=\mathrm{const.} \end{cases}$$

　$A\neq0$ ならば，この対称コマの角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向は角速度 Ω で回転する。
　これを 自由回転による回転軸の歳差運動 という。
・地球の自転の場合，$|\omega_{1,2}|\ll|\omega_3|$ であり，地球の自由回転による歳差運動は “ 地軸方向のわずかなぶれ ” として現れる。尚，地球の場合，$I_{33}>I_{11}$ より，$\Omega=\frac{I_{33}-I_{11}}{I_{11}}\omega_3>0$ なので「地軸方向 ($\boldsymbol{\omega}$) の回転」は自転と同じ右ねじの向きになる。
・従って，地球から見た天体運行の中心（北極星の近く）は毎日少しずつずれていき，
　毎晩観測しているとその中心は（小さな）“ 円周 ” を描くことがわかる。
・自転による歳差運動の周期は，$T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{I_{11}}{I_{33}-I_{11}}\frac{2\pi}{\omega_3}=\frac{I_{11}}{I_{33}-I_{11}}\mathrm{day}$ であり，実際の地球では約 440 日である。
・尚，太陽からの重力によるジャイロ現象としての歳差運動 はこれとは別の現象であり，
　約 26000 年周期で地軸を大きく変える。

§ 1-4　剛体の自由回転の安定性・不安定性

オイラーの運動方程式（オイラー方程式）：剛体系での慣性主軸では

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1 = N_2 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases}$$

自由回転 $\boldsymbol{N} = 0$ の場合のオイラー方程式 は

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_{22}-I_{33}}{I_{11}}\omega_2\omega_3 = \lambda_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{I_{33}-I_{11}}{I_{22}}\omega_3\omega_1 = \lambda_2\omega_3\omega_1 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_{11}-I_{22}}{I_{33}}\omega_1\omega_2 = \lambda_3\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

という非線形連立常微分方程式になる。ここで $\lambda_1 \equiv \frac{I_{22}-I_{33}}{I_{11}}$, $\lambda_2 \equiv \frac{I_{33}-I_{11}}{I_{22}}$, $\lambda_3 \equiv \frac{I_{11}-I_{22}}{I_{33}}$

これを一般的に解くのは難しいが，以下の 3 つの解の存在は直ちに分かる。

【解 1】 $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$　　(ω：時間に依らない定数)

【解 2】 $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$　　(ω：時間に依らない定数)

【解 3】 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　　(ω：時間に依らない定数)

ここでは，これらの解の安定性を調べる。

剛体系では $\dot{I}_{\alpha\alpha} = 0$ より $\dot{\lambda}_\alpha = 0$ なので，オイラー方程式の第 1 式を時間微分すると

$$\ddot{\omega}_1 = \lambda_1(\dot{\omega}_2\omega_3 + \omega_2\dot{\omega}_3) = \lambda_1((\lambda_2\omega_3\omega_1)\omega_3 + \omega_2(\lambda_3\omega_1\omega_2)) = \lambda_1(\lambda_2\omega_3^2 + \lambda_3\omega_2^2)\omega_1 \quad (10)$$

同様にして

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 = \lambda_1(\lambda_2\omega_3^2 + \lambda_3\omega_2^2)\omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 = \lambda_2(\lambda_3\omega_1^2 + \lambda_1\omega_3^2)\omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 = \lambda_3(\lambda_1\omega_2^2 + \lambda_2\omega_1^2)\omega_3 \end{cases}$$

・I_{11}, I_{22}, I_{33} のうち 2 つが等しい場合は対称コマの自由回転であり 前節で示した。

・対称コマでない場合は，慣性主軸を適当に選べば $I_{11} > I_{22} > I_{33}$ とできる。

そこで，以下では $I_{11} > I_{22} > I_{33}$ の場合を考える。

この場合，$\lambda_1, \lambda_3 > 0$, $\lambda_2 < 0$ なので，$a_1 \equiv \lambda_1$, $a_2 \equiv -\lambda_2$, $a_3 \equiv \lambda_3$ とおくと

$a_1, a_2, a_3 > 0$ であり

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 = a_1(-a_2\omega_3^2 + a_3\omega_2^2)\omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 = -a_2(a_3\omega_1^2 + a_1\omega_3^2)\omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 = a_3(a_1\omega_2^2 - a_2\omega_1^2)\omega_3 \end{cases}$$

以上の方程式系を用いて，3 つの解（【解 1】,【解 2】,【解 3】）のそれぞれについて “ 解の安定性 ” を調べる。

解の安定性の吟味：解に“ 小さな揺らぎ ”を与え，系の時間発展を調べる。

(a) 短軸まわりの回転の安定性：【解 1】$\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$（$\omega$ は t に依らない定数）の安定性

※ 短軸まわりの慣性モーメントの成分 I_{11} がいちばん大きいことに注意。

$t = 0$ で $\omega_1 \simeq \omega$, $\omega_2 \simeq 0$, $\omega_3 \simeq 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 \simeq 0 \\ \ddot{\omega}_2 \simeq -a_2 a_3 \omega^2 \omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 \simeq -a_2 a_3 \omega^2 \omega_3 \end{cases}$$

$\Omega_1 \equiv \sqrt{a_2 a_3}\,\omega$（時間に依らない定数）とおくと

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_2 \simeq -\Omega_1^2 \omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 \simeq -\Omega_1^2 \omega_3 \end{cases}$$

これより，$\omega_2 \simeq C\sqrt{a_2}\cos(\Omega_1 t + \phi)$ (C, ϕ は積分定数，$C > 0$) と書ける。

前頁の自由回転のオイラー方程式の第 2 式より $\omega_3 = -\frac{1}{a_2\omega}\dot{\omega}_2 \simeq C\sqrt{a_3}\sin(\Omega_1 t + \phi)$

$\therefore (\omega_2, \omega_3) \simeq C\big(\sqrt{a_2}\cos(\Omega_1 t + \phi), \sqrt{a_3}\sin(\Omega_1 t + \phi)\big)$

従って，回転軸の向きは振れ幅が小さな楕円運動となり，解は安定。

（$t = 0$ で $|\omega_2|, |\omega_3| \ll |\omega_1|$ より，$C\sqrt{a_2}, C\sqrt{a_3} \ll |\omega|$ であり，振れ幅は小さい。）

(b) 長軸まわりの回転の安定性：【解 3】$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$（$\omega$ は t に依らない定数）の安定性

※ 長軸まわりの慣性モーメントの成分 I_{33} がいちばん小さいことに注意。

$t = 0$ で $\omega_3 \simeq \omega$, $\omega_1 \simeq 0$, $\omega_2 \simeq 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 \simeq -a_1 a_2 \omega^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 \simeq -a_1 a_2 \omega^2 \omega_2 \\ \ddot{\omega}_3 \simeq 0 \end{cases}$$

$\Omega_3 \equiv \sqrt{a_1 a_2}\,\omega$（時間に依らない定数）とおくと

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 \simeq -\Omega_3^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 \simeq -\Omega_3^2 \omega_2 \end{cases}$$

これより，$\omega_2 \simeq C\sqrt{a_2}\cos(\Omega_3 t + \phi)$ (C, ϕ は積分定数，$C > 0$) と書ける。

前頁の自由回転のオイラー方程式の第 2 式より $\omega_1 = -\frac{1}{a_2\omega}\dot{\omega}_2 \simeq C\sqrt{a_1}\sin(\Omega_3 t + \phi)$

$\therefore (\omega_2, \omega_1) \simeq C\big(\sqrt{a_2}\cos(\Omega_3 t + \phi), \sqrt{a_1}\sin(\Omega_3 t + \phi)\big)$

従って，回転軸の向きは振れ幅が小さな楕円運動となり，解は安定。

（$t = 0$ で $|\omega_1|, |\omega_2| \ll |\omega_3|$ より，$C\sqrt{a_1}, C\sqrt{a_2} \ll |\omega|$ であり，振れ幅は小さい。）

(c) 中軸まわりの回転の安定性：【解 2】$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$（$\omega$ は t に依らない定数）の安定性

※ 短軸でも長軸でもない慣性主軸をここでは「中軸」と呼ぶことにする。

$t = 0$ で $\omega_2 \simeq \omega$, $\omega_1 \simeq 0$, $\omega_3 \simeq 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 \simeq +a_1 a_3 \omega^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 \simeq 0 \\ \ddot{\omega}_3 \simeq +a_1 a_3 \omega^2 \omega_3 \end{cases}$$

$\kappa \equiv \sqrt{a_1 a_3}\omega$（時間に依らない定数）とおくと

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 \simeq +\kappa^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 \simeq +\kappa^2 \omega_2 \end{cases}$$

これより，$\omega_1 \simeq \sqrt{a_1}(Ae^{\kappa t} + Be^{-\kappa t})$ (A, B は積分定数) とかける。

前頁の自由回転のオイラー方程式の第 1 式より $\omega_3 = \frac{1}{a_1 \omega}\dot{\omega}_1 \simeq \sqrt{a_3}(Ae^{\kappa t} - Be^{-\kappa t})$

$\therefore (\omega_1, \omega_3) \simeq (\sqrt{a_1}(Ae^{\kappa t} + Be^{-\kappa t}), \sqrt{a_3}(Ae^{\kappa t} - Be^{-\kappa t}))$

t が大きくなると，$e^{\kappa t}$ または $e^{-\kappa t}$ という因子の為，$|\omega_1|, |\omega_3|$ は指数関数的に増加し，$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$ という 解から急激に離れていく。（＝回転軸の向きは大きく変化する。）

即ち，【解 2】は（揺らぎに対して）非常に不安定な解である。

この様に，“ 中軸 ” まわりの回転運動は不安定 である。

※ $|\omega_1|, |\omega_3|$ が大きくなると，前提となる近似が成立せず，上の計算結果とずれてくる。

剛体の自由回転の安定性（まとめ）

剛体系で慣性主軸系で $I_{11} > I_{22} > I_{33}$ の場合

・“ 短軸 (1 軸) まわりの回転 ” と “ 長軸 (3 軸) まわりの回転 ” は安定

・“ 中軸 (2 軸) まわりの回転 ” は不安定